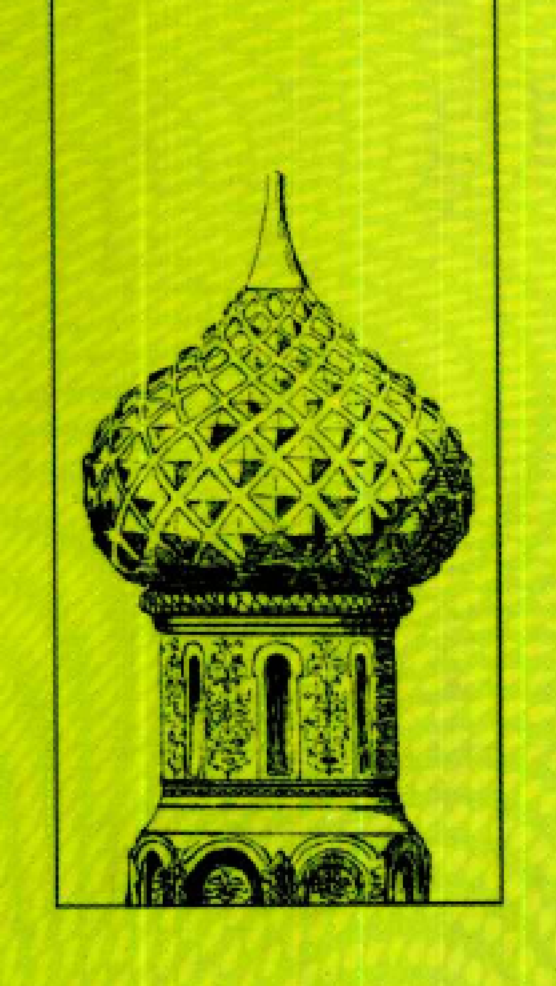


吉米多维奇数学分析习题集学习指引

（第一册）

□ 沐定夷　谢惠民　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校



《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集，自20世纪50年代引进以来，对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响。本书是为该习题集的俄文2003年版的中译本编写的学习指引。全书分三册出版，第一册为分析引论和一元微分学，第二册为一元积分学与级数，第三册为多元微积分。

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析，由浅入深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路，讲道理、讲方法，揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构，特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维，同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系，不回避任何难点，为读者更有效地利用该习题集、掌握微积分的基本功提供适当的帮助。

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者，对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值。

学科类别：数学

academic.hep.com.cn

ISBN 978-7-04-029531-3



定价 39.00 元

吉米多维奇
数学分析习题集
学习指引

(第一册)

□ 沐定夷　谢惠民　编著
□ 卫瑞霞　吴茂庆　审校

JIMIDUOWEIQI SHUXUE FENXI XITIJI XUEXI ZHIYIN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

《吉米多维奇数学分析习题集》是最为经典的微积分习题集, 自 20 世纪 50 年代引进以来, 对我国半个多世纪的微积分和高等数学的教与学产生了重大的影响. 本书是为该习题集的俄文 2003 年版的中译本编写的学习指引. 全书分三册出版, 第一册为分析引论和一元微分学, 第二册为一元积分学与级数, 第三册为多元微积分.

本书通过对习题集中的部分典型习题的讲解与分析, 由浅人深、分层次、分类型地介绍微积分的解题思路, 讲道理、讲方法, 揭示出习题集中的丰富多彩的内容和结构, 特别注重一法多用、一题多解和发展几何直观的形象思维, 同时通过补注、命题等多种方式补充介绍与习题有关的背景知识和联系, 不回避任何难点, 为读者更有效地利用该习题集掌握微积分的基本功提供适当的帮助.

本书适用于正在学习微积分的大学生和需要提高自己数学水平与能力的各类自学者, 对于讲授微积分或高等数学的教师和准备考研的学生也有参考价值.

图书在版编目 (CIP) 数据

吉米多维奇数学分析习题集学习指引. 第 1 册 / 沐定夷, 谢惠民编著. — 北京: 高等教育出版社, 2010.6

ISBN 978-7-04-029531-3

I. ①吉... II. ①沐...②谢... III. ①数学分析–高等学校–解题 IV. O17–44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 098638 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 李 鹏 **封面设计** 王凌波
责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010–58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	400–810–0598
邮政编码	100120	**网 址**	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京联兴盛业印刷股份有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	**版 次**	2010 年 6 月第 1 版
印 张	27.75	**印 次**	2010 年 6 月第 1 次印刷
字 数	600 000	**定 价**	39.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号 29531–00

前 言

当年学习数学分析时, 我们和很多同学一样, 慕名选取《吉米多维奇数学分析习题集》(以下简称为《习题集》) 来训练和检验自己的解题能力, 巩固和加深对课程基本内容的理解. 在使用该书中, 有的题在通过艰苦的思考后有所收获, 有的题需要请教老师或同学才能解决. 从中我们往往发现困难的原因, 有的是由于知识的不足, 而更多的则是思维能力的欠缺和数学方法方面的匮乏.

工作后我们有幸从事数学分析课程的讲授, 在多年的教学实践中对于学习解题的重要性有了更深的体会. 仅仅将解法表达清楚还只是第一步, 关键是使得学生在解题的思考过程和方法方面有所收获, 而这也是数学分析课程必然要承担的任务.

无独有偶, 高等教育出版社的赵天夫编辑也有上述类似的观点. 他约请我们为最新版的《吉米多维奇数学分析习题集》(根据俄文 2003 年版翻译) 编写学习指引, 这就是本书 (以下简称为《指引》) 的由来.

在《习题集》中既有为初学者而设的入门题, 也有达到考研水平的难题, 既有理工科都需要训练的基本计算题, 也有理科教学中必须学习的证明题, 此外还包含了许多有趣的应用题, 因此该书具有特别巨大的读者群体. 为此我们在编写这本《指引》时必然要考虑到不同层次读者的不同需要. 一方面, 如达·芬奇教学生画画时从画蛋入手, "千里之行, 始于足下", 《指引》的每一节都从基本题和基本的思维方法开始. 另一方面, 在本书中力求不回避任何困难, 因为解决《习题集》中的部分较难习题的过程正是培养独立思考和发挥自己的创造才能的极佳机会. 此外, 为提供新的工具或解决某些问题的需要, 本书还增加了若干命题. 我们希望本书对于从初学者直到已经学过微积分的许多不同读者都能提供适当的帮助.

"授人以鱼不如授人以渔". 在讲解习题的解答时, 我们希望回答"它是如何想出来的", 这样才不至于做了一百道题之后还不知道如何去解第一百零一道题. 当然这在很多情况下是几乎不可能完成的任务, 但我们仍然努力从多个方面去接近这样的目标.

《指引》中选择了部分题写出解答, 或只作分析, 其目的是为了介绍方法, 而不是"就题论题"地列出其答案. 一方面, 我们要求一法多用, 而且还希望突出方法的出发点、其中所用的技巧或者其背后的数学思想. 另一方面, 对于很多题我们又给出一题多解, 特别是在解法的简洁易懂和生动有力方面下功夫. 这是为了从多种角度去探索问题的核心所在, 在寻找更完美的解法中提高对数学的鉴赏水平以及我们自身的思维能力.

在《习题集》中有各种类型的题, 其中还包含了许多基本定理. 读者很需要了解它们的意义. 在《指引》中经常通过注解等形式对习题解释其意义, 点明其来龙去脉, 指出在《习题集》内部的前后关照, 以及说明它们与数学分析以外知识的联系.

《指引》重视通过直观的几何图像发展形象思维的能力. 凡是几何思维对揭示问题本质有益之处尽可能配以相应的插图. 第一册中的插图总数超过 180 幅, 此外还有两个附录中的 300 多幅的函数图像. 所有图形都用 PSTricks 软件绘出.

《指引》(以及任何其他题解书) 的成功使用当然需要有读者的配合. 希望读者在看习题解答之前自己先做, 做出更好的解答. 书中的解答未必很好. 一个人的学习是不可能由别人代劳的. 数学是"做"懂的, 而不是"看"懂的, 只看解答而不动手做题则只能是一无所获. 做习题的主要目的除了获得知识之外, 更在于学会独立思考和培养独立研究的习惯与能力.

本书请苏州大学有几十年数学分析教学经验的资深教师卫瑞霞和吴茂庆担任审阅, 他们校核了初稿中几乎全部的解法和计算, 对许多内容提出了修改意见和建议, 这对于提高书稿的质量极为重要, 特此表示深深的谢意.

在本书的编写中利用了大量的书籍和论文, 其中包括《习题集》已有的多种题解, 特此对所有参考文献的作者表示衷心的感谢.

《指引》的成功出版有赖于高等教育出版社的大力支持, 其中特别要感谢策划编辑赵天夫同志、责任编辑李鹏同志、资深数学编审郭思旭老师和分社社长林梅老师. 他们对本书稿件进行了深入细致的编辑和加工, 纠正了原稿中从数学、文字直到排版上的许多错误和不妥之处, 对于提高本书的质量起到了非常重要的作用. 对于他们的出色工作和对本书所倾注的热情, 我们深表感激.

由于我们的学识有限, 从如何为一本丰富多彩的经典习题集编写学习指引的角度和所提出的目标和希望来看, 这本《指引》必然还很不成熟, 其中一定还会存在错误与疏漏, 恳请读者批评指正.

沐定夷 谢惠民

2010 年 3 月 31 日

目　录

第一章 分析引论

内容简介 这一章的目的是为进入微积分学作准备工作, 其中包括实数、函数概念与图像、数列极限与函数极限、连续函数等内容.

§1.1 实 数 (习题 1–40)

内容简介 本节的习题可分为以下部分: 数学归纳法与若干恒等式和初等不等式、有理数集的戴德金分割与实数的定义、确界定义与性质、与绝对值有关的不等式和等式、绝对误差与相对误差. 按照以上内容分小节叙述. 最后的补注小节解答较难的习题, 对数学归纳法作补充, 并证明本书将经常使用的平均值不等式.

1.1.1 数学归纳法 (习题 1–10)

数学归纳法是本书所用的基本方法之一.

这里的习题 1–5 是关于正整数 n 的恒等式, 习题 6–10 是关于 n 的不等式, 它们都是高等数学中经常使用的结果, 也是学习数学归纳法的好材料.

由于数学归纳法是中学数学的必修内容, 这里不再对它从头开始作介绍, 而只是作一些补充.

数学归纳法是用于数学证明的一种工具. 凡是与正整数 n 有关的命题, 不论是恒等式还是不等式, 都有可能用数学归纳法给出证明. 如果证明成功了, 则就认为该命题在数学上已经确认为真. 但是与正整数有关的命题也有很多不能用数学归纳法给出证明, 这就是说数学归纳法不是万能的.

作为复习, 下面先举中学数学教材中的一个例题, 并在附图中画出它的几何意义.

例题 证明从 1 开始的前 n 个奇数之和恰好等于 n^2.

解 这就是要证明与正整数 n 有关的下列恒等式:

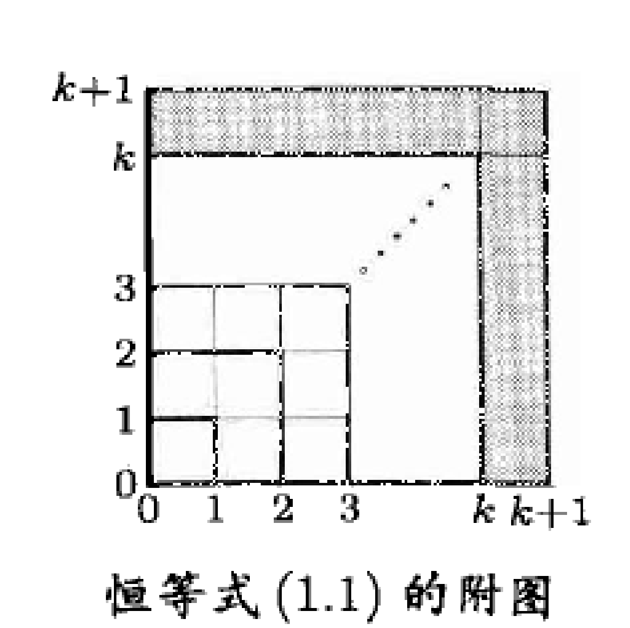
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2. \tag{1.1}$$

按照数学归纳法的规定, 分两步来做.

(1) 当 $n=1$ 时, (1.1) 式的两边都是 1, 因此成立.

(2) 假设当 $n=k\geqslant 1$ 时 (1.1) 成立, 即已经有

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2,$$



恒等式 (1.1) 的附图

那么当 $n=k+1$ 时就有

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)\\&=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.\end{aligned}$$

可见 $n=k+1$ 时 (1.1) 也成立 (附图中的阴影区的面积就是 $2k+1$).

根据数学归纳法原理, (1.1) 对一切正整数 n 成立. □

数学归纳法只是证明的工具 (之一), 但并不是发现命题的方法. 数学归纳法要证明的命题是什么地方来的? 这与数学归纳法完全是两回事. 这些命题往往可能是一种猜测, 即从许多个别例子归纳出来的. 上述例题中所要证明的恒等式很可能就是从 $1+3=2^2$, $1+3+5=3^2$ 等等"归纳"得到的, 或者说猜到的. 这里重要的是不要将数学归纳法与平时经常使用的"归纳"方法相混淆. 后者是从特殊到一般的一种广泛使用的推理方法. 归纳得到的结论可能正确, 也可能错误.

本节的前 5 题与上述例题相同, 即是要证明以下恒等式:

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2,$$

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1,$$

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}.$$

其中最后一题中引入了数学分析中不多见的特殊记号

$$a^{[0]}=1,\quad a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h].$$

该题的证明较难, 初学者可暂时跳过, 本书将在最后的补注小节中给出它的解答. 对于初学者来说, 首先应当掌握的是 $h=0$ 时的特殊情况. 这时上述恒等式就成为牛顿二项式定理 (或二项式公式). 这也是习题 5 中列出的后半题. 下面给出它的证明供参考.

习题 5 (后半题) 证明对实数 a,b 和任何正整数 n 成立

$$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^n+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^nb^n.$$

解 在这里采用高等数学中常用的求和简缩记号, 这就是将上述恒等式记为

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k. \tag{1.2}$$

$n=1$ 时, 恒等式 (1.2) 显然成立. 现假定该恒等式于 n 时成立, 则对 $n+1$ 可以作如下计算①:

① 本题的写法是常见的, 即从 n 时命题成立推出 $n+1$ 时命题也成立, 这与从 $n=k$ 时命题成立推出 $n=k+1$ 时命题也成立的写法是同样有效的. 只是前者不必引入 k, 比较简明一点. 特别在本题中不等式内部已经用了符号 k, 因此更为合适. 否则就要再选定一个符号, 例如 i, 然后按照从 $n=i$ 时命题成立推出 $n=i+1$ 时命题也成立的方式来写了.

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \Big(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k\Big)\cdot(a+b)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1}) \qquad (1.3)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{k-1} a^{n-k+1}b^k \qquad (1.4)\\ &= \mathrm{C}_n^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1})a^{n-k+1}b^k + \mathrm{C}_n^n b^{n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k. \quad \square\end{aligned}$$

注意其中的两个技巧: (1) 先将 (1.3) 写成两个和式, 然后将其中的第二个和式的指标 k 换为 $k'-1$, 因此当 k 从 0 到 n 时, k' 从 1 到 $n+1$, 然后又将 k' 记为 k, 这样得到 (1.4); (2) 利用杨辉恒等式 (其中 $1 \leqslant k \leqslant n$)

$$\mathrm{C}_{n+1}^k = \mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}. \qquad (1.5)$$

注 杨辉恒等式 (1.5) 是中学数学已有的内容, 这里重复一下. 它可以从组合数的计算公式直接推导如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}\cdot(n-k+1+k)\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \mathrm{C}_{n+1}^k.\end{aligned}$$

另一种证明方法是从组合数的定义出发. 为了求出从 $n+1$ 个不同元素中取出 k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 个元素的所有组合数, 我们可以取定其中某一个元素, 记为 a, 然后将所有的组合分为两类, 第一类是不含 a 的组合, 它一共有 C_n^k 种, 第二类是含 a 的组合, 它一共有 C_n^{k-1} 种. 可见 (1.5) 成立.

习题 6 和 7 中的两个伯努利不等式是今后常用的基本工具,

习题 6 (伯努利不等式) 证明

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 同号且大于 -1.

解 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时两边相等, 因此结论成立.

现假设该不等式于 $n=k$ 时成立, 则对于 $n=k+1$ 可作如下推导:

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) &\geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\ &= 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1} + (x_1+\cdots+x_k)x_{k+1}\\ &\geqslant 1+x_1+\cdots+x_{k+1}. \quad \square\end{aligned}$$

注 注意关于 $x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的关键条件, 首先是都大于 -1, 其次是同号, 两者缺一不可. 前者保证了不等式左边非负, 后者的重要性可以看 $n=2$. 这时不难看出, 若 $x_1x_2<0$, 则只能成立相反的不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1+x_2+x_1x_2<1+x_1+x_2.$$

可以看出, 下面的习题 7 中的不等式是习题 6 中的不等式的特例, 它也称为伯努利不等式 [6]. 若其中 $x\geqslant 0$, 则可从二项式公式推出. 今后会发现, 使用习题 7 中的不等式的机会要比习题 6 中的不等式多得多. 为此我们给出它的独立证明.

习题 7 (伯努利不等式) 证明, 如果 $x>-1$, 那么不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\ \ (n>1)$$

成立, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

解 用数学归纳法. 对于 $n=2$, 有

$$(1+x)^2=1+2x+x^2\geqslant 1+2x,$$

当且仅当 $x=0$ 时等号成立.

现设 $n=k$ 时不等式成立, 则当 $n=k+1$ 时有

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1}&=(1+x)^k(1+x)\\&\geqslant(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\\&\geqslant 1+(k+1)x,\end{aligned}$$

同样从归纳假设和上式推导可知当且仅当 $x=0$ 时等号成立. □

注 这里有一个意外, 当 $-2\leqslant x\leqslant -1$ 时本题的伯努利不等式仍然成立. 证明留给读者.

下面结合数学归纳法的使用同时介绍在数学证明中的分析法和综合法.

先看习题 9(b).

习题 9(b) 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \tag{1.6}$$

解 1 (分析法) 对 $n=1$ 可以直接从 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ 看出, 因 $2>\sqrt{3}$ 是明显的.

现设 $n=k$ 时不等式已经成立, 则当 $n=k+1$ 时需要证明下列不等式:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}. \tag{1.7}$$

由于对 (1.7) 左边的前 k 个因子的乘积可以用归纳假设, 因此只要能够证明以下不等式即可:

$$\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}. \tag{1.8}$$

这个不等式是否成立并不明显, 但我们可以将它两边平方后来观察, 这样就得到与 (1.8) 等价的

$$\frac{1}{2k+1} \cdot \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2} < \frac{1}{2k+3}. \tag{1.9}$$

这里已经可以看出 (1.9) 又等价于

$$(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2,$$

而将上式两边展开就知道它是成立的. 回溯上面的讨论, 从

$$(1.9) \Longleftrightarrow (1.8) \Longrightarrow (1.7)$$

可见证明已经完成[①]. □

上述证明是典型的分析法. 它的一般模式如下: 设条件为 A, 结论为 B, 为了证明 $A \Longrightarrow B$, 设法寻找 C, 使得 $C \Longrightarrow B$ (或者 $C \Longleftrightarrow B$). 然后只要设法证明 $A \Longrightarrow C$ 即可. 如果做不到, 还可以将以上方法继续用下去. 当然这不是一定能够成功的方法, 但确实是一种常用的思维方法.

与此相对的是综合法. 为了证明 $A \Longrightarrow B$, 设法寻找 C, 使得 $A \Longrightarrow C$ (或者 $A \Longleftrightarrow C$). 然后只要设法证明 $C \Longrightarrow B$ 即可. 如果做不到, 还可以将以上方法继续用下去. 当然这也不是一定能够成功的方法.

由于分析法往往过程很长, 说起来也可能比较啰唆, 因此在书刊中的多数证明是用综合法写的. 由于它往往不是实际的思维过程, 而像是事后的总结, 因此容易使读者看懂之后仍然不知道“这是如何想出来的”.

分析法和综合法的起源很早, 读者可以在古希腊数学家帕普斯的《数学汇编》中找到对它们的论述 (其中译文见 [14] 的 193 页).

现在按照综合法写出习题 9(b) 的第二个证明.

解 2 (综合法) 对于 $n=1$ 同解 1. 现设 $n=k$ 时不等式 (1.6) 已经成立, 则当 $n=k+1$ 时就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2(k+1)-1}{2(k+1)} &< \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \\ &= \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},\end{aligned}$$

其中最后一步利用了显然成立的不等式

$$(2k+1)(2k+3) = (2k+2)^2 - 1^2 < (2k+2)^2. \quad \square$$

《习题集》中的习题 1–10 是学习数学归纳法的最基本材料, 凡是对此不很熟悉的初学者都应当将它们做出来. 这对于高等数学的进一步学习大有益处.

最后给出新版中增加的习题 10 的 4 道小题的解法. 在本节最后的补注小节中还会对于其中的三道题给出不用数学归纳法的解法, 以供比较.

习题 10 (a) 证明不等式

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \ \ (n \geqslant 2).$$

---

① 在证明 (1.8) $\Longleftrightarrow$ (1.9) 时, 利用了在 $x, y \geqslant 0$ 的前提下, $x < y$ 与 $x^2 < y^2$ 等价.

解 对于 $n=2$ 可以从

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Longleftrightarrow\sqrt{2}+1>2$$

直接看出成立.

现设 $n=k$ 时成立, 则对 $n=k+1$ 就有

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}&>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\\&=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot(\sqrt{k(k+1)}+1)\\&>\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot(\sqrt{k^2}+1)=\sqrt{k+1}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 10(b) 证明不等式

$$n^{n+1}>(n+1)^n\ \ (n\geqslant 3).$$

解 对 $n=3$ 即是 $3^4=81>4^3=64$ (对 $n=2$ 不等式不成立).

现设 $n=k$ 时不等式成立, 于是我们需要证明的是 $n=k+1$ 时成立不等式

$$(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}.\tag{1.10}$$

为了利用归纳假设 $k^{k+1}>(k+1)^k$, 将 (1.10) 的左边乘除 k^{k+1}, 即可推导如下:

$$\begin{aligned}(k+1)^{k+2}&=\frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}\cdot k^{k+1}\\&>\frac{(k+1)^{k+2}}{k^{k+1}}\cdot(k+1)^k=\left(\frac{(k+1)^2}{k}\right)^{k+1}\\&>\left(\frac{k^2+2k}{k}\right)^{k+1}=(k+2)^{k+1}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 10(c) 证明不等式

$$\left|\sin\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\right|\leqslant\sum_{k=1}^n\sin x_k\ \ (0\leqslant x_k\leqslant\pi,k=1,2,\cdots,n).$$

解 对于 $n=1$ 由于 $0\leqslant x_1\leqslant\pi$, 因此 $\sin x_1\geqslant 0$, 不等式以等号成立.

现设 n 时不等式成立, 则当 $n+1$ 时就有

$$\begin{aligned}\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n+1}x_k\right)\right|&=\left|\sin\left(\sum_{k=1}^n x_k+x_{n+1}\right)\right|\\&=\left|\sin\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\cos x_{n+1}+\cos\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\sin x_{n+1}\right|\\&\leqslant\left|\sin\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\cos x_{n+1}\right|+\left|\cos\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\sin x_{n+1}\right|\\&\leqslant\left|\sin\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\right|+\left|\sin x_{n+1}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n+1}\sin x_k.\end{aligned}$$

这里最后一步利用了 $n=k$ 时的归纳假设, 还利用了 $0\leqslant x_{n+1}\leqslant\pi$ 时 $\sin x_{n+1}\geqslant 0$. $\square$

习题 10(d) 证明不等式

$$(2n)! < 2^{2n}(n!)^2.$$

解 对 $n=1$ 不等式就是 $2<4$.

现设 $n=k$ 时不等式成立, 则对 $n=k+1$ 就有

$$\begin{aligned}(2(k+1))! &= (2k)!\cdot(2k+1)(2k+2)\\ &< 2^{2k}(k!)^2\cdot(2k+1)(2k+2)\\ &< 2^{2k}(k!)^2\cdot(2k+2)^2\\ &= 2^{2(k+1)}[(k+1)!]^2. \quad \square\end{aligned}$$

1.1.2 有理数集的分割 (习题 11–13)

习题 11–14 是配合用戴德金分割方法建立实数系而设置的练习题. 关于这个理论的详细论述见三卷本的经典著作 [6] 的绪论 (长达 27 页). 实际上《习题集》在很多方面就是与这套教科书 (中的部分内容) 配合使用的习题课教材.

下面给出习题 11 的解答, 它有助于对戴德金方法的理解.

习题 11 设 c 为正整数, 且不是整数的完全平方数, 而 A/B 是确定实数 $\sqrt{c}$ 的分割, 其中 B 类中的正有理数 b 都有 $b^2>c$, 而 A 类中是所有余下的有理数. 证明, 在 A 类中没有最大的数, 而在 B 类中没有最小的数.

解 由于 $c\geqslant 2$, 因此就有 $1\in A$. 于是 A 中的非正数不会是 A 的最大数.

现设 $a\in A$ 且 $a>0$. 我们设法来找一个正整数 n, 使得 $a+\dfrac{1}{n}\in A$, 从而也就证明了 A 中的 $a>0$ 不会是 A 的最大数. 综合以上就知道 A 中没有最大数.

现在的问题是如何找出这样的 n. 从

$$a+\frac{1}{n}\in A \iff \left(a+\frac{1}{n}\right)^2 < c \iff a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c$$

可以看出, 只要解一个二次三项不等式就可以得到所需要的 n. 然而还有更简单的方法, 这就是利用

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n}<c \iff \frac{2a+1}{c-a^2}<n,$$

可见只要 n 充分大就一定能够满足 $a+\dfrac{1}{n}\in A$ 的要求.

对于 B 中无最小数的证明是类似的. 设正有理数 $b\in B$, 我们来证明一定存在某个正整数 m, 使得 $b-\dfrac{1}{m}\in B$. 由于 B 中的数都是正的, 因此首先要求 $b>\dfrac{1}{m}$, 也就是说要求成立 $m>\dfrac{1}{b}$. 然后从

$$b-\frac{1}{m}\in B \iff \left(b-\frac{1}{m}\right)^2 > c \iff b^2-\frac{2b}{m}+\frac{1}{m^2}>c$$

可以看出, 与其求解最后一个二次三项不等式, 不如写出

$$b^2-\frac{2b}{m}+\frac{1}{m^2}>b^2-\frac{2b}{m}>c,$$

然后取 $m>\frac{2b}{b^2-c}$ 就足够了.

综合以上, 对于 $b\in B$ 只要取

$$m>\max\{\frac{1}{b},\frac{2b}{b^2-c}\}$$

就足以保证有 $b-\frac{1}{m}\in B$. 因此 B 中没有最小数. □

由此可见, 若从几何上将所有有理数与解析几何中的数轴上的点一一对应起来, 则在 A 和 B 之间就出现了一个空隙. 这个空隙的位置当然就是实数 $\sqrt{c}$ 应当占有的位置. 这就是戴德金的分割方法的几何意义. 在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中, 用戴德金分割的方法引进无理数后即可建立起实数集 $\mathbb{R}$.

今后将引入四则运算和大小关系的有理数集 $\mathbb{Q}$ 和实数集 $\mathbb{R}$ 分别称为有理数系和实数系. 这里有一个重要事实. 即若在实数系中继续用戴德金分割方法, 则不能产生新的数和数系. 这就是下面要叙述的戴德金定理.

首先定义 $\mathbb{R}$ 中的分割. 设将实数全体划分成 A 和 B 两个子集, 且满足以下条件: (1) 两个子集均非空; (2) 每一个实数必属于且只能属于一个子集; (3) A 中的任何一个实数均小于 B 中的任何一个实数, 那么就将这样的划分称为是实数系 $\mathbb{R}$ 的一个分割, 记为 A/B, 并称 A 为下集, 称 B 为上集.

戴德金定理 对于实数系 $\mathbb{R}$ 的任何一个分割 A/B, 这时或者上集 B 有最小数, 或者下集 A 有最大数, 二者必居其一.

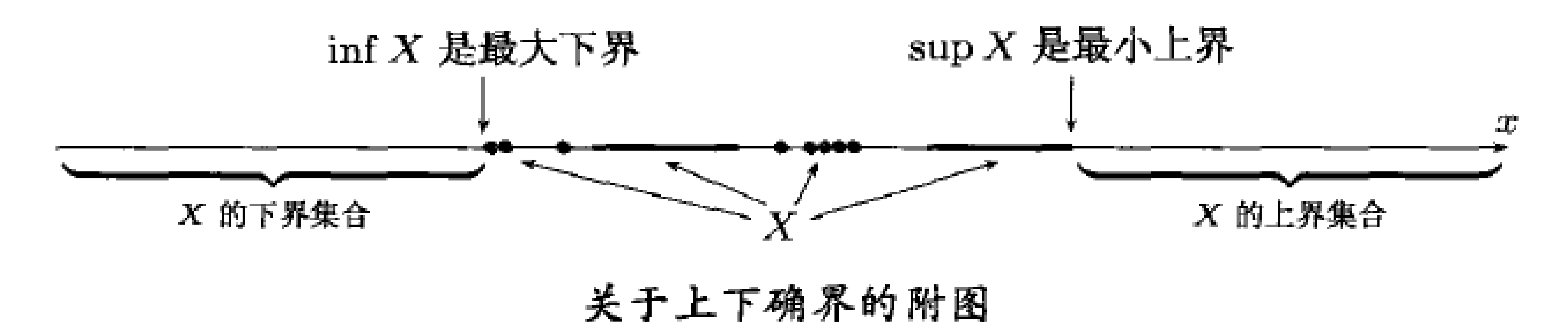
习题 12–13 也是用于学习戴德金分割方法的习题. 读者应当在学习 [6] 的绪论或类似的材料的基础上来做这两个习题. 习题 14 有特殊困难, 将放在补注小节的最后讨论.

1.1.3 确界的定义与性质 (习题 15–20)

在做这几道题之前当然首先要知道确界的定义及其最基本的性质. 为读者方便起见, 简述如下.

我们知道, 一个实数集合 (今后简称为数集) 可以有上界但没有最大数, 同样可以有下界但没有最小数, 例如开区间 $(0,1)$ 就是如此.

然而若数集 X 有上界, 则比上界大的数都是 X 的上界. 可以证明 (见习题 15), 在 X 的所有上界中一定有最小数, 也就是 X 的最小上界. 我们称它为 X 的上确界, 记为 $\sup X$ (参见下面的示意图).



关于上下确界的附图

于是若 $M=\sup X$, 则对于任意一个正数 $\varepsilon>0$, 数 $M-\varepsilon$ 比 M 还小, 因此它不可能是 X 的上界. 这表明至少有一个 $x\in X$, 满足 $x>M-\varepsilon$. 这就是上确界的最基本性质 (参见右图).

关于上确界性质的附图

又将数集 X 无上界记为 $\sup X=+\infty$. 于是上确界对任何非空数集都有意义, 只不过说一个数集 X 的上确界为正无穷大就是 X 无上界的同义语.

与上确界类似, 也可给出下确界的定义及其基本性质. 简述之, 有下界的数集 X 必有最大下界, 记为 $m=\inf X$. 于是对任意一个正数 $\varepsilon>0$, $m+\varepsilon$ 比 m 还大, 它不可能是 X 的下界. 于是至少有一个数 $x\in X$, 使得 $x<m+\varepsilon$ (请读者仿照附图作出解释下确界的基本性质的示意图).

又将数集 X 无下界记为 $\inf X=-\infty$.

现在我们来看《习题集》中关于确界的第一个习题, 即习题 15. 实际上它不是什么练习题, 而是一条基本定理. 为此我们给该题加上说明其内容的标题: 确界存在定理.

习题 15 (确界存在定理) 证明: 所有下方有界的非空数集有下确界, 所有上方有界的非空数集有上确界.

学过数学分析的读者都知道, 这是实数系的基本定理之一. 说它是实数系的基本定理, 这是因为只有在建立了实数系之后才成立这个结论. 下面的证明也是建立在戴德金定理的基础上的.

习题 15 的解 只写出后半题的证明. 前半题留给读者.

设 X 是有上界的数集, 于是集合

$$B=\{x\in\mathbb{R}\mid x\text{ 是 }X\text{ 的一个上界}\}$$

非空, 且以 X 中的任何一个数为其下界. 然后定义

$$A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\notin B\}.$$

不难看出这样定义的 A,B 满足戴德金分割中的前两个条件. 下面验证它也满足第三个条件. 若 $a\in A$, $b\in B$, 则由于 a 不是 X 的上界, 因此存在某个 $x\in X$, 使得 $a<x$. 于是就有 $a<x\leqslant b$ 成立.

这时的一种可能性是 B 有最小数, 也就是 X 有最小上界, 即已经证明存在 $\sup X$.

另一种可能性是 A 有最大数. 将它记为 α. 这时可以证明每一个 $x\in X$ 都有 $x\leqslant\alpha$, 否则, 若某个有 $x_0\in X$, 且 $x_0>\alpha$, 则 x_0 和 $\dfrac{x_0+\alpha}{2}$ 都只能属于 B. 另一方面从 $\dfrac{x_0+\alpha}{2}<x_0\in X$ 可见 $\dfrac{x_0+\alpha}{2}$ 不是 X 的上界, 因此与它属于 B 相矛盾.

于是我们已经证明: 若 A 有最大数, 则这个最大数也是 X 的上界. 这表明它也属于 B. 这与 A 是 B 的补集相矛盾. 因此这种情况不可能发生.

于是按照上述方式定义的数集 B 一定有最小数, 因此 X 一定有最小上界, 即 X 存在上确界. □

注 从《习题集》的安排来看, 习题 15 的求解用戴德金分割方法是自然的. 若读者所用的教科书不是用戴德金分割理论来建立实数系, 本题当然还可以有其他解法.

下面给出习题 16 的解.

习题 16 证明: 所有的有理真分数 $\frac{m}{n}$ (其中 m 和 n 是正整数, 且 $0 < m < n$) 的集合没有最小的和最大的元素, 求这个集合的下确界和上确界.

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$

$\cdots$ $\cdots$ $\cdots$

$\frac{1}{n}$ $\frac{2}{n}$ $\cdots\cdots$ $\frac{n-1}{n}$

习题 16 的附图 1

解 1 如左图所示, 将所有有理真分数 $\frac{m}{n}$ 中分母相同的按照分子递增次序从左到右排成一行, 再按照分母的递增次序自上而下排列各行, 这样就得到图中的三角形. 在附图中列出了 n 行.

考虑分母 $\leqslant n$ 的所有有理真分数. 从图可见, 每行中最左 (最右) 元是分母相同的有理真分数中的最小 (最大) 数, 于是最后一行中的最左 (最右) 元就是这些最小 (最大) 数中的最小 (最大) 数. 它们分别是 $\frac{1}{n}$ 和 $\frac{n-1}{n}$.

于是就得到下列不等式:

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}. \tag{1.11}$$

由此可见只要增大分母, 例如取分母为 $n+1$, 就有 $\frac{1}{n+1} < \frac{m}{n}$, 同时又有 $\frac{m}{n} < \frac{n}{n+1}$. 因此可知真分数全体的集合中没有最小的数, 也没有最大的数.

由于真分数在 0 到 1 之间, 对任意给定的 $0 < b < c < 1$, 只要 n 充分大, 就可使 $\frac{1}{n} < b$, $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} > c$, 因此可知所有真分数集合的下确界为 0, 上确界为 1. □

解 2 利用不等式

$$\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}, \tag{1.12}$$

可见真分数中没有最大数.

又从

$$\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n} \tag{1.13}$$

可见真分数中没有最小数. 关于真分数全体集合的上下确界的讨论与解 1 相同. □

注 解 2 中所用的不等式 (1.12) 的正确性没有问题, 只要交叉相乘就发现它等价于 $0 < m < n$. 同时与解 1 类似也可以从几何上对它作出形象化的解释.

如右图中那样考虑正整数坐标的格点 (n, m). 由于 $0 < m < n$, 这些格点都在第一象限内, 且满足 $0 < y < x$, 即图中的阴影区. 于是 $0 < \frac{m}{n} < 1$ 就表明连结每个格点到原点的直线段的斜率必定大于 0 而小于 1. 问题是证明在所有这些斜率中没有最大数和最小数.

在图中以示意的方式分别作出了连结格点 (n, m) 和 $(n+1, m+1)$ 到原点的两个直线段. 它们的斜率满足不等式 (1.12) 所示的关系.

习题 16 的附图 2

习题 17–20 是对于确界基本性质的练习题, 从略.

1.1.4 含有绝对值的不等式 (习题 21–30)

关于实数的绝对值的定义如下. 如果 x 是实数, 那么按照

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

定义的非负数称为 x 的绝对值 $|x|$. 对于一对实数 x, y, 我们又称 $|x-y|$ 为实数 x 和 y 之间的距离. 这里显然已经将实数 x 和 y 等同于数轴上的两个点来考虑了. 于是 $|x|$ 也就是数轴上点 x 到原点 O 的距离. 这些对于今后考虑与实数有关的问题时都是很有用的几何概念.

关于绝对值的最基本性质是三点不等式 (也称为三角形不等式):

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{1.14}$$

它刻画了数轴上点 $x, y, x+y$ 与原点距离之间的关系.

三点不等式还有一种常用的变形:

$$|x+y| \geqslant |x| - |y|.$$

为此只要写出 $|x| = |(x+y)-y| \leqslant |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$, 再移项即可.

这一部分的第一题是三点不等式的推广, 其中的小题 (a) 也可称为三点不等式.

习题 21 (三点不等式的推广) 证明不等式:

(a) $|x-y| \geqslant \big||x|-|y|\big|$;

(b) $|x+x_1+\cdots+x_n| \geqslant |x| - (|x_1|+\cdots+|x_n|)$.

解 (a) 由三点不等式 (1.14) 有 $|x| = |x-y+y| \leqslant |x-y| + |y|$, 然后移项得到

$$|x-y| \geqslant |x| - |y|.$$

交换 x 与 y 后又得到 $|x-y| = |y-x| \geqslant |y| - |x|$. 合并即可.

(b) 用三点不等式 (1.14) 可以有

$$\begin{aligned} |x| &= |(x+x_1+\cdots+x_n) - (x_1+\cdots+x_n)| \\ &\leqslant |x+x_1+\cdots+x_n| + |x_1+\cdots+x_n| \\ &\leqslant |x+x_1+\cdots+x_n| + |x_1|+\cdots+|x_n|, \end{aligned}$$

移项即可. □

注 在上述证明中还利用了三点不等式的另一个 (平凡的) 推广:

$$|x_1+\cdots+x_n| \leqslant |x_1|+\cdots+|x_n|.$$

这在 $n=2$ 时就是三点不等式, 而当 $n>2$ 时可以用数学归纳法给出证明. 从略.

以下的习题 22–29 都是求解带有绝对值的不等式. 其中最为基本的事实是: 当 $a>0$ 时有以下等价关系:

$$|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a,$$

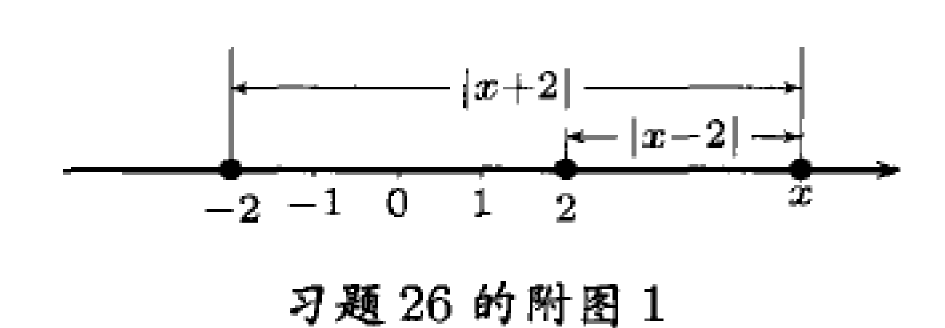
$$|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \geqslant a \text{ 或 } x \leqslant -a.$$

其中 $\leqslant$ 和 $\geqslant$ 改为 $<$ 和 $>$ 时也成立.

考虑到目前中学数学的选修课中已经有这方面的内容, 下面只对习题 26 作出解答. 它的解法很多. 从中读者可以看到, 问题在于如何克服取绝对值所带来的困难, 所介绍的几种方法都从不同的角度出发克服了这个困难.

习题 26 解不等式 $|x+2|+|x-2| \leqslant 12$.

解 1 (用绝对值的几何意义) 如附图 1 所示, $|x+2|$ 是点 x 到点 -2 的距离, $|x-2|$ 是点 x 到点 2 的距离, 问题是证明它们的和不超过 12.



习题 26 的附图 1

当 x 在 $[-2,2]$ 中时上述要求显然满足, 因此只要考虑 $x>2$ 和 $x<-2$.

当 $x>2$ 时, 从这两个距离之和减去 4 (即点 -2 到 2 的距离) 之后就是 x 到 2 的距离的两倍. 从 12 减去 4 后除 2 得 4, 可见 $x \leqslant 2+4=6$ 即可.

由于不等式左边关于原点对称 (即是 x 的偶函数), 因此答案为 $-6 \leqslant x \leqslant 6$. □

解 2 (采用分段处理方法去掉绝对值号) [1] 利用不等式左边在绝对值号下的两个线性函数的零点为 -2 和 2, 就可以将实数全体分成为三个区间

$$(-\infty,-2],\ (-2,2),\ [2,+\infty).$$

然后在三个区间上分别求解不等式. 这时在每个区间上都可以去掉绝对值号.

对第一个区间 $(-\infty,-2]$, 不等式变成

$$-x-2+2-x=-2x \leqslant 12,$$

即得到 $x \geqslant -6$. 于是解为 $[-6,-2]$.

同样可以在 $(-2,2)$ 上解不等式

$$x+2+2-x \leqslant 12,$$

即当 $x \in (-2,2)$ 时不等式总是成立的.

最后在 $[2,+\infty)$ 上不等式变成

$$x+2+x-2=2x \leqslant 12,$$

这样得到解为 $[2,6]$.

合并以上讨论, 得到答案为 $-6 \leqslant x \leqslant 6$. □

解 3 (用平方的方法消除绝对值号) 将不等式两边平方, 得到不等式

$$x^2+4x+4+x^2-4x+4+2|x^2-4| \leqslant 144.$$

这样就减少了一个绝对值项.

在 $x^2 \leqslant 4$ 时上述不等式变成 $16 \leqslant 144$, 这表明 $|x| \leqslant 2$ 时不等式总是成立的.

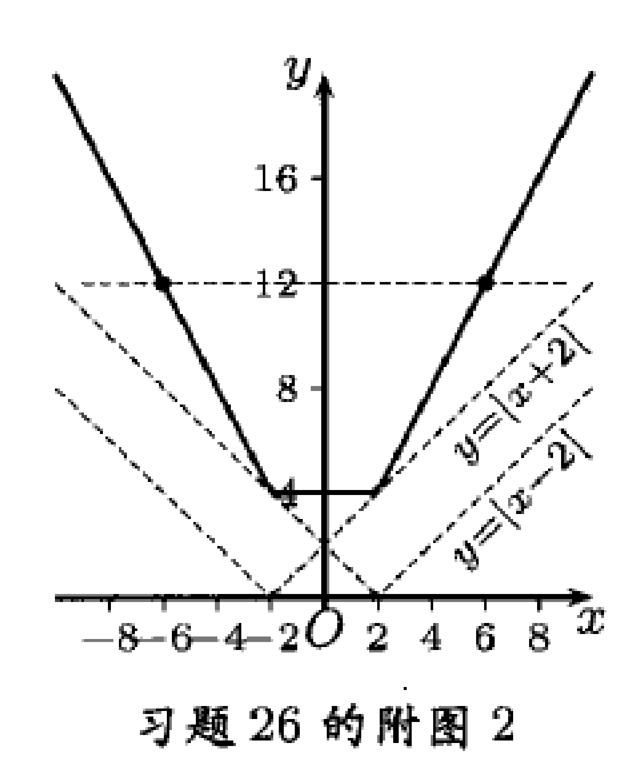
在 $x^2>4$ 时则有 $4x^2 \leqslant 144$, 即 $x^2 \leqslant 36$. 这提供了 $2<|x| \leqslant 6$.

合并以上知道答案是 $-6 \leqslant x \leqslant 6$. □

注 这里又利用了当 $x,y>0$ 时, $x \leqslant y$ 与 $x^2 \leqslant y^2$ 等价.

---

[1] 对于绝对值号下均为线性函数的不等式都可以用这样的方法求解.



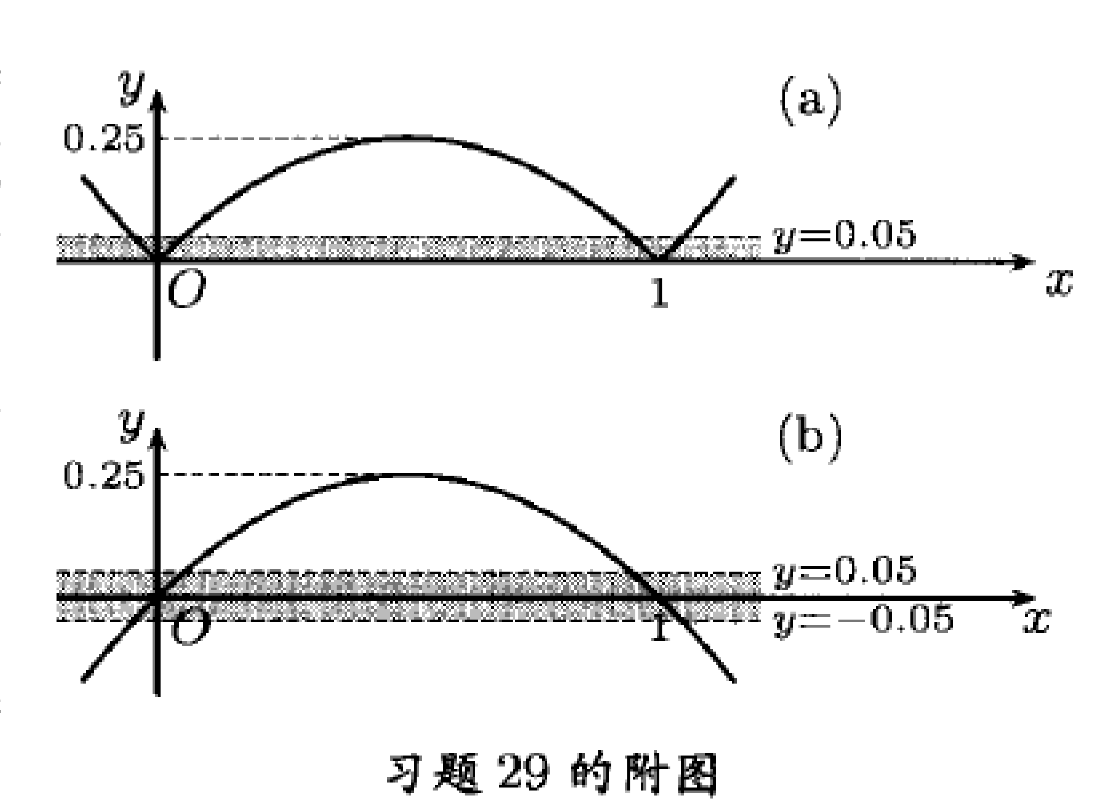
习题 26 的附图 2

解 4 (几何作图法) 若对于作图比较熟悉 (参见 §1.4), 则可先分别作出 $|x+2|$ 和 $|x-2|$ 的图像 (在附图 2 中用虚线表示), 然后将它们"叠加"得到 $f(x)$ 的图像 (图中的粗黑折线). 这时为解不等式 $f(x) \leqslant 12$ 只要求出 $f(x)$ 的图像与 $y=12$ (图中为水平虚线) 的两个交点的横坐标即可.

由作图过程可推知在这两个点的附近 $f(x)$ 分别为 $-2x$ 和 $2x$, 可见两个交点的横坐标分别为 -6 和 6. 因此不等式的解为 $-6 \leqslant x \leqslant 6$. □

习题 29 解不等式 $|x(1-x)| < 0.05$.

解 在附图的分图 (a) 中作出了 $y = |x(1-x)|$ 的图像, 它落在阴影区内的所有点的 x 坐标就是本题的解. 可见在 $x=0$ 和 $x=1$ 附近分别有满足不等式的两个区间.



习题 29 的附图

本题的含有绝对值号的不等式相当于不含绝对值号的以下两个不等式:

$$-0.05 < x(1-x) < 0.05.$$

于是如分图 (b) 所示, 要求出抛物线 $y = x(1-x)$ 落在阴影区内的点的所有 x 坐标.

从左边的不等式, 即 $x^2 - x - 0.05 < 0$ 解出

$$0.5 - \sqrt{0.3} < x < 0.5 + \sqrt{0.3}.$$

从右边的不等式, 即 $x^2 - x + 0.05 > 0$, 可见对于满足上述条件的 x 还要求:

$$x > 0.5 + \sqrt{0.2} \text{ 或 } x < 0.5 - \sqrt{0.2}.$$

合并以上, 就知道答案是两个开区间的并 (参见附图):

$$(0.5 - \sqrt{0.3}, 0.5 - \sqrt{0.2}) \cup (0.5 + \sqrt{0.2}, 0.5 + \sqrt{0.3}).$$

其近似值为 $(-0.048, 0.053) \cup (0.947, 1.048)$. □

习题 30 证明恒等式 $\left(\dfrac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2$.

解 这是这一部分的最后一题. 它是一个恒等式. 可以看出, 不论 x 的符号如何, 左边总有一项是 0, 而另一项就等于右边的 x^2. □

1.1.5 绝对误差和相对误差 (习题 31–40)

设 a $(a \neq 0)$ 是被测量的精确值, 而 x 是这个量的近似值, 那么 $\Delta = |x-a|$ 称为绝对误差, 而 $\delta = \dfrac{\Delta}{|a|}$ 称为相对误差. 当然一般不可能知道误差的准确值, 平时所说的都是对它们的最大可能范围的估计, 即绝对误差限和相对误差限.

如果数 x 的绝对误差不超过第 n 个有效数字那位数的 1 的一半, 那么说数 x 精确到 n 位数字. 例如在三角函数的四位数学用表中, 所列出的都是精确数字. 这表明它是经过四舍五入处理的, 其误差不超过 0.5×10^{-4}, 即其末位数的半个单位.

下面只给出习题 38 的解答. 今后会知道它与微分在近似计算中的应用有密切联系.

习题 38 当度量正方形边长 x (其中 $2\ \mathrm{m} < x < 3\ \mathrm{m}$) 的绝对值误差为何值时, 正方形的面积可以精确到 $0.001\ \mathrm{m}^2$?

解 从面积 $S = x^2$ 知道当 x 变为 $x + \Delta x$ 时, 就有 $S + \Delta S = (x + \Delta x)^2$, 因此由于测量误差 Δx 引起的面积误差为

$$\Delta S = 2x\Delta x + \Delta x^2. \tag{1.15}$$

其中右边最后一项 Δx^2 是 $(\Delta x)^2$ 的习惯记法.

从要求 $-0.001 < \Delta S < 0.001$ 求解关于 Δx 的两个二次三项不等式, 整理后得到

$$-\frac{0.001}{x + \sqrt{x^2 - 0.001}} < \Delta x < \frac{0.001}{x + \sqrt{x^2 + 0.001}},$$

其中 $2 < x < 3$ ①.

取 $x = 3$, 就得到对于 $x \in (2, 3)$ 同时适用的估计:

$$-1.666\,713 \times 10^{-4} < \Delta x < 1.666\,620 \times 10^{-4},$$

可见 $|\Delta x| < 0.000\,17$, 即 $0.17\,\mathrm{mm}$.

回到 (1.15), 由于 Δx 为小量, 因此可以弃去右边的平方项 Δx^2 后来求解. 这时就非常简单地有

$$|\Delta x| = \frac{|\Delta S|}{2x} \leqslant \frac{0.001}{6} \approx 0.000\,1\dot{6} < 0.000\,17,$$

所得结果与上面“精确解法”相同.

这表明对于 (1.15) 作线性化处理后的误差估计要容易得多. 初学者在学了微分学后就会明白, 这两种方法就是分别用增量和微分来估计误差. □

1.1.6 补注 (习题 5, 14)

这个补注包含以下内容, 并在最后有一个评述.

1. 解答习题 5, 其中出现数学分析中不常见的符号, 对初学者有点难;
2. 对数学归纳法作一点补充, 并对于前面的若干习题提出新的解法以供比较;
3. 前 n 个正整数的幂和公式的推导与伯努利数;
4. 证明本书今后经常使用的重要工具——平均值不等式;
5. 解答习题 14, 它与希尔伯特第七问题有关.

---

① 由于 ΔS 是 Δx 的二次式, 因此求解 $|\Delta S| < 0.001$ 与前面的习题 29 是类似的. 然而由于 $|\Delta x|$ 相对于 x 是小量, 因此最后只需取在原点附近的一个开区间.

1. 习题 5

下面给出习题 5 的主要部分的解答.

习题 5 设 $a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]\ (n=1,2,\cdots)$ 及 $a^{[0]}=1$, 证明

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{[n-k]}b^{[k]}.$$

解 $n=1$ 时有

$$(a+b)^{[1]}=a+b,\quad \sum_{k=0}^{1}\mathrm{C}_1^k a^{[1-k]}b^{[k]}=a^{[1]}b^{[0]}+a^{[0]}b^{[1]}=a+b,$$

因此成立.

现设 n 时结论已经成立, 于是对于 $n+1$ 的情况, 一方面有

$$\begin{aligned}(a+b)^{[n+1]}&=(a+b)^{[n]}\cdot(a+b-nh)\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{[n-k]}b^{[k]}\right)\cdot(a+b-nh),\end{aligned}$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^k a^{[n+1-k]}b^{[k]}&=\mathrm{C}_{n+1}^0\, a^{[n+1]}+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{n+1}^k a^{[n+1-k]}b^{[k]}+\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}\, b^{[n+1]}\\&=\mathrm{C}_n^0 a^{[n+1]}+\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{C}_n^k+\mathrm{C}_n^{k-1})a^{[n+1-k]}b^{[k]}+\mathrm{C}_n^n\, b^{[n+1]}\\&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{[n+1-k]}b^{[k]}+\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{C}_n^{k-1}a^{[n+1-k]}b^{[k]}\\&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(a^{[n+1-k]}b^{[k]}+a^{[n-k]}b^{[k+1]})\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{[n-k]}b^{[k]}\right)\cdot[(a-(n-k)h)+(b-kh)]\\&=\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{[n-k]}b^{[k]}\right)\cdot(a+b-nh),\end{aligned}$$

可见两边相等. □

注 读者可以将上述证明与前面关于二项式定理的证明作比较, 可见本质上没有多少区别. 但若要从左边推出右边, 则需要引入分解

$$a+b-nh=(a-(n-k)h)+(b-kh),$$

不如上述处理较为方便, 即从两边出发证明它们都与第三个表达式相等.

2. 关于数学归纳法的补充

关于数学归纳法的基本知识可以参看两本优秀的科普读物: [10] 和 [19].

一般来说, 一道题的证明方法可能是很多的, 而且很难看出"它是如何想出来的". 从思路来说, 数学归纳法有其简单之处. 这就是在大多数情况下, 其第一步是统一的, 然后问题转化为寻找所求证命题在 $n=k$ 与 $n=k+1$ 之间的联系.

具体来说, 假设要证明的是不等式 (对于等式情况也有类似的结论)

$$f(n)>g(n),$$

则在 $f(1)>g(1)$ 成立并假设$f(k)>g(k)$ 成立时, 我们只需要证明 $f(k+1)-f(k)>g(k+1)-g(k)$ 成立就可以完成数学归纳法的第二步证明了. 若上述不等式两边都大于 0, 则也可以将求证的不等式换为 $\dfrac{f(k+1)}{f(k)}>\dfrac{g(k+1)}{g(k)}$. 读者不妨试用这样的方法重新观察前面的习题.

当然接下来如何做则可以有千变万化的不同, 但至少"开局"是相同的.

为了与数学归纳法的思路作比较, 下面对前面用数学归纳法已经证明过的几个题给出其他证法.

习题 9(b) 证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

解 2　利用不等式

$$\frac{\sqrt{(2k-1)(2k+1)}}{2k}<1,$$

令 $k=1,2,\cdots,n$, 并将所得的不等式边边相乘得到

$$\frac{\sqrt{1\cdot3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot5}}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{2n+1}<1,$$

整理后即得. □

解 3　记 $x_n=\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}$. 利用 $\dfrac{2k-1}{2k}<\dfrac{2k}{2k+1}$, $k=1,2,\cdots,n$, 就有

$$x_n^2<x_n\cdot\frac{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2n+1},$$

两边开平方即得. □

习题 10(a) 证明不等式

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}\ \ (n\geqslant2).$$

解 2　利用一种裂项消去法. 从

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{2\sqrt{k}}>\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

出发, 令其中的 $k=1,2,\cdots,n$, 将所得的不等式边边相加得到

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1),$$

于是只要能够证明 $2(\sqrt{n+1}-1)>\sqrt{n}$ 在 $n\geqslant2$ 时成立即可. 对于 $n=2$ 可以通过直接计算验证它成立. 对于 $n\geqslant3$ 则可以从

$$2(\sqrt{n+1}-1)=\sqrt{n+1}+(\sqrt{n+1}-2)\geqslant\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$$

得到. □

习题 10 (b) 证明不等式

$$n^{n+1}>(n+1)^n \ \ (n\geqslant 3).$$

解 2 对于已经学过数列极限的读者, 很容易想到如下的解法: 即首先将不等式改写为等价的 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<n$, 然后利用已知数列 $\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\}$ 是单调递增数列, 且收敛于 $\mathrm{e}\approx 2.71828<3$, 可见当 $n\geqslant 3$ 时不等式成立. (有关内容见后面的习题 69.) □

习题 10 (d) 证明不等式

$$(2n)!<2^{2n}(n!)^2.$$

解 2 将左边作如下分解即可证出所要的不等式①

$$(2n)!=(2n)!!(2n-1)!!<[(2n)!!]^2=2^{2n}(n!)^2. \quad \Box$$

3. 前 n 个正整数的幂和的公式推导与伯努利数

如前所说, 数学归纳法是数学证明的一种方法, 至于要证明的结论从何而来则完全是另一回事. 下面介绍的一种方法可以导出习题 1–3 中的恒等式和幂次更高的类似恒等式. 此外我们还在此顺便介绍该幂和的一般性公式.

习题 1 的恒等式是

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

求出这个等式的一个简单方法是先写出从 1 到 n 的一行数, 然后在这一行下面写出从 n 到 1 的第二行数, 如下图所示:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

然后从左到右将两行处于对应位置的上下两个数相加, 每次都得到 $n+1$, 一共得到 n 个 $n+1$. 因此两行的所有数之和就是 $n(n+1)$. 将它除以 2 就是每一行的 n 数之和.

然而这个方法很难用于求前 n 个正整数的平方和、立方和等等. 因此我们介绍以下具有一般性意义的方法.

利用 $(k+1)^2-k^2=2k+1$, 取 k 从 1 到 n 相加, 即有

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^2-k^2]=\sum_{k=1}^{n}(2k+1),$$

其左边是 $(n+1)^2-1=n^2+2n$, 右边是 $2\sum\limits_{k=1}^{n}k+n$, 整理后就得到 $\sum\limits_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

① 其中所用的双阶乘记号 $n!!$ 表示不超过 n 且与 n 的奇偶性相同的所有正整数的乘积, 例如 $7!!=7\cdot5\cdot3\cdot1$, $8!!=8\cdot6\cdot4\cdot2$, $8!=(8!!)\cdot(7!!)$.

再利用 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$, 取 k 从 1 到 n 相加, 得到

$$\sum_{k=1}^{n}[(k+1)^3-k^3]=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+3k+1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{3n(n+1)}{2}+n,$$

而其左边是 $(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$, 整理后就得到 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

继续做下去就可以得到

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

初学者可以用上述方法推导出这个公式, 并用数学归纳法对它作出严格证明.

不难看到, 这种方法要用于求幂次很高的前 n 个正整数的幂和还是不方便的. 那么, 有没有更一般的方法? 或者要求更高一点, 是否存在前 n 个正整数的幂次为正整数 c 的幂和的一般公式?

这个问题早已为微积分的先驱之一的雅各布·伯努利所解决. 他得到的公式是

$$1^c+2^c+\cdots+n^c=\frac{n^{c+1}}{c+1}+\frac{n^c}{2}+\mathrm{C}_c^1B_2\frac{n^{c-1}}{2}+\mathrm{C}_c^3B_4\frac{n^{c-3}}{4}+\cdots,$$

n 的指数相继减 2 直到 n 或 n^2, 其中 $B_2=\dfrac{1}{6}$, $B_4=-\dfrac{1}{30},\cdots$, 即是伯努利数. 在 [14] 中可以看到伯努利的论文的中译文. 伯努利数的简明介绍可以看 [23] 的 §7.2.3. 在本书的 §2.9.3 的习题 1373.2 和 §2.10.1 的习题 1386 中还会遇见伯努利数.

4. 平均值不等式及其证明

这里介绍三种最常用的平均值以及在它们之间的不等式关系. 它们是本书中的常用工具. 需要特别注意不等式成立等号的充要条件, 它在今后很有用.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是非负数列, 则分别称

$$A=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\quad 和\quad G=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$$

为上述数列的算术平均值和几何平均值. 又若该数列的每一项大于 0, 则称

$$H=\left(\frac{x_1^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}=\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}$$

为上述数列的调和平均值①.

$n=2$ 时成立 $G\leqslant A$ 是中学数学的一个基本不等式. 《习题集》的 §2.7 的习题 1295 就是关于正数的不等式 $G\leqslant A$.

① 调和平均值的一个例子: 设某人用速度 v_1 走完一公里, 然后又用速度 v_2 再走完一公里, 则他走完这两公里所用的平均速度就是 v_1 和 v_2 的调和平均值. 又常称数列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 为调和数列, 其中从第二项起的每一项都是前后两项的调和平均值.

命题 1.1 (平均值不等式) (1) 对非负数列 $x_1,\cdots,x_n$ 恒成立不等式 $G\leqslant A$, 当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时成立等号; (2) 对正数列 $x_1,\cdots,x_n$ 恒成立不等式 $H\leqslant G\leqslant A$, 当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时成立等号.

容易看出对正数列来说, 从 $G\leqslant A$ 即可推出 $H\leqslant G$. 为此只要写出

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}}=\sqrt[n]{x_1^{-1}\cdot\cdots\cdot x_n^{-1}}\leqslant\frac{1}{n}(x_1^{-1}+\cdots+x_n^{-1}),$$

再将两边取倒数即可.

关于不等式 $G\leqslant A$ 的证明, 据最新专著 [1] 的 (不完全) 统计, 到 2002 年已经有了 74 种证明, 其中有用数学归纳法的多种证明. 下面我们介绍其中之一, 它用到了数学归纳法的一种变型——向前向后数学归纳法. 这在某些问题中是很有用的.

$G\leqslant A$ 的向前向后数学归纳法证明

$n=2$ 时不等式相当于 $(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2\geqslant 0$, 因此成立. 现在假设 $G\leqslant A$ 对 n 已经成立, 则对于 $2n$ 的情况就有

$$\begin{aligned}\sqrt[2n]{x_1\cdots x_{2n}}&=\sqrt[n]{\sqrt{x_1x_2}\cdots\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}}}\leqslant\frac{1}{n}(\sqrt{x_1x_2}+\cdots+\sqrt{x_{2n-1}x_{2n}})\\&\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\cdots+\frac{1}{2}(x_{2n-1}+x_{2n})\right)=\frac{1}{2n}(x_1+\cdots+x_{2n}).\end{aligned}$$

于是我们看到对于 $n=2,4,\cdots,2^k,\cdots$, 即所有 2 的幂来说, 不等式 $G\leqslant A$ 已经成立. 这就是"向前"部分的证明.

下面将要在 $G\leqslant A$ 对 n 成立的前提下证明它对 $n-1$ 也成立. 这就是"向后"部分. 容易理解, 它与"向前"部分合并就完成了数学归纳法的证明.

为此我们比较 n 时的不等式

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

和 $n-1$ 时的不等式

$$\sqrt[n-1]{x_1\cdots x_{n-1}}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1},$$

并考虑是否可以适当选取 $x_n=t$, 使得上述两式的左边相等①, 即有

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}t}=\sqrt[n-1]{x_1\cdots x_{n-1}}.$$

由此可解出应当取 t 为 $x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的几何平均值. 将它记为 $\overline{x}$, 即取

$$t=\overline{x}=\sqrt[n-1]{x_1\cdots x_{n-1}},$$

则就可以应用归纳假设作出如下推导:

$$\overline{x}=\sqrt[n]{x_1,\cdots,x_{n-1}\overline{x}}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_{n-1}+\overline{x}),$$

然后移项整理得到 $\overline{x}\leqslant\dfrac{1}{n-1}(x_1+\cdots+x_{n-1})$.

关于等号成立的条件的证明可以从上述向前向后步骤看出, 请读者补足. □

注 用于证明 $G\leqslant A$ 的数学归纳法有多种不同的做法, 但都不是平凡的. 为此只要考虑如何能够从 $n=2$ 推出 $n=3$ 的 $G\leqslant A$, 就会发现这不是显然的. 按照上述向前向后方法可写出如下:

① 如要求两式的右边相等则就得到另一个证明.

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3}=\sqrt[4]{x_1x_2x_3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}}\leqslant\frac{1}{2}(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}})$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_3+\sqrt[3]{x_1x_2x_3})\right),$$

然后移项整理即可.

中学数学有一道因式分解题

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

用它可以解决 $n=3$ 时的 $G\leqslant A$, 但难以推广.

5. 习题 14 及其他

习题 14 构造确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

分析 这里的第一个问题是: 数 $2^{\sqrt{2}}$ 是有理数还是无理数?

由于在戴德金分割方法中, 定义无理数和定义有理数的分割是不一样的, 因此本题的解答不可能避开这个问题.

回顾 1900 年希尔伯特在国际数学家大会上提出的 23 个数学问题中的第七个问题, 即当 α 为代数数 $(\alpha\neq 0,1)$, β 为无理数的代数数时, α^{β} 是否一定是超越数或至少是无理数①. 希尔伯特还特地举出两个具体的数, 在当时都不知道它们到底是有理数还是无理数. 第一个就是本题的 $2^{\sqrt{2}}$, 另一个是 $\mathrm{e}^{\pi}=(-1)^{-\mathrm{i}}$. 我们知道, 这个第七问题在 1934–1935 年已经得到肯定性的解决, 因此 $2^{\sqrt{2}}$ 是无理数. 《习题集》的出版是在那以后, 但显然不能要求读者在做本题时都知道这个著名结果.

第二个问题是: 实数 $2^{\sqrt{2}}$ 是如何定义的?

参考 [6] 的绪论可以知道, 首先要定义形式为 $2^{\frac{p}{q}}$ 的数, 其中 p,q 为整数, 然后对于满足 $\dfrac{p}{q}<\sqrt{2}<\dfrac{p'}{q'}$ 的所有有理数 p/q 和 p'/q', 证明满足 $2^{\frac{p}{q}}<x<2^{\frac{p'}{q'}}$ 的实数 x 是唯一存在的, 就将它定义为实数 $2^{\sqrt{2}}$.

我们的问题是要构造有理数系 $\mathbb{Q}$ 中的一个戴德金分割 A/B, 使得 A 中的每一个有理数小于 $2^{\sqrt{2}}$, B 中的每一个有理数大于 $2^{\sqrt{2}}$. 由于将有理数与 $2^{\sqrt{2}}$ 直接比较它们的大小是困难的, 因此采用如下的间接方法.

设 A'/B' 是确定无理数 $\sqrt{2}$ 的有理数系的分割. 然后对于正有理数 $p/q\in A'$, 其中 p,q 都是正整数, 就有 $2^{\frac{p}{q}}<2^{\sqrt{2}}$. 对于正有理数 a 来说, 不等式 $a<2^{\frac{p}{q}}$ 可以转换为等价的不等式 $a^q<2^p$, 而后者是可以在有理数系中判定的不等式. 如果成立, 就可以断定 $a\in A$. 类似地可以给出判定正有理数 $b\in B$ 的方法. □

解 设 A'/B' 是确定 $\sqrt{2}$ 的有理数系中的一个分割. 定义如下的两个有理数集:

---

① 有理系数的代数方程的根称为代数数, 不是代数数就称为超越数. 2 和 $\sqrt{2}$ 都是代数数. 已经证明 π 和 e 都是超越数.

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leqslant 0 \text{ 或存在 } \frac{p}{q} \in A',\ p, q \text{ 都是正整数, 使得 } a^q < 2^p\},$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0,\ \text{存在 } \frac{p'}{q'} \in B',\ p', q' \text{ 都是正整数, 使得 } b^{q'} > 2^{p'}\},$$

则当 $a \in A$ 和 $b \in B$ 时, 由于从 A, B 的定义可知有 $a < 2^{\frac{p}{q}}$ 和 $2^{\frac{p'}{q'}} < b$, 而从分割 A'/B' 知道有 $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$, 因此 $a < b$.

如果我们再能够证明 $A \cup B = \mathbb{Q}$, 则 A/B 就是有理数系中的一个戴德金分割. 根据 [6] 中关于 $2^{\sqrt{2}}$ 的定义方法, 可见 A/B 就是确定它的有理数系的分割.

用反证法.

设存在一个有理数 x, 它既不属于 A, 也不属于 B, 于是对于任何 $\frac{p}{q} \in A'$ 和 $\frac{p'}{q'} \in B'$, 就有

$$2^{\frac{p}{q}} < x < 2^{\frac{p'}{q'}}.$$

由于 A' 中没有最大数, B' 中没有最小数, 因此上述两个不等号都只能是严格的 $<$ 号.

于是如分析中所说, 这个有理数 x 只能是数 $2^{\sqrt{2}}$ 本身. 根据希尔伯特第七问题的答案, 这样的有理数 x 是不可能存在的. 于是就证明了上述 A/B 确实是定义 $2^{\sqrt{2}}$ 的戴德金分割.

若不考虑希尔伯特第七问题的结论, 则可以解答如下.

情况一. 如果 $2^{\sqrt{2}}$ 不是有理数, 则上面的推理已经证明了 A/B 就是确定它的分割.

情况二. 如果 $2^{\sqrt{2}}$ 是有理数, 则将它加入 A 或 B 之后, 也就得到确定这个有理数的两个可能的分割. □

最后对于本节的部分内容再作以下评述.

本节的部分习题是与实数系有关的. 如前所说, 其中与分割有关的习题要与戴德金分割方法的学习配合起来做. 如习题 13 中的 (a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$ 和 (b) $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ 都应该用戴德金分割方法予以证明. 若将它们看作中学数学的练习题, 显然违背了题意.

本节中在今后将起重要作用的是确界存在定理 (习题 15), 它也需要用戴德金分割方法来证明. 由于数学分析中用到的主要是实数的连续性, 而不是实数的构造方法, 因此对于没有学过戴德金方法的读者来说, 重要的是学习今后如何用这个定理. 在这一节中首先是学会确界的定义及其性质.

在很多数学分析教材中对于实数系有详细的介绍. 除了前面所说的 [6] 的绪论外, 在西方教材中可以参考 [20, 18] 等. 前者用了 5 章来介绍实数系. 在国内教材中我们推荐 [24]. 关于实数系基本定理可以参考 [23] 的第三章.

关于含有绝对值的不等式和有关误差概念的练习题都是为今后学习所作的准备工作, 它们也是学习计算数学的预备知识. 需要了解更多内容的读者可以参考这方面的书 (例如 [15] 等).

§1.2 数列理论 (习题 41–150)

内容简介　这一节是极限理论的基础, 也是第一章中难度较大的部分, 因此在下面要讲解较多的习题. 实际上其中相当多的习题或者是重要的定理, 或者对今后的学习在思想方法上具有重要的意义, 它们的证明或计算方法也极其多样化, 这些都是读者需要重视的地方.

本节除了按照内容分成若干小节之外, 在最后的补注小节中提出关于极限代入法的命题, 解答部分较难的习题, 并对上下极限作补充.

1.2.1 极限的定义与计算 (习题 41–57)

习题 41 设 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. 即对每一个 $\varepsilon > 0$, 求出数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - 1| < \varepsilon$. 填写下表 (以下的空表从略).

解　对给定的任意 $\varepsilon > 0$, 欲使 $|x_n - 1| < \varepsilon$, 由 $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ 解出 $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, 故可取 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon} - 1]$ ($[x]$ 表示 x 的整数部分), 则当 $n > N$ 时, 就有 $|x_n - 1| < \varepsilon$. 然后即可填表如下:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	$\cdots$
N	9	99	999	9999	$\cdots$

□

注　由于数列极限是初学者面前的第一道坎, 而这个题虽然简单, 但恰恰可以用来解释数列极限定义中的几个不容易理解的难点, 因此作如下注解.

(1) ε 给定在先, N 确定在后; ε 不依赖于 N, N 是根据 ε 而定的, 依赖于 ε, 因此常记为 $N(\varepsilon)$. 容易理解, 对一切正数 ε 同时适用的 N 一般是不存在的, 除非该数列是常值数列, 即每项相同的数列.

(2) 在极限的定义中, ε 既是给定, 又是任意, 这如何理解? 从本题可见, 只有给定 ε 之后, 才能确定满足要求的 N. 换言之, 在求 N 时, ε 已经给定. 同时 ε 又必须能够取到任意小的正数, 否则不能说明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ①.

(3) 给定 ε 之后, 满足要求的 N 如果存在的话, 一定不是唯一的. 例如在上面的表格中, 当 $n > 9$ 时有 $|x_n - 1| < 0.1$, 于是比 9 大的任何一个正整数都可以用作为 N. 在极限定义中只要求存在满足要求的 N 即可, 没有说 N 必须是合乎要求中的最小数, 因此本题的上述解答中的 N 的公式以及表格中填入的 N 的具体数字都不是唯一确定的. 这也就允许我们将不等式通过适当放大的方法以便于找到合乎要求的 N.

(4) 按照公式 $N = [\dfrac{1}{\varepsilon} - 1]$, 若取较大的 ε, 则 N 可能不是正整数. 因此更为确切的公式应当是 $N = \max\{1, [\dfrac{1}{\varepsilon} - 1]\}$. 为了避免对这种情况的讨论, 不妨认为开始所给定的 ε 较小即可, 因为对较小的 ε 适用的 N, 对较大的 ε 也适用.

① 今后经常只说“对给定的 $\varepsilon > 0$”或“对 $\varepsilon > 0$”, 对此应当理解为对 ε 除了大于 0 之外没有其他限制, 因此也就是“对每一个 $\varepsilon > 0$”, “对任何 $\varepsilon > 0$”.

(5) 极限概念是与变量的变化联系在一起的. 数列就是以正整数为自变量的一元函数. 然而在极限的定义中却用几个不等式将这种变化掩盖掉了. 初学者需要通过这几道习题以及后面的学习来反复体会极限的真正意义.

习题 44 中的数列 $x_n = n^{(-1)^n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是无界数列, 但不是无穷大量. 若将该数列进一步写出为

$$x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, & n = 2k, k = 1, 2, \cdots, \\ \dfrac{1}{2k-1}, & n = 2k-1, k = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

这样就容易看清楚了.

习题 45 是要求对于无穷大量 $\infty, -\infty, +\infty$ 写出它们的定义, 这些都是初学者必须要做的题.

习题 46–57 是一批比较基本的极限计算题, 其中需要用几种不同的方法.

先看下面几道题.

习题 47 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

解 本题属于 $\infty - \infty$ 型的不定式, 这种题目常用"有理化分子"的方法解之:

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right| < \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0,$$

可见极限为 0. □

习题 48 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$.

解 看出分母是无穷大量, 分子是无穷大量 $\sqrt[3]{n^2}$ 乘有界量 $\sin n!$, 就可如下求解:

$$\left|\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}\right| < \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0,$$

可见极限为 0. □

习题 49 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

解 本题属于 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式, 这种题目常将分子分母中最高阶的无穷大量提出后加以比较即可:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot [(-\frac{2}{3})^n + 1]}{3^{n+1} \cdot [(-\frac{2}{3})^{n+1} + 1]} = \frac{1}{3}. \quad \square$$

习题 50–54 和 57 中的极限计算在于求出数列和的一个比较简单的表达式, 然后再求极限. 下面只讲其中的一题.

习题 52 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n}\right]$.

解 将取绝对值之前的数列记为 $x_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{n}$. 该和式各项的分母相同, 将分子直接相加较便捷. 注意 $(1-2)+(3-4)+\cdots+((2k-1)-2k) = -k$, 就可以分别求出下标为偶数和奇数时的表达式为:

$$x_{2k} = \frac{1}{2k} \cdot [(1-2)+(3-4)+\cdots+((2k-1)-2k)] = -\frac{1}{2},$$
$$x_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \cdot [-(k-1)+(2k-1)] = \frac{k}{2k-1} \to \frac{1}{2} \ (k \to \infty),$$

故 $\{|x_n|\}$ 的极限为 $\frac{1}{2}$. □

下面两题中求数列和的方法略有技巧.

习题 55 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解 这里的求和要难一点. 注意到 $\frac{2k-1}{2^k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的分子是等差数列, 而分母是等比数列, 可以用下面的方法解决. 写出

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$
$$\frac{1}{2}x_n = \qquad \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

两式相减并乘以 2 得到

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

对上式右边的最后一项用习题 58 或 60 的结论 (见下一小节), 就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$. □

习题 56 $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right]$.

解 本题可以用裂项消去法求解如下:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty). \quad □$$

练习 有不少例子可以用裂项消去法求和. 读者可以计算以下两个和式来学习这种求和法:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$$
$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx \ (x \neq 2k\pi).$$

(提示: 对第二题可以先将和式乘以 $2\sin\frac{x}{2}$, 然后对每一项用三角函数的积化和差公式.)

1.2.2 几个极限证明题 (习题 58–68)

这里的极限证明题也都是数列极限中的基本内容, 特别是前几个题提供了几种不同的无穷大量之间的比较, 其结论很有用. 解答这些题现在所用方法大致如下: 对不同类的无穷大量通过运算、放缩、运用公式与已知结论等方法将这两个无穷大量化为同类或类型接近后加以比较.

以习题 60 为例来介绍方法. 若在该题中取 $k=1, a=2$, 就是习题 58; 又若在 $k=1$ 时记 $\frac{1}{a}=q$, 并将关于 a 的条件改为 $|a|>1$, 则就是习题 62.

习题 60 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1)$.

(对给定的任意 k 可改取正整数 $\max\{1,[k]+1\}$, 因此以下设题中的 k 已为正整数.)

解 1 (用二项式定理) 这里的分子是 n 的幂函数, 分母是 n 的指数函数, 关键条件是 $a>1$. 记 $a=1+\delta$, 其中 $\delta>0$. 利用二项式定理就可以将 n 转移到底数上去, 且使其指数大于分子的幂函数的指数 k. 具体推导如下.

当 $n>k$ 时有

$$\begin{aligned}a^n &= (1+\delta)^n\\ &= 1+n\delta+\frac{n(n-1)}{2!}\delta^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\delta^{k+1}+\cdots+\delta^n\\ &> \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}\delta^{k+1},\end{aligned}$$

于是就有

$$\begin{aligned}0<\frac{n^k}{a^n} &< \frac{n^k(k+1)!}{n^{k+1}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})\delta^{k+1}}\\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{(k+1)!}{(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k}{n})\delta^{k+1}}\to 0\ \ (n\to\infty),\end{aligned}$$

根据夹逼定理原题证毕. □

解 2 (利用单调性分析) 记 $x_n=\frac{n^k}{a^n}$, 就可以对后项与前项之比作出以下分析:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\frac{1}{a}\to\frac{1}{a}<1\quad(n\to\infty).$$

利用数列极限的比较定理, 对某个 $q\in(1/a,1)$ 取定 N_0, 使得当 $n>N_0$ 时恒有 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<q$ 成立, 于是对于 $n>N_0$ 就有下列估计而完成证明:

$$x_n=x_{N_0+1}\cdot\frac{x_{N_0+2}}{x_{N_0+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}\leqslant x_{N_0+1}q^{n-N_0-1}\to 0\ \ (n\to\infty).\quad\square$$

解 3 (利用单调有界数列的收敛定理) 如解 2 开始所示, 数列的后项与前项之比的极限小于 1, 这表明正数列 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时严格单调递减, 因此存在极限, 记为 $A\geqslant 0$.

若 $A>0$, 则在 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^k\frac{1}{a}$ 中令 $n\to\infty$ 就得到 $\frac{A}{A}=1\cdot\frac{1}{a}$, 这与 $a>1$ 矛盾. 因此只能是 $A=0$. □

下面的习题 61 也是一个基本极限, 它的证明可以用以上的类似方法解决, 请读者写出几个解.

习题 61 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

习题 65 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

解 1 (用二项式定理) 下面证明 $\delta_n=\sqrt[n]{n}-1\to 0\ (n\to\infty)$. 从二项式定理可知当 $n\geqslant 2$ 时有

$$n=(1+\delta_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2,$$

即有 $0<\delta_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. □

解 2 (用平均值不等式) 当 $n\geqslant 2$ 时将 $\sqrt[n]{n}$ 看成为两个 $\sqrt{n}$ 与 $n-2$ 个 1 的几何平均值, 则就有

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=(\sqrt{n}\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdots1}_{n-2\text{ 个 }1})^{\frac{1}{n}}<\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}},$$

用夹逼定理可见结论成立. □

解 3 (利用单调性分析) 考虑该数列的后项与前项之比:

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}},$$

利用习题 69–70 可以知道 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$, 因此从 $n=3$ 起数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 严格单调递减, 从而有极限. (从 $\sqrt[1]{1}=1<\sqrt[2]{2}=\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}=\sqrt[3]{3}$ 可见数列的前三项是单调递增的.)

记 $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$, 则从 $\sqrt[n]{n}\geqslant 1$ 有 $A\geqslant 1$. 若 $A>1$, 则从 $n>3$ 起有 $\sqrt[n]{n}>A>1$, 即 $n>A^n$, 这与习题 60 的结论矛盾. 因此只能是 $A=1$. □

注 由本题的结论即可推出习题 63, 即证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$. 当然读者可以使用以上各种方法或其他方法对该题给出独立的证明.

在无穷大量中, 若 $a_n\to\infty, b_n\to\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$, 则称 b_n 是比 a_n 高阶的无穷大量, 并记为 $a_n\ll b_n$ 或 $b_n\gg a_n$.

从本小节的习题可以知道有以下重要结论, 它们都是分析中的基本知识 (其中 $a>1$, $k>0$):

$$\log_a n\ll n^k\ll a^n\ll n!.$$

下面从习题 66 的许多解法中选了 3 个, 只写出其思路, 然后对本小节作一点评论.

习题 66 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

解 1 (思路) 按照极限定义只要对给定的 ε 求 N, 使得当 $n>N$ 时成立不等式

$$\left|\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}-0\right|<\varepsilon.$$

将它改写为等价的不等式 $\dfrac{1}{n!}<\varepsilon^n$ 之后, 如果能够联想到习题 61, 同时将上述不等式再改写为

$$\frac{(1/\varepsilon)^n}{n!}<1,$$

则满足上述要求的 N 的存在性已经没有问题了. □

解 2 (思路) 模仿习题 65 的解 3, 容易证明本题的正数列严格单调递减, 因此它的极限 (记为) $A \geqslant 0$. 只要证明 $A > 0$ 不可能就行了: 因为这时对所有正整数 n 有不等式

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > A > 0 \Longleftrightarrow \frac{(1/A)^n}{n!} > 1,$$

因此只要用习题 61 (即证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$) 就导出矛盾. □

解 3 (思路) 这需要本节后面的知识. 取 (自然) 对数后可见本题等价于证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n} = +\infty,$$

于是用习题 139 (即柯西命题) 就足够了. □

评论 虽然数学不是一门需要背诵的科学, 但还是有许多东西需要通过做习题来记住的. 这与我们从小学习乘法时, 不能不记住 (以及如何记住) 九九表是一样的道理. 在数学分析中需要记住的东西不少, 习题 60–65 就是如此. 还有就是一些基本的方法也是不可缺少的 (或者说更为重要). 读者可以根据自己的经验和体会来考虑这个问题.

从习题 65–66 的几种解法还可以看出, 巧妙或简单的方法未必具有普遍性, 反之, 带有普遍性的方法虽然很有用, 但对一个个具体问题来说, 未必是巧妙或简单的. 我们永远不能说某个习题的某种解法就一定是最好的方法. 这两个习题中的这些情况在下面的许多习题中都会遇到.

1.2.3 与数 e 有关的习题 (习题 69–75(a), 146–147)

数 $\mathrm{e} \approx 2.718\,281\,828\,459$ 是自然对数的底. 它在高等数学中是一个重要性不亚于 π 的常数. 从以下习题可以看到, 随着数 e 的引进, 同时也提供了许多新的工具和方法. 这部分的习题要用到前面的不少题的结果, 我们将逐一予以介绍.

下面的第一个习题中的数列 $\{x_n\}$ 的极限通常就用作为数 e 的定义.

习题 69 证明: 数列 $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 单调递增且有上界, 而数列 $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 单调递减且有下界. 由此可得, 这两个数列有相同的极限

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}.$$

解 1 (用习题 7 的伯努利不等式) 当 $n \geqslant 2$ 时对数列 $\{x_n\}$ 的后项与前项之比可以估计如下:

$$\begin{aligned}\frac{x_n}{x_{n-1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \\ &= \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1,\end{aligned}$$

其中利用了习题 7 的伯努利不等式, 并从该题中等号成立的条件可知这时一定成立严格的不等号. 于是知道数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增.

对于 $\{y_n\}$ 类似地有

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}$$
$$< \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

可知 $\{y_n\}$ 严格单调递减. 又因对每一个 n 有 $x_n < y_n$, 因此任一确定的 y_n, 例如 $y_1 = 4$, 都是 $\{x_n\}$ 的上界. 同理, 任一确定的 x_n ,例如 $x_1 = 2$, 都是 $\{y_n\}$ 的下界, 故两个极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都存在. 最后由 $y_n = x_n(1+\frac{1}{n})$ 得知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 记其为 e, 即得所证. □

解 2 (用平均值不等式) 将 x_n"无中生有"地看成为不全相等的 $n+1$ 个非负数的乘积, 就可以从平均值不等式 $G < A$ 推出数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增:

$$x_n = 1 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{1+n\left(\frac{n+1}{n}\right)}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1}.$$

然后同样地将 y_n 看成为 $n+2$ 个不全相等的正数的乘积, 就可用平均值不等式 $G > H$ 推出数列 $\{y_n\}$ 严格单调递减:

$$y_n = 1 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{1+(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = y_{n+1}.$$

以下同解 1. □

注 为了定义数 e, 只需要用上述两个数列中的任何一个就够了. 这时不难分别证明两个数列有界. 例如用平均值不等式 $G < A$ 可以得到

$$x_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < \left(\frac{n\left(\frac{n+1}{n}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2} = 1,$$

可见 $\{x_n\}$ 以 4 为其上界. 再用平均值不等式 $G > H$ 可以得到

$$y_n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} > \left(\frac{n+2}{2+(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right)^{n+2} = 1,$$

可见 $\{y_n\}$ 有下界 2. 在习题 69 中同时讨论两个数列, 这样做的好处是为许多问题的讨论提供了更多的工具, 这在下面的许多习题中有用.

习题 70 证明 $0 < \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 当指数 n 为何值时表达式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 的差小于 0.001?

解 引用上题的记号和结论, 则就对每个正整数 n 有 $x_n < \mathrm{e} < y_n$, 因此有

$$0 < \mathrm{e} - x_n < y_n - x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}.$$

又取 $y_6 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^6 \approx 2.986 < 3$ 为数列 $\{x_n\}$ 的上界, 则就得到所要的不等式.

从所得的不等式即可知道当 $n > 3000$ 时 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 的差小于 0.001. □

习题 71 设 p_n $(n=1,2,\cdots)$ 是趋向于 $+\infty$ 的任意数列, 而 q_n $(n=1,2,\cdots)$ 是趋向于 $-\infty$ 的任意数列, $p_n, q_n \notin [-1,0]$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}.$$

解 条件 $p_n, q_n \notin [-1,0]$ 等价于 $1+\dfrac{1}{p_n}$ 和 $1+\dfrac{1}{q_n}$ 都大于 0.

(1) 不妨先对于每一个 p_n 都是正整数的情况作出证明, 然后推广到一般情况.

这时对 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时成立 $0<\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\varepsilon$. 又由于 $p_n\to+\infty$, 对上述 N, 存在 N_1, 使得当 $n>N_1$ 时成立 $p_n>N$.

综合以上, 由于 p_n 为正整数, 因此当 $n>N_1$ 时就有 $0<\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\mathrm{e}$.

对一般情况, 对 p_n 取整数部分得到 $[p_n]\leqslant p_n<[p_n]+1$. 于是有不等式

$$\left(1+\frac{1}{[p_n]+1}\right)^{[p_n]}\leqslant\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\leqslant\left(1+\frac{1}{[p_n]}\right)^{[p_n]+1}.$$

由于这时也有 $[p_n]\to+\infty$, 于是从上述夹逼关系和两边都趋于 e 就知道中间的数列也收敛于 e.

(2) 对于 $q_n\to-\infty$ 的情况可以将问题归结为 (1) 来解决. 这只要如下变换即可:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}&=\left(\frac{q_n}{1+q_n}\right)^{-q_n}=\left(1+\frac{1}{-q_n-1}\right)^{-q_n}\\&=\left(1+\frac{1}{-q_n-1}\right)^{-q_n-1}\cdot\left(\frac{q_n}{1+q_n}\right).\quad\square\end{aligned}$$

注 习题 71 是很强的结论, 它包含了许多特殊情况为其特例, 且可在今后的函数极限中通过归结原理过渡到更一般的结论.

习题 72 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e},$$

并由此推出公式

$$\mathrm{e}=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n},$$

式中 $0<\theta_n<1$, 再计算 e 的值 (精确到 10^{-5}).

解 记 $z_n=1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$. 从该式联想到将习题 69 中的第一个数列的通项 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 作二项式展开, 即有

$$\begin{aligned}x_n=1+1&+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

比较待求极限的数列 z_n 与已知极限为 e 的数列 x_n, 可见它们之间的差别在于后者的展开式中从第三项起每一项多乘了一些介于 0, 1 之间的因子. 由于其中有阶乘的倒数, 故两者相差不大, 有望 $z_n-x_n\to0$ $(n\to\infty)$.

为了估计 $z_n - x_n$, 注意到 x_n 中的 $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$ 等等可用习题 6 中的伯努利不等式分离出 1, 并得出较好的估计.

先用该不等式估计 z_n 与 x_n 的和式中的对应项 $(k \geqslant 2)$ 的差①:

$$\begin{aligned}0 &\leqslant \frac{1}{k!} - \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n}) \\ &\leqslant \frac{1}{k!}\Big(1-(1-\frac{(k-1)k}{2n})\Big) = \frac{1}{(k-2)!}\cdot\frac{1}{2n}.\end{aligned}$$

将上式对 k 从 2 到 n 求和 $(n \geqslant 3)$ 得到

$$\begin{aligned}0 \leqslant z_n - x_n &\leqslant \frac{1}{2n}\Big(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{2n}\Big(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-3}}\Big) < \frac{3}{2n} \to 0.\end{aligned}$$

从 $x_n \leqslant z_n < x_n + \frac{3}{2n}$ 出发, 用夹逼定理即可得到

$$\lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = \mathrm{e}.$$

下面估计用 z_n 近似 e 的误差. 不妨设 $m > n$, 得

$$\begin{aligned}0 < z_m - z_n &= \frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{m!} \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\Big(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-n-1}}\Big) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+1}.\end{aligned}$$

固定 n, 令 $m \to \infty$, 就得到

$$0 \leqslant \mathrm{e} - z_n \leqslant \frac{n+2}{n!(n+1)^2} < \frac{1}{n!n}.$$

注意 $\{z_n\}$ 严格单调递增趋于 e, 故上式左端的 $\leqslant$ 号中等号恒不成立, 即有

$$0 < \mathrm{e} - z_n < \frac{1}{n!n}. \tag{1.16}$$

由此可见存在 $\theta_n \in (0,1)$, 使得

$$\mathrm{e} = 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}.$$

最后按照误差 10^{-5} 的要求来计算 e 的近似值. 根据误差限不超过 $\frac{1}{n!n}$, 经尝试知道取 $n=8$ 时误差不超过 $\frac{3}{10^6}$. 然后如右面的附表所示将每一项计算到第 6 位小数, 并在其后用 ± 号标出四舍或五入的情况, 每一步所引起的误差不会超过 $0.5/10^6$.

与右边附表最后计算的结果 2.718 279 比较, 除了因为取 $n=8$ 而舍去的 (至多) $3\cdot 10^{-6}$ 之外, 还因两次"四舍"而产生 (至多) $1\cdot 10^{-6}$ 的误差, 因此数 e 可能比 2.718 279 大 (确实如此), 但不会超过 $4\cdot 10^{-6}$ 以上.

	2.000 000
$\frac{1}{2!}=$	0.500 000
$\frac{1}{3!}=$	0.166 667−
$\frac{1}{4!}=$	0.041 667−
$\frac{1}{5!}=$	0.008 333+
$\frac{1}{6!}=$	0.001 389−
$\frac{1}{7!}=$	0.000 198+
$\frac{1}{8!}=$	0.000 025−
	2.718 279

① 当 $k=2$ 时下面出现的 $(k-2)!$ 为 $0!$. 在数学中约定 $0!=1$.

同理因为四次“五入”而产生 (至多) $2\cdot 10^{-6}$ 的误差, 因此 e 也可能比 2.718 279 小, 但不会减少 $2\cdot 10^{-6}$ 以上. 这样就知道数 e 一定满足以下不等式:

$$2.718\,277 < \mathrm{e} < 2.718\,283.$$

可见取 $\mathrm{e}\approx 2.718\,28$ 就可保证误差小于 10^{-5}. □

注 对于具有无穷级数知识的读者来说, 习题 72 给出了数 e 的无穷级数表示 (或展开). 它与习题 69 一起是关于 e 的最重要的结果.

习题 73 证明 e 是无理数.

解 用反证法. 设 $\mathrm{e}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 是正整数.

由于 (1.16) 对每个正整数 n 都成立, 因此可以取 $n=q$ 得到不等式

$$0<\frac{p}{q}-\left(2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)<\frac{1}{q!q}.$$

乘以 $q!q$ 后左边为 0, 右边为 1, 而中间却是一个整数, 这是不可能的. □

习题 74 证明不等式 $\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n < n! < \mathrm{e}\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$.

解 1 (1) 对左边的不等式用数学归纳法. $n=1$ 时是平凡的. 设 $n=k$ 时该不等式成立, 则当 $n=k+1$ 时就有

$$\left(\frac{k+1}{\mathrm{e}}\right)^{k+1}=\left(\frac{k}{\mathrm{e}}\right)^k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\frac{k+1}{\mathrm{e}}<(k+1)!,$$

其中利用了 $\left(\dfrac{k}{\mathrm{e}}\right)^k<k!$ 的归纳假设和对每一个 k 有 $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<\mathrm{e}$.

(2) 对右边的不等式用数学归纳法. $n=1$ 是平凡的. 设 $n=k$ 时该不等式已经成立, 则当 $n=k+1$ 时就有

$$\mathrm{e}\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}=\mathrm{e}\left(\frac{k}{2}\right)^k\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\cdot\frac{k+1}{2}>(k+1)!,$$

其中利用了 $\mathrm{e}\left(\dfrac{k}{2}\right)^k>k!$ 的归纳假设和对每一个 k 有 $\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k>2$. □

解 2 (1) 利用习题 69 中的 $x_k=\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k<\mathrm{e}$, 取 $k=1,2,\cdots,n-1$ 并边边相乘, 就有

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}=\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^n}{n!}<\mathrm{e}^{n-1},$$

整理后得到比本题左边更强的不等式 $\mathrm{e}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n<n!$.

(2) 利用习题 69 中的 $y_k=\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}>\mathrm{e}$, 于是有

$$y_1y_2\cdots y_{n-1}=x_1x_2\cdots x_{n-1}\cdot\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}\right)=\frac{n^{n+1}}{n!}>\mathrm{e}^{n-1},$$

这样就得到

$$n!<\mathrm{e}\,n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n=\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^n\cdot n\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

这里的情况要复杂一点. 首先利用 $2 < \mathrm{e}$ 和习题 60 知道上式右边的第二个因子 $n\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \to 0$, 因此当 n 充分大时本题的右边不等式成立. 用数学归纳法可以证明当 $n \geqslant 6$ 时 $n\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n < 1$, 然后对于 $n = 1$ 到 5 作计算, 可知这时不等式也是成立的. □

习题 75 (a) 证明不等式 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 其中 n 是任意正整数.

解 引用习题 69 中的记号和结论, 由于该题中的数列 $\{x_n\}$ 严格单调递增收敛, 数列 $\{y_n\}$ 严格单调递减收敛, 它们的极限都是 e, 因此就对每一个 n 成立不等式

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

取自然对数, 并利用函数 $\ln x$ 的严格单调递增性, 再加整理就可得到所要的不等式. □

从这一部分的习题可以看到在 e 的定义中的两个数列的性质在许多问题中都是有用的工具.

余下的两个习题, 即习题 75(b) 和 76, 由于涉及更多的问题, 将放到本节的补注小节中作讨论.

下面介绍习题 146 和 147. 由于它们与数 e 密切有关, 而与其前后的许多习题没有多少联系, 因此将它们放在这里介绍.

习题 146 证明, 数列 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \ (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛. 于是有公式:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

其中 $C = 0.577\,216\cdots$ 称为欧拉常数, 并且当 $n \to +\infty$ 时, $\varepsilon_n \to 0$.

解 利用习题 75(a) 的不等式: $\frac{1}{k+1} < \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k}$, 就有

$$0 < \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

在上式中取 k 从 1 到 n 并相加, 得到

$$0 < y_n \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) < 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

又由于

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n+1}) > 0,$$

故数列 $\{y_n\}$ 单调递增有上界, 因此收敛. 又可以发现有

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = y_n + \ln\frac{n+1}{n}.$$

利用 $0 < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$ 并结合 $\{y_n\}$ 收敛, 可见 $\{x_n\}$ 收敛. 记其极限为 C, 就得到

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = C + \varepsilon_n,$$

其中 $\varepsilon_n \to 0$. □

练习 试证习题 146 中的数列 $\{x_n\}$ 单调递减, 并证明欧拉常数 C 满足下列估计:

$$0.3 < C < 1.$$

习题 147 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right)$.

解 1 由上一题的公式得到

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}=C+\ln 2n+\varepsilon_{2n}.$$

两式相减得到

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n,$$

令 $n\to\infty$, 可见上式左边的极限为 $\ln 2$. □

解 2 不用欧拉常数的知识, 可以直接用习题 75(a) 中的不等式求本题的极限.

记 $x_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$. 取 $k=1,2,\cdots,n$, 则可以从习题 75(a) 得到下列 n 个不等式:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)<\frac{1}{n+k}<\ln\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right),\ k=1,2,\cdots,n.$$

将它们相加得到

$$\ln\frac{2n+1}{n+1}<x_n<\ln\frac{2n}{n}=\ln 2.$$

将上式左边改写为 $\ln\dfrac{2n+1}{n+1}=\ln 2-\ln(1+\dfrac{1}{2n+1})$, 令 $n\to\infty$, 并用夹逼定理就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln 2$. □

1.2.4 单调有界数列收敛定理 (习题 77–81)

对一个数列来说, 首先要关心的问题是: 它是否收敛.

解决数列收敛问题最基本的工具有两个. 第一个是单调有界数列收敛定理, 它彻底解决了单调数列的敛散性问题; 第二个是对于一般数列均适用的柯西准则, 见下一小节.

习题 77–81 都是要求证明单调数列收敛. 检验数列是否单调的常用方法是观察 $x_{n+1}-x_n$ 或者 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ (若 x_n 非零且同号). 需要注意的是 (例如见习题 65 的解 3), 只要一个数列从某一项开始单调, 也就可以应用单调有界数列的收敛定理.

在确定了单调性之后, 问题只是要证明其有界性. 为了证明收敛性, 对于单调递增数列, 要证明它有上界; 对于单调递减数列, 要证明它有下界.

习题 80 证明数列 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$ 收敛.

解 1 这是严格单调递增数列. 取对数后可用习题 75(a) 的不等式估计其上界如下:

$$\ln x_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}<1,$$

可见数列 $\{x_n\}$ 以 e 为上界, 因此收敛. □

解 2 估计其上界的另一个方法是利用 $\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^n}<\mathrm{e}$, $n=1,2,\cdots$, 于是有

$$x_n<\mathrm{e}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<\mathrm{e}^1=\mathrm{e}.\quad □$$

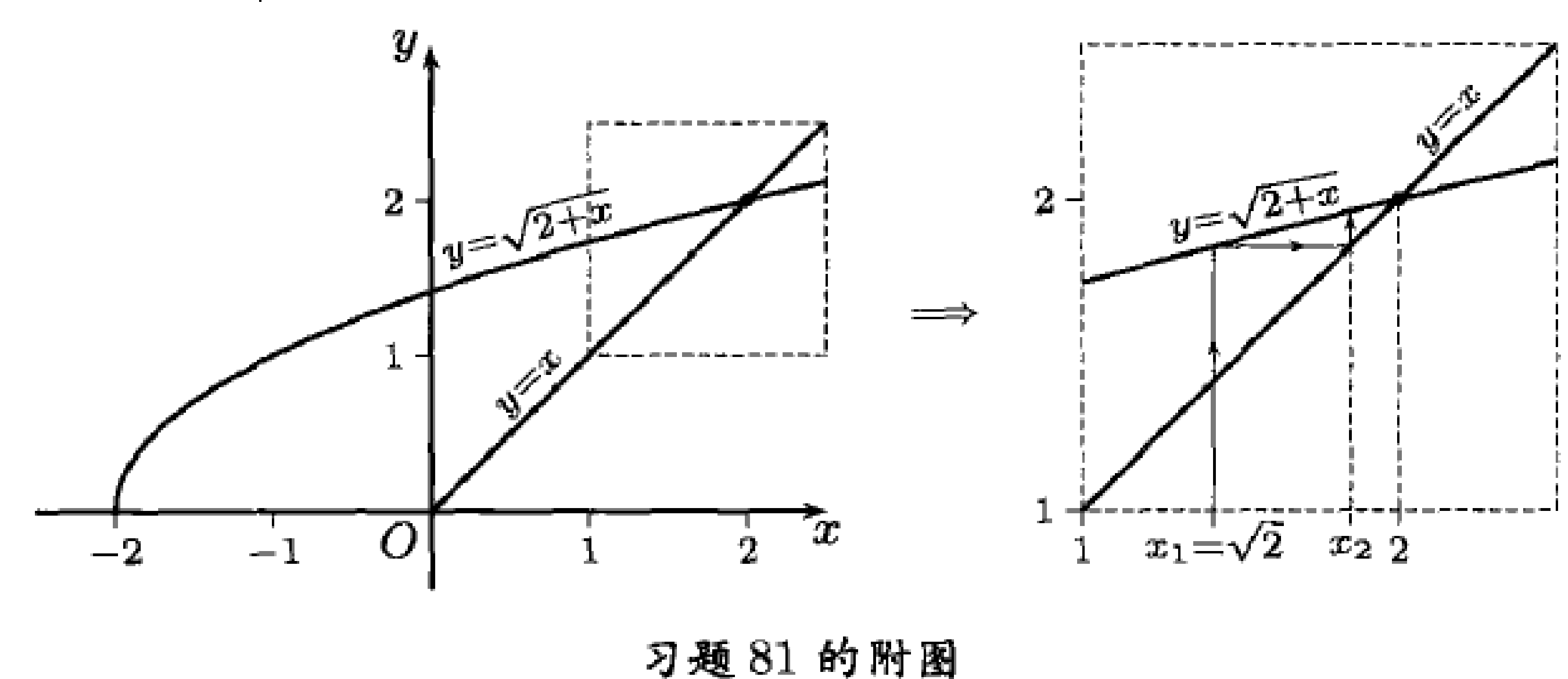
习题 81 证明下列数列收敛:

$$x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根号}},\cdots.$$

解 数列 $\{x_n\}$ 可以写成迭代形式:

$$\begin{cases}x_1=\sqrt{2},\\ x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},\quad n=2,3,\cdots.\end{cases}\tag{1.17}$$

从几何上来观察迭代式 (1.17). 如附图所示, 在左边作出了较大范围上的函数 $y=\sqrt{2+x}$ 和 $y=x$ 的图像, 其中我们关心的是用虚线围成的正方形部分, 它在经过放大后画在附图的右方, 其中还作出从 x_1 到 x_2 的迭代.



习题 81 的附图

由此猜想数列 $\{x_n\}$ 单调递增且以 $x=2$ 为上界. 这些都可以用数学归纳法来证明.

首先有 $x_1=\sqrt{2}<2$. 若设 $x_{n-1}<2$, 则 $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+2}=2$, 可见 2 是 $\{x_n\}$ 的上界.

再证 $\{x_n\}$ 为单调递增. 先有 $x_1=\sqrt{2}<x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$. 现假设有 $x_{n-1}<x_n$, 则可以推出

$$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}<\sqrt{2+x_n}=x_{n+1},$$

可见成立. 于是 $\{x_n\}$ 单调递增, 有上界, 因此收敛. □

虽然习题 81 的题意要求用单调有界数列存在极限的方法来证明, 但并非只能用这个方法. 下面用其他方法再给出两个证明.

解 2 用柯西收敛准则 (见下一小节). 记 $x_0=0,x_1=\sqrt{2+x_0}$. 令 $q=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ (<1)$, 用"有理化分子"的方法作如下估计 (注意 $x_n>0$):

$$\begin{aligned}|x_k-x_{k-1}|&=|\sqrt{2+x_{k-1}}-\sqrt{2+x_{k-2}}|=\frac{|x_{k-1}-x_{k-2}|}{\sqrt{2+x_{k-1}}+\sqrt{2+x_{k-2}}}\\&<q|x_{k-1}-x_{k-2}|<\cdots<q^{k-1}|x_1-x_0|=\sqrt{2}\cdot q^{k-1}.\end{aligned}$$

不妨设 $m>n$, 由上式得

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&<\sqrt{2}(q^{m-1}+q^{m-2}+\cdots+q^n)<\frac{\sqrt{2}q^n}{1-q}\to0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

它是与 m 无关的无穷小量, 柯西准则的条件满足, 因此 $\{x_n\}$ 收敛.

解 3 这个方法与前面不同, 先设 $\{x_n\}$ 收敛, 求出它的极限值 a.

由 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ 平方后得到 ${x_n}^2 = 2 + x_{n-1}$. 两端对 $n \to \infty$ 取极限, 得 $a^2 = 2+a$, 解得 $a=2$ (舍去增根 $a=-1$). 记 $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}+2}$ (<1), 然后直接估计

$$|x_n - 2| = |\sqrt{2+x_{n-1}} - 2| = \frac{|x_{n-1}-2|}{\sqrt{2+x_{n-1}}+2}$$
$$< q|x_{n-1}-2| < \cdots < q^{n-1}|\sqrt{2}-2| \to 0$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. □

注 在解 3 中, 先设 $\{x_n\}$ 收敛, 求出极限值 $a=2$, 再证明它的确是 $\{x_n\}$ 的极限值. 请读者考虑: 这种方法有无循环论证之嫌? 最后一步是否多此一举?

解 4 本题有一个特殊解法. 这就是从 $x_1 = \sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}$ 起, 利用余弦函数的倍角公式, 就不难用数学归纳法和迭代式 $x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ 证明, 本题的数列有表达式

$$x_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}},\ n = 1,2,\cdots.$$

由此可见, 当 $n\to\infty$ 时极限等于 2 ①. □

1.2.5 柯西收敛准则 (习题 82–88)

如前所说, 对于非单调的数列收敛问题, 其基本工具是柯西收敛准则. 它给出了数列收敛的充分必要条件.

柯西收敛准则 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得只要 $n>N$, p 为任意正整数, 成立 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

柯西收敛准则的另一种等价形式是: 数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得只要 $n,m>N$, 成立 $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

习题 82–88 都是用柯西准则的基本题. 当然有的题也可以用其他更简单的方法.

这里要指出, 用 ε–N 语言验证柯西条件与用极限定义验证 $x_n \to a$ 有类似之处, 例如 ε 不妨取适当小, $|x_m - x_n|$ 与 $|x_n - a|$ 都可用各种方法作适当放大以便于估计与求 N, 但放大后必须仍为无穷小量. 不同的是在 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 中出现了两个下标 m 和 n, 必须对于 $m,n>N$ 的所有 x_m, x_n 都满足该不等式才行. 为了减少两个下标带来的困难, 有时可以用放大来取消一个, 留下一个. 下面两个题的解法就是如此.

习题 82 证明下列数列收敛: $x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n$, 其中 $|a_k| < M$ $(k = 0,1,2,\cdots)$ 且 $|q|<1$.

解 在以下估计中不妨设 $m>n$.

① 这是从 $x_n \to 0$ 推出 $\cos x_n \to 1$ 的特例, 也就是与 §1.2.9 的代入法命题 1.4 类似的关于余弦函数的代入规则, 见 §1.5 的函数极限中的习题 481(b), 即 $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$, 这里从略.

$$|x_m - x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + \cdots + a_m q^m|$$
$$\leqslant M|q|^{n+1}(1 + |q| + \cdots + |q|^{m-n-1}) < \frac{M}{1-|q|} \cdot |q|^{n+1}.$$

由于 $|q| < 1$, 最后一式当 $n \to \infty$ 时是无穷小量, 因此对 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 使得当 $n, m > N$ 时 $|x_m - x_n| < \varepsilon$. 于是 $\{x_n\}$ 收敛. □

习题 84 证明数列 $x_n = \frac{\cos 1\,!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2\,!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n\,!}{n(n+1)}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 收敛.

解 不妨设 $m > n$. 在对每一项取绝对值后再用裂项相消法即可:

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)\,!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m\,!}{m(m+1)}\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)$$
$$< \frac{1}{n+1} \to 0.$$ □

习题 86 如果存在数 C, 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < C \ \ (n = 2, 3, \cdots),$$

那么我们说这个数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 是有界变差的.

证明, 有界变差数列是收敛的.

举一个收敛而不是有界变差的数列.

注 本题引入有界变差数列的概念, 这在一般的教科书中很少见到. 然而若读者学过无穷级数的内容之后, 就会发现这个概念只不过是与一个给定数列对应的无穷级数是绝对收敛的而已, 而证明它收敛等价于证明无穷级数中的绝对收敛级数必定收敛的定理, 因此本质上没有新东西. 建议初学者可以跳过这道题, 等到学过无穷级数的初步概念之后再来考虑它.

习题 87 试叙述“某数列不满足柯西准则”的意义.

解 数列 $\{x_n\}$ 满足柯西准则为:

“对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 对每一个 $n > N$ 和正整数 p, 成立 $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.”

数列 $\{x_n\}$ 不满足柯西准则为①:

“存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意一个 N, 存在 $n > N$ 和正整数 p, 使得 $|x_n - x_{n+p}| \geqslant \varepsilon_0$.”

若用柯西准则的下列形式:

“对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 对任意的 $m, n > N$, 成立 $|x_m - x_n| < \varepsilon$.”

则数列 $\{x_n\}$ 不满足柯西准则为:

“存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意一个 N, 存在 $m, n > N$, 使得 $|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon_0$.” □

① 习惯上将存在一个 ε 记为 ε_0, 以强调它的特定性.

注 本题的要求是用肯定语气写出数列不满足柯西准则. 这对于反证法的使用是必要的. 例如为了证明某一个给定数列收敛, 打算用反证法. 于是第一句话就是"设该数列不收敛". 由于柯西准则是数列收敛的充分必要条件, 因此"该数列不满足柯西准则". 然而由此开始如何再做下去?

这就是要求用肯定语句 (或者说正面方式) 将"不满足"某个条件表达出来 (这类题在后面还有, 例如 §1.7.1 的习题 668, §1.9 的习题 787 都是如此). 先举一个简单例子. 我们知道"数列 $\{x_n\}$ 有界"是

"存在一个正常数 M, 对每一个 n, 成立 $|x_n| \leqslant M$."

于是"数列 $\{x_n\}$ 不是有界"就可以用肯定语气表达为:

"对每一个正常数 M, 存在一个 n, 成立 $|x_n| > M$."

以上的做法可以归纳为一条"对偶法则". 它的详细介绍可以看 [23] 的 §1.4 等参考书. 其中使用的逻辑符号 $\forall$ 和 $\exists$ 分别表示 "对每一个" (即"对任意一个") 和 "存在" (即"有"), 但是对偶法则的有效性与是否使用这两个逻辑符号无关.

习题 88 利用柯西准则证明以下数列发散:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

解 1 由习题 87 知, 问题是要找到一个特殊的 $\varepsilon_0 > 0$, 欲使无论取多大的 N, 都存在 $m, n > N$ (不妨设 $m > n$), 使得 $|x_m - x_n| \geqslant \varepsilon_0$. 在 $x_m - x_n$ 中含有的项数为 $m - n$. 为了减少 m, n 的两个任意性, 取 $m = 2n$ 试探之. 由

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

可见若取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 则不论如何取 N, 总可以取一个 $n > N$ (例如令 $n = N + 1$), 同时取 $m = 2n$, 由上式得 $|x_m - x_n| > \frac{1}{2}$. 因此这个数列不满足柯西准则, 它是发散的. □

解 2 本题是单调递增数列, 因此不必用柯西准则, 只要证明数列无上界就可以推出它发散. 这有多种方法. 比较简单的是观察以下求和计算:

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2},$$
$$x_4 = x_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > x_2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = x_2 + \frac{1}{2} = 2,$$
$$x_8 = x_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > x_4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = x_4 + \frac{1}{2} > 2\frac{1}{2},$$
$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

从而可以猜测对每个正整数 n 成立以下不等式:

$$x_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}. \tag{1.18}$$

现在用数学归纳法对此作出证明. 如前所述, (1.18) 对于 $n = 1, 2, 3$ 已成立. 假设它对于 $n = k$ 成立, 则对于 $n = k + 1$ 有

$$
\begin{aligned}
x_{2^{k+1}} &= x_{2^k} + \left(\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) \\
&\geqslant 1 + \frac{k}{2} + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= 1 + \frac{k+1}{2},
\end{aligned}
$$

因此不等式 (1.18) 成立. 由此可见数列 $\{x_n\}$ 无上界, 因此发散. □

解 3 用反证法.

由于 $\{x_n\}$ 是单调递增的, 若收敛, 则存在常数 M, 使得每个 $x_n < M$.

回忆习题 75(a) 提供的不等式, 就有

$$
\begin{aligned}
\ln(n+1) &= \ln\frac{n+1}{n} + \ln\frac{n}{n-1} + \cdots + \ln\frac{2}{1} \\
&< \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1 = x_n < M,
\end{aligned}
$$

于是对每一个正整数 n 成立不等式 $n+1 < \mathrm{e}^M$, 而这是不可能的. □

解 4 从习题 146 的公式就知道 x_n 与对数 $\ln n$ 只差一个欧拉常数和无穷小量, 因此可见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. □

注 这个习题实际上就是证明下列无穷级数发散:

$$
1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.
$$

如前所述, 由于其中从第二项起每一项是前后两项的调和平均值, 因此称它为调和级数. 本题的 x_n 是级数的前 n 项之和, 故 $\{x_n\}$ 称为这个无穷级数的部分和数列. 无穷级数的收敛或发散就是根据其部分和数列的收敛或发散来定义的. 因此本题实际上就是证明了调和级数发散.

从 (1.18) 可以猜测 $\{x_n\}$ 虽然无界, 但增加极其缓慢. 实际情况确实如此. 例如用 Mathematica 软件不难计算出, 该数列超过 10 的第一项是 $x_{12\,367} \approx 10.000\,043$. 证明 $\{x_n\}$ 发散在数学分析的历史上是有重大意义的事件, 因为这个结论不是通过计算数列的前若干项就能被发现的 (这里可以参考 [23] 的例题 2.2.6 中的历史注解).

1.2.6 子列、聚点与上下极限 (习题 89–134)

《习题集》中的子列概念与一般教科书中相同, 只是记号略有不同, 即将数列 $\{x_n\}$ 的子列记为 $\{x_{p_n}\}$, 其中 p_n 是子列的第 n 项在原来的数列中的下标, 即其位置. 例如 $\{x_n\}$ 的偶数项子列为 $\{x_{2n}\}$, 即有 $p_n = 2n$, 奇数项子列为 $\{x_{2n-1}\}$, 即有 $p_n = 2n-1$.

从子列的定义即可推出, 其各项的下标形成的数列 $\{p_n\}$ 除了每一项是正整数之外, 还具有以下性质:

(1) $1 \leqslant p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$;

(2) 对每个正整数 n 有 $p_n \geqslant n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$.

我们将下一个习题的内容称为子列的基本定理.

习题 89 证明, 如果数列 x_n $(n=1,2,\cdots)$ 收敛, 那么它的任意子列 x_{p_n} $(n=1,2,\cdots)$ 也收敛, 且有相同的极限:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

解 相对地说, 把 $\{x_n\}$ 看作"整体", 其子列 $\{x_{p_n}\}$ 是它的一个"局部". 当"整体" $\{x_n\}$ 的 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$, 则其"局部" $\{x_{p_n}\}$ 在 $p_n>N$ 时也满足同样的不等式.

记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, 则对 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时 $|x_n-a|<\varepsilon$. 注意 $p_n\geqslant n$, 故对 $\{x_{p_n}\}$ 取上述的 N, 则当 $n>N$ 时也有 $p_n>N$, 于是 $|x_{p_n}-a|<\varepsilon$. 这就是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n}=a$. □

练习 容易举例说明, 若 $\{x_n\}$ 有一个或若干个子列收敛, 则 $\{x_n\}$ 未必收敛. 也许使人惊异的是若 $\{x_n\}$ 有无限个 (不同) 子列收敛于同值时, $\{x_n\}$ 也未必收敛. 请先掩卷深思之.

提示: 把 $\{x_n\}$ 的下标数列 $\{n\}$ 分成无限个子列, 对每个下标子列定义不同数列, 使它们都收敛, 但其中除一个数列收敛于 a 外, 其余数列都收敛于 $b\neq a$, 由此即得要求的例子.

注 习题 89 有一个重要推广, 即当 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\pm\infty$ 时, $\{x_n\}$ 的每一个子列 $\{x_{p_n}\}$ 也有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n}=\pm\infty$.

习题 90 证明, 如果单调数列的某个子列收敛, 那么这个数列也收敛.

解 1 不妨设 $\{x_n\}$ 单调递增, 于是 $\{x_{p_n}\}$ 也单调递增, 它收敛时必有上界 B. 而对每一个 n, 由 $n\leqslant p_n$ 得 $x_n\leqslant x_{p_n}\leqslant B$, 故 $\{x_n\}$ 也以 B 为其上界, 从而 $\{x_n\}$ 收敛. □

解 2 实际上本题不需要用什么定理, 从数列收敛的定义即可推出.

不妨设数列 $\{x_n\}$ 单调递增, 且有某个子列 $\{x_{p_n}\}$ 收敛于 a, 则对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时成立 $|x_{p_n}-a|<\varepsilon$.

由于该数列单调递增, 因此其子列 $\{x_{p_n}\}$ 也单调递增. 于是当 $n>N$ 时就有

$$a-\varepsilon<x_{p_n}\leqslant a.$$

可见只要取 $N_1=p_{N+1}$, 就使得当 $n>N_1$ 时, 有 $x_{p_{N+1}}\leqslant x_n$. 另一方面, 对每一个 n, 存在某个 $p_{n'}$, 使得 $n<p_{n'}$, 从而又有 $x_n\leqslant x_{p_{n'}}$. 于是当 $n>N_1$ 时就有

$$a-\varepsilon<x_{p_{N+1}}\leqslant x_n\leqslant x_{p_{n'}}\leqslant a,$$

这就是 $|x_n-a|<\varepsilon$, 即已经得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. □

下面 4 题与本小节的标题似乎无直接关系, 但它们本身都是重要的.

习题 91 证明, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|\,a\,|$.

解 用不等式 $\big||x_n|-|\,a\,|\big|\leqslant|x_n-a|$ (见 §1.1.4 的习题 21(a)) 即可证得. 注意: 本题的逆命题不成立. 例如 $x_n=(-1)^n\,(n=1,2,\cdots)$ 就是如此. □

习题 92 设 $x_n\to a$, 试讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

解　当 $a \neq 0$ 时, 利用商的极限运算法则, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 就推出 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{a}{a} = 1$.

当 $a = 0$ 时, 上述运算法则失效, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 就是所谓 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式, 需直接考虑通项为 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 的数列的性态. 它可以发散, 也可以收敛, 而在收敛时可以有各种极限值. (这就是不定式这个名词的由来.) 下面将举出各种情况的例子.

调和数列 $\{\dfrac{1}{n}\}$ 可作为 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 收敛的例子.

下面先分析 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在的条件.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 记为 b, 由习题 91 得 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = |b|$. 若 $|b| > 1$, 取 $b' : |b| > b' > 1$, 则 n 充分大后 $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| > b' > 1$. 于是 $\{|x_n|\}$ 严格单调递增. 这与 $x_n \to 0$ 矛盾.

由此得到: 在 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 的前提下, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则必有

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leqslant 1.$$

下述在 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 却不存在的例子.

先作 $y_n = q^n$, $0 < q < 1$, 再将它越过一位插入相邻两项之间:

$$\begin{aligned} &y_n: q,\quad q^2,\quad q^3,\quad q^4,\quad q^5, \cdots, \\ &y_n: \qquad\quad q,\quad q^2,\quad q^3,\quad q^4, \cdots, \end{aligned}$$

将所得到的数列记为 $\{x_n\}$, 则有

$$x_n:\quad q,\quad q^2,\quad q,\quad q^3,\quad q^2,\quad q^4,\quad q^3,\quad q^5,\quad q^4, \cdots,$$

则 $x_n \to 0$. 注意到 $\{x_n\}$ 中部分相邻两项的次序是它们在 $\{y_n\}$ 中的次序的倒序:

$$\frac{x_{2k+1}}{x_{2k}} = \frac{q^k}{q^{k+1}} = \frac{1}{q}$$

于是若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在则只可能等于 $\dfrac{1}{q}$ (> 1). 这与 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leqslant 1$ 矛盾, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在. □

练习　试用其他方法证明, 对于上面构造的 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存在.

下面的习题 93 是收敛数列的一个基本性质, 常称为收敛数列的有界性定理. 它在一般的教科书中都有, 其证明从略.

习题 93　证明, 收敛数列是有界的.

习题 94　证明收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出所有三类数列的例子.

解　从习题 93 知道收敛数列有界, 从习题 15 知道它一定有 (有限的) 上确界和下确界. 一个数列达到自己的上确界, 就表明它有最大数; 达到自己的下确界, 就表明它有最小数.

由此可见本题等价于一个简单问题, 即数列是否有最大数和最小数. 对于有限个数组成的数列来说, 显然都有. 但这里的数列一般都有无限多项, 这时的答案是什么?

从本题的结论中所说的三种可能性来看, 可以看出本题其实等于说: 收敛数列不可能既无最大数, 又无最小数.

用反证法. 设 $\{x_n\}$ 收敛, 但无最大数和最小数. 记 $\alpha = \inf\{x_n\}$ 和 $\beta = \sup\{x_n\}$, 则只能是 $\alpha < \beta$. (否则该数列只能是常值数列, 每一项同时是最大数和最小数.)

由于 $x_n < \beta$ 对每个 n 成立, 根据上确界的定义, 对 $\varepsilon_1 = 1$, 数列一定有某一项出现在区间 $(\beta - \varepsilon_1, \beta)$ 中, 将它记为 x_{p_1}. 然后记 $\varepsilon_2 = \max\{x_1, \cdots, x_{p_1}, \beta - \frac{1}{2}\}$, 数列也一定有某一项出现在区间 $(\beta - \varepsilon_2, \beta)$ 中, 将它记为 x_{p_2} (这时必定有 $p_2 > p_1$), 依此类推, 这样就得到了一个子列 $\{x_{p_n}\}$, 且满足

$$\beta - \frac{1}{n} < x_{p_n} < \beta.$$

可见有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \beta$, 这就是说有一个子列收敛于数列的上确界 β.

同理从数列不达到自己的最小数可以推出有一个子列收敛于数列的下确界 α.

由于 $\alpha < \beta$, 因此得到了有不同极限的两个子列. 这对于收敛数列是不可能的 (这里可以引用习题 89 的结论).

具体例子: 数列 $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\}$ 的上确界为 $\frac{1}{2}$, 同时是数列的最大数.

数列 $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}, \cdots, -\frac{1}{2^n}, \cdots\}$ 的下确界为 $-\frac{1}{2}$, 同时是数列的最小数.

数列 $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^n}, \cdots\}$ 的上下确界为 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, 都可达到. □

注 本题中的数列必须是收敛的. 否则, 如习题 118 中给出的如下数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots,$$

0 和 1 是它的下确界和上确界, 但都不能达到. 这就是说它没有最小数和最大数.

习题 95 证明, 趋向于 $+\infty$ 的数列 $x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 一定达到其下确界.

解 1 可能想到如下证明, 由条件 $x_n \to +\infty\ (n \to \infty)$ 知, 对任意的 K, 存在 N, 当 $n > N$ 时, $x_n > K$. 故取前 N 项的最小值 $\min\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 即得 $\{x_n\}$ 的最小数.

这个证法似是而非, 因上述证明中只说 $n > N$ 时 $x_n > K$, 并未顾及 $n \leqslant N$ 时 x_n 的大小. 若 $n \leqslant N$ 时 x_n 也大于 K, 于是 $\min\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 就未必是 $\{x_n\}$ 的下确界.

为了弥补上述漏洞, 可从 $\{x_n\}$ 中先任取一项, 例如 x_1 (不论正负), 作为 K, 则当 $n > N\ (> 1)$ 时的 x_n 都大于 x_1, 因此都不可能是 $\{x_n\}$ 的最小数. 这样就保证了 $\min\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 的确是 $\{x_n\}$ 的最小数. □

解 2 (证明概要) 首先需要如习题 89 后的注中所说, 证明若数列 $x_n \to +\infty$, 则它的每一个子列也都如此.

然后证明若 $\inf\{x_n\} = -\infty$, 则存在子列 $x_{p_k} \to -\infty$, 从而引出矛盾.

最后证明若 $\inf\{x_n\}$ 为有限数, 但不可达到, 则存在子列收敛于这个下确界, 从而也引出矛盾.

其中后两步的证明与解 1 中的内容类似. □

以下有不少求数列的上下确界、聚点和上下极限的习题. 这里首先要在概念上明白:
(1) 聚点 (也称为极限点) 必是某个子列的极限, 反之, 收敛子列的极限必是数列的聚点;
(2) 最大的聚点和最小的聚点就定义为数列的上极限和下极限;
(3) 将聚点和上下极限概念推广到包括 $\pm\infty$ 会带来很多方便;
(4) 数列的上下确界未必是聚点, 但若是聚点, 则必定是数列的上下极限.

极限是数学分析中的基本概念, 数列的极限更是基础, 可是只有收敛数列才有极限, 即使引入非正常极限 ∞ 之后也还是不够的. 这使其应用受到限制. 数列的上下极限却不然, 只要引进 $+\infty, -\infty$ 作为广义的数, 则数列的上下极限总是存在的, 这为数列的应用带来不少方便. 没有上下极限的数列极限理论是不完整的.

本小节以下的习题都是关于上下极限的内容.

先介绍一个命题, 它在寻找上下极限时是很有用的.

命题 1.2 若数列 $\{x_n\}$ 可分成 k 个收敛子列, 其极限分别为 $c_1, c_2, \cdots, c_k$, 则就有:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \min\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \max\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}.$$

证 为此只要证明数列的每个收敛子列的极限只能在 $c_1, \cdots, c_k$ 之中就够了.

任取数列 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{p_n}\}$, 由于 $\{x_n\}$ 已经分成为 k 个子列, 因此 $\{x_{p_n}\}$ 至少与这 k 个子列中的某一个子列 (假设是第 j 个子列) 有无限多项是相同的.

根据子列的基本定理 (即习题 89), 这无限多项组成的子列一定收敛于 c_j, 同时又与收敛子列 $\{x_{p_n}\}$ 有相同的极限, 因此得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = c_j$. □

练习 当 $\{x_n\}$ 满足命题条件时, 对于给定的收敛子列 $\{x_{p_n}\}$, 证明中的 j 是唯一的吗? 要求 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 互不相等吗?

注 命题 1.2 将满足条件的 $\{x_n\}$ 的上下极限计算归结为求有限个数中间的最大值和最小值, 这对于只有有限多个聚点的数列的上下极限计算是很有用的工具.

习题 101–115 是求数列的确界和上下极限, 我们选讲其中几题.

习题 101 (b) 求数列 $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)\ (n = 1, 2, \cdots)$ 的 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 求 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$ 时涉及 x_n 的大小及变化趋势. 将 $\{x_n\}$ 按 $(-1)^{n-1}$ 的正负分成 $\{x_{2n-1}\}, \{x_{2n}\}$, 它们分别为正值单调递减和负值单调递增. 这样就得到

$$\inf\{x_n\} = \inf\{x_{2n}\} = x_2 = -\frac{7}{2}, \quad \sup\{x_n\} = \sup\{x_{2n-1}\} = x_1 = 5,$$

由于子列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$ 都收敛, 极限分别为 2 和 -2, 因此用命题 1.2 就得到

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = -2, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 2. \quad \Box$$

习题 103 求数列 $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 1 按 $\cos x$ 的最小正周期 2π 将 $\{x_n\}$ 分成 4 个收敛子列,

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = 4k+1, \\ 1 - \dfrac{4k+2}{4k+3}, & n = 4k+2, \\ 1, & n = 4k+3, \\ 1 + \dfrac{4k+4}{4k+5}, & n = 4k+4. \end{cases}$$

这样就得到

$$\inf\{x_n\} = \inf\{x_{4k+2}\} = \lim_{k\to\infty} x_{4k+2} = 0,$$

$$\sup\{x_n\} = \sup\{x_{4k+4}\} = \lim_{k\to\infty} x_{4k+4} = 2.$$

由于上述 4 个子列分别收敛于 $1, 0, 1, 2$, 根据命题 1.2 得

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \min\{1, 0, 2\} = 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \max\{1, 0, 2\} = 2. \quad \square$$

解 2 由于因子 $\frac{n}{n+1} \to 1$, 只要先研究 $\{\cos\frac{n\pi}{2}\}$ 的收敛子列即可. 它只有 3 个常值子列: $\{0\}$, $\{-1\}$, $\{1\}$, 因此有 $\inf\{x_n\} = 0$, $\sup\{x_n\} = 2$,

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = 1 + 1\cdot\min\{0, -1, 1\} = 0,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = 1 + 1\cdot\max\{0, -1, 1\} = 2. \quad \square$$

习题 112 求数列 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 注意到 $\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 2 > \left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|$, x_n 的符号由它的第一个项确定, 即知 $\{x_{2n-1}\}$ 恒负, $\{x_{2n}\}$ 恒正.

这时下极限 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 可在 $\{x_{2n-1}\}$ 中取得. 由于 $\left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} \cdot (-1) \to -\mathrm{e}$, 而 $\sin\frac{2n-1}{4}\pi$ 可分为 4 个收敛子列, 它们分别趋于 $\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 因此由命题 1.2 可知 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\mathrm{e} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

类似地得到 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{e} + 1$. $\square$

习题 116–124 都是关于聚点的题. 这时下列命题是很有用的.

命题 1.3 数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的聚点的充分必要条件是: 在 a 的每一个邻域中含有该数列中的无限多项.

证 分两部分来证明.

必要性 若 a 是 $\{x_n\}$ 的聚点, 则在该数列中有一个收敛子列 $\{x_{p_n}\}$ 以 a 为极限. 因此对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时就有 $x_{p_n} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, 于是在邻域 $O_\varepsilon(a)$ 中就含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项.

充分性 只要找到 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列以 a 为极限即可. 由于邻域 $O_1(a)$ 中有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 因此可在邻域中取到某一项, 记为 x_{p_1}.

然后在 $O_{\frac{1}{2}}(a)$ 中又有 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 因此也可在该邻域中取到某一项, 记为 x_{p_2}, 而且总可以使得 $p_2 > p_1$.

如上面那样继续下去, 用数学归纳法①就可以得到一个子列 $\{x_{p_n}\}$, 它满足 $|x_{p_n} - a| < \dfrac{1}{n}$, 可见该子列收敛于 a. □

推论 设数列 $\{a_n\}$ 中的每一项都是数列 $\{x_n\}$ 的聚点, 则 $\{a_n\}$ 的聚点也是 $\{x_n\}$ 的聚点.

(推论的证明可留作为练习.)

在知道聚点的定义和命题 1.3 后, 上述关于聚点的一些习题都不难. 只举一个例子.

习题 118 求下列数列的聚点: $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \cdots$.

解 观察这个数列的结构可见它实际上就是由所有真分数组成的数列. 从下面的证明可以看出它们的排列次序实际上是没有关系的.

任取点 $a \in [0,1]$, 又任取它的一个邻域 $O_\varepsilon(a)$. 利用分母为 k 的 $k-1$ 个真分数都在 $(0,1)$ 内, 相邻两个数的距离为 $\dfrac{1}{k}$, 因此在 $O_\varepsilon(a)$ 中一定含有分母 k 充分大的真分数, 即原数列的无限多项. 具体来说, 只要 $k > \dfrac{1}{2\varepsilon}$, 就必定有一个分母为 k 的真分数落在邻域 $O_\varepsilon(a)$ 中. 用命题 1.3 就知道 a 是聚点. 于是已经证明 $[0,1]$ 中的点都是该数列的聚点.

对于任意的数 $b \notin [0,1]$, 一定可以取 $\delta > 0$ 充分小, 使得 $O_\delta(b)$ 与 $[0,1]$ 不相交. 由此可见 b 不是 $\{x_n\}$ 的聚点. □

习题 125 实际上是一条重要的定理, 它为许多问题提供了有用的工具. 在教科书中一般称为波尔查诺–魏尔斯特拉斯凝聚定理 (或致密性定理等), 也是实数系基本定理之一 (见 [23] 的第三章). 由于它的证明可在教科书中找到, 这里从略.

习题 125 证明, 在有界数列 $x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 中必有收敛子列 $x_{p_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$.

注 对于习题 125 的内容, 有人将它描述为"从混乱中找出了秩序", 因为数列的有界性只告诉我们它落在一个有限区间内, 其他什么也不知道. 一旦找到一个收敛子列后, 则就提供了一个聚点. 这时如命题 1.3 所示, 就会提供许多新的知识, 它们有可能用于解决许多问题.

下一个习题可以看成是习题 125 在数列无界情况的对应物, 证明从略.

---

① 这表明数学归纳法不仅可用于证明 (包括恒等式和不等式在内的命题), 还可用于构造. 在这里就是构造出满足一定条件的子列. 这种用法在高等数学中是常见的, 往往将这一步简称为"归纳得到"或"归纳构造".

习题 126 证明, 如果数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 无界, 那么必存在子列 x_{p_n}, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty$.

习题 127–130 是关于收敛数列四则运算法则的反思, 它们对于正确理解和运用这些法则是重要的.

习题 131–135 是关于上下极限的运算法则. 对于上下极限不熟悉的读者可以看 §1.2.9 的第 3 点, 其中有关于这方面的一个概述.

注意, 在习题 131–133 中都需要补充条件, 即其中出现的极限的和或极限的乘积都有意义.

为书写简明起见, 在下面几题的解答中略去极限记号 "lim" 下方的 $n \to \infty$.

习题 131 证明:

$$\text{(a)}\ \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\text{(b)}\ \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

其中假设在左边和右边的求和都有意义.

举出在这些关系式中严格不等式成立的例子.

解 只给出 (a) 的证明, 请读者完成 (b) 的证明.

左边和右边的和有意义就是不允许出现两个极限为异号无穷大的情况.

(1) 先证明左边的不等式 $\varliminf x_n + \varliminf y_n \leqslant \varliminf (x_n + y_n)$.

先看 $\varliminf x_n$ 为无穷大的两种情况.

(1.1) 若 $\varliminf x_n = -\infty$, 则另一项不允许是 $+\infty$, 因此不等式左边为 $-\infty$. 这时无论右边如何, 这个不等式总是成立的.

若有 $\varliminf x_n = +\infty$, 则就是 $x_n \to +\infty$. 这时不允许 $\varliminf y_n = -\infty$. 这表明数列 $\{y_n\}$ 下方有界, 于是 $\{x_n + y_n\}$ 仍为正无穷大量, 即是有 $\varliminf (x_n + y_n) = \lim (x_n + y_n) = +\infty$. 于是不等式两边都等于 $+\infty$.

由于对称性, 对 $\varliminf y_n$ 为 $-\infty$ 和 $+\infty$ 的两种情况的讨论是相同的, 不再重复.

(1.2) 余下的情况是 $A = \varliminf x_n$ 和 $B = \varliminf y_n$ 都是有限实数的情况. 这表明数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是下方有界, 且都不是正无穷大量.

若有 $\varliminf (x_n + y_n) = +\infty$, 则不等式已经成立. 否则数列 $\{x_n + y_n\}$ 存在正常收敛的子列 $\{x_{p_n} + y_{p_n}\}$, 使得

$$\lim (x_{p_n} + y_{p_n}) = \varliminf (x_n + y_n) < +\infty.$$

由此可以看出 $\{x_{p_n}\}$ 和 $\{y_{p_n}\}$ 除了下方有界外, 同时还都是上方有界的. 否则 $\{x_{p_n} + y_{p_n}\}$ 无上界, 上式左边的极限就是正无穷大了.

应用习题 125 于有界数列 $\{x_{p_n}\}$, 可见它必有收敛子列. 由于这个子列仍然是 $\{x_n\}$ 的子列, 因此不妨设 $\{x_{p_n}\}$ 就已经是这个收敛子列. 由于此时的 $\{x_{p_n} + y_{p_n}\}$ 收敛, 于是可推出 $\{y_{p_n}\}$ 也收敛.

利用 $\underline{\lim}\ x_n \leqslant \lim\ x_{p_n}$, $\underline{\lim}\ y_n \leqslant \lim\ y_{p_n}$, 因此就得到所要求证的不等式:

$$\underline{\lim}\ x_n + \underline{\lim}\ y_n \leqslant \lim\ x_{p_n} + \lim\ y_{p_n} = \lim\ (x_{p_n} + y_{p_n}) = \underline{\lim}\ (x_n + y_n).$$

(2) 现在证明右边的不等式 $\underline{\lim}\ (x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim}\ x_n + \overline{\lim}\ y_n$.

一种方法是模仿 (1) 中的证明 (模仿法), 另一种方法是将问题归结为 (1) (归结法). 下面用第二种方法.

根据上下极限定义可以推出 $\overline{\lim}\ y_n = -\ \underline{\lim}\ (-y_n)$.

先从 (1) 中的不等式得到

$$\underline{\lim}\ (-y_n) + \underline{\lim}\ (x_n + y_n) \leqslant \underline{\lim}\ [-y_n + (x_n + y_n)] = \underline{\lim}\ x_n,$$

然后将左边的第一项移到右边变成上极限, 这样就得到所要求证的不等式.

(3) 取 $\{x_n\}$ 为 $0, 1, 0, 1, \cdots$, $\{y_n\}$ 为 $2, 0, 2, 0, \cdots$, 则 $\{x_n + y_n\}$ 为 $2, 1, 2, 1, \cdots$. 于是就有

$$\underline{\lim}\ x_n = 0, \underline{\lim}\ y_n = 0, \underline{\lim}\ (x_n + y_n) = 1, \overline{\lim}\ y_n = 2.$$

与之对应的不等式就是 $0 < 1 < 2$, 即都是以严格的不等号成立的不等式. □

注　在习题 131(a),(b) 的两边出现 $\infty - \infty$ 的无意义情况时, 可以举例说明, 中间的 $\underline{\lim}\ (x_n + y_n)$ 可以取到任何有限数以及 $\pm\infty$, 这是上下极限中的不定式.

习题 132　设 $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 证明:

$$\text{(a)}\ \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n,$$

$$\text{(b)}\ \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n,$$

其中假设在左边和右边的乘积都有意义.

举出在这些关系式中严格不等式成立的例子.

解　只写出 (a) 的证明, 请读者完成 (b) 的证明.

在下面的证明中两个数列都是非负的条件是重要的. 此外, 左边和右边的极限的乘积有意义就是不允许出现 $0 \cdot \infty$.

(1) 先证明左边的不等式 $\underline{\lim}\ x_n \cdot \underline{\lim}\ y_n \leqslant \underline{\lim}\ (x_n y_n)$.

(1.1) 先看 $\underline{\lim}\ x_n$ 为 0 和 $+\infty$ 的两种情况. 若它为 0, 则另一个因子不允许是 $+\infty$, 因此不等式左边为 0, 而右边非负, 这总是成立的.

若有 $\underline{\lim}\ x_n = +\infty$, 则就是 $x_n \to +\infty$. 这时不允许有 $\underline{\lim}\ y_n = 0$. 这表明至少从某项起 y_n 有正下界. 具体来说, 即存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 N, 使得当 $n > N$ 时有 $y_n > \varepsilon_0 > 0$. 这样就有 $\underline{\lim}\ (x_n y_n) = \lim\ (x_n y_n) = +\infty$. 于是不等式两边相等, 即都是 $+\infty$.

由于对称性, 对 $\underline{\lim}\ y_n$ 为 0 和 $+\infty$ 的两种情况的讨论是相同的, 不再重复.

(1.2) 余下的情况是 $0 < A = \underline{\lim}\ x_n < +\infty$, $0 < B = \underline{\lim}\ y_n < +\infty$. 这表明数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ (至少从某项开始) 都有正下界, 且都不是正无穷大量.

若有 $\underline{\lim}\ (x_n y_n) = +\infty$, 则不等式已经成立. 否则数列 $\{x_n y_n\}$ 存在正常收敛的子列 $\{x_{p_n} y_{p_n}\}$ 使得

$$\lim(x_{p_n}y_{p_n})=\underline{\lim}(x_ny_n)<+\infty.$$

由此可以看出 $\{x_{p_n}\}$ 和 $\{y_{p_n}\}$ 除了有正下界之外, 同时还都是上方有界的. 否则上式左边的极限就是正无穷大了.

应用习题 125 于有正下界的有界数列 $\{x_{p_n}\}$, 可见它必有极限大于 0 的收敛子列. 由于这个子列仍然是 $\{x_n\}$ 的子列, 因此不妨设 $\{x_{p_n}\}$ 就已经是这个子列. 由于其极限大于 0, 而子列 $\{x_{p_n}y_{p_n}\}$ 收敛, 于是可推出 $\{y_{p_n}\}$ 也收敛, 其极限也大于 0.

利用 $0\leqslant\underline{\lim}\ x_n\leqslant\lim x_{p_n}$, $0\leqslant\underline{\lim}\ y_n\leqslant\lim y_{p_n}$, 就得到所要求证的不等式:

$$\underline{\lim}\ x_n\cdot\underline{\lim}\ y_n\leqslant\lim x_{p_n}\cdot\lim y_{p_n}=\lim(x_{p_n}y_{p_n})=\underline{\lim}(x_ny_n).$$

(2) 现在证明右边的不等式 $\underline{\lim}(x_ny_n)\leqslant\underline{\lim}\ x_n\cdot\overline{\lim}\ y_n$. 与习题 131(a) 的证明 (2) 相同, 用归结法来做.

若非负数列 $\{y_n\}$ 有无穷多项为 0, 则就有 $\underline{\lim}(x_ny_n)=0$, 不等式成立. 否则, 就存在 N, 使得当 $n>N$ 时 $y_n>0$. 这时根据上下极限定义可以推出

$$\overline{\lim}\ y_n=\frac{1}{\underline{\lim}\ \dfrac{1}{y_n}}.$$

先用 (1) 中的不等式得到

$$\underline{\lim}\ \frac{1}{y_n}\cdot\underline{\lim}(x_ny_n)\leqslant\underline{\lim}\left[\frac{1}{y_n}\cdot(x_ny_n)\right]=\underline{\lim}\ x_n,$$

然后将左边的第一个因子除到右边变为上极限, 这样就得到所要求证的不等式.

(3) 取 $\{x_n\}$ 为 $\frac{1}{2},2,\frac{1}{2},2,\cdots$, $\{y_n\}$ 为 $3,\frac{1}{2},3,\frac{1}{2},\cdots$, 则 $\{x_ny_n\}$ 为 $\frac{3}{2},1,\frac{3}{2},1,\cdots$, 于是就有

$$\underline{\lim}\ x_n=\frac{1}{2},\underline{\lim}\ y_n=\frac{1}{2},\underline{\lim}(x_ny_n)=1,\overline{\lim}\ y_n=3,$$

于是对应的不等式就是 $\frac{1}{4}<1<\frac{3}{2}$, 即都是以严格的不等号成立的不等式. □

注　在习题 132(a),(b) 的两边出现 $0\cdot\infty$ 的无意义情况时, 可以举例说明, 中间的 $\underline{\lim}(x_ny_n)$ 可以取到任何有限数以及 $\pm\infty$, 这是上下极限中的不定式.

习题 133 证明, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 那么对无论怎样的数列 y_n $(n=1,2,\cdots)$ 都有:

$$\text{(a)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n,$$

$$\text{(b)}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\ y_n\quad(x_n\geqslant0),$$

其中分别假设在右边的和与乘积有意义.

下面只对习题 133(b) 给出证明, 请读者完成 133(a) 的证明.

解 1　若数列 $\{y_n\}$ 中有无限多项为非负 (包括每项均为非负的情况在内), 将所有这些非负项记为一个子列 $\{y_{p_n}\}$, 并注意到数列 $\{x_n\}$ 非负, 则就有

$$\overline{\lim}\ y_n=\overline{\lim}\ y_{p_n},\quad\overline{\lim}(x_ny_n)=\overline{\lim}(x_{p_n}y_{p_n}).$$

应用习题 132(b) 的结论, 就有

$$\begin{aligned}\lim x_n \cdot \overline{\lim}\ y_n &= \lim x_{p_n} \cdot \overline{\lim}\ y_{p_n} \\ &\leqslant \overline{\lim}\,(x_{p_n}y_{p_n}) = \overline{\lim}\,(x_n y_n) \\ &\leqslant \lim x_{p_n} \cdot \overline{\lim}\ y_{p_n} = \lim x_n\, \overline{\lim}\ y_n,\end{aligned}$$

可见其中均成立等号.

对于相反的情况, 可以不妨设 $y_n < 0\ (n = 1, 2, \cdots)$. 然后对于非负数列 $\{-y_n\}$ 和 $\{x_n\}$ 应用习题 132(a) 的结论, 这样就有

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\,(-y_n) \cdot \lim x_n &= -\overline{\lim}\ y_n \cdot \lim x_n \\ &\leqslant \underline{\lim}\,(-y_n x_n) = -\overline{\lim}\,(x_n y_n) \\ &\leqslant \underline{\lim}\,(-y_n) \cdot \lim x_n = -\overline{\lim}\ y_n \cdot \lim x_n,\end{aligned}$$

可见其中也都成立等号. □

解 2 模仿习题 132(a) 的解就不难证明本题的 (b). 记 $A = \lim x_n$, $B = \overline{\lim}\ y_n$.

为观察方便起见将要证明的等式重新写出如下:

$$\overline{\lim}\,(x_n y_n) = \lim x_n \cdot \overline{\lim}\ y_n = AB, \tag{1.19}$$

其中 $\{x_n\}$ 为非负数列, 且已有 (常义或广义的) 极限. 先讨论 (1.19) 的右边出现因子 0 和 ∞ 的情况.

(1) 若 $A = +\infty$, 则只能允许 $B \neq 0$. 这时 (1.19) 的两边都是无穷大, 其符号与 B 的符号相同.

若 $B = \pm\infty$, 则只能允许 $A > 0$, 于是 (1.19) 两边都与 B 相同.

(2) 若 $A = 0$, 则 B 必须是有限数. 这时有 $y_{p_n} \to B$, 因此也有 $x_{p_n}y_{p_n} \to 0$. 这表明 $\overline{\lim}\,(x_n y_n) \geqslant 0$. 由于上极限 $B < +\infty$ 表明 $\{y_n\}$ 有上界, 因此只能是 $\overline{\lim}\,(x_n y_n) = 0$. 即 (1.19) 的两边等于 0.

若 $B = 0$, 则只要看 $0 < A < +\infty$ 的情况. 这时只能有 $\overline{\lim}\,(x_n y_n) \leqslant 0$. 又从 $y_{p_n} \to 0$ 知道有 $x_{p_n}y_{p_n} \to 0$, 因此 $\overline{\lim}\,(x_n y_n) = 0$. 即 (1.19) 的两边等于 0.

(3) 余下的情况是 B 为非零有限数, A 为正有限数.

这时若有子列 $x_{p_n}y_{p_n} \to C$, 则就有 $y_{p_n} \to \dfrac{C}{A} \leqslant B$, 因此 $C \leqslant AB$.

另一方面存在 $y_{p_n} \to B$, 因此 $x_{p_n}y_{p_n} \to AB$, 因此只能是 $\overline{\lim}\,(x_n y_n) = AB$. □

注 1 与习题 133(a) 不同, 在习题 133(b) 中的条件 $x_n \geqslant 0$ 是本质的. 例如当 $x_n \equiv -1$ 时, 只要令 $y_{2n-1} \equiv 1$, $y_{2n} \equiv -1$, 就有 $\overline{\lim}\,(x_n y_n) = \overline{\lim}\ y_n = 1$, 从而习题 133(b) 中的等式 (即 (1.19)) 的左边为 1, 右边为 -1, 故不能成立.

注 2 关于模仿法和归结法再说几句. 这在待证的命题有几个类似的结论时是经常遇到的. 模仿法对熟悉和理解该方法有益, 以后遇到现成的定理不敷应用时, 也许该方法仍可用来解决问题. 归结法通常比较简洁, 两者各有所长.

下一道题的原有结论不够全面, 现作补充后给出解答 [4, 16, 25].

习题 134 证明, 如果对某一个数列 $x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 和无论怎样的数列 $y_n\ (n = 1, 2, \cdots)$, 使得

(a) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$

或者

(b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\ \ (x_n\geqslant 0)$

中至少有一个等式成立, 那么数列 $\{x_n\}$ 或者收敛于正常极限, 或者发散于 $+\infty$.

分析 这里正确理解题意非常重要.

数列 $\{x_n\}$ 给定在先, 然后对于任意一个 $\{y_n\}$, 条件 (a) 和 (b) 中的等式至少有一个成立. 只是仅当 $\{x_n\}$ 为非负数列时才可以用条件 (b). 这与上一个习题 133 的 (a),(b) 恰好对应. 这里要注意对习题 133 需要加上右边的和与积都有意义后其结论才能成立, 而在本题则已经默认了这一点. 可以认为, 习题 134 几乎就是习题 133 的逆命题.

解 用反证法. 若结论不成立, 则只有两种可能性.

第一种可能性是 $\lim x_n=-\infty$. 这时条件 (b) 不能用[①]. 只要有 $\overline{\lim}\ y_n=+\infty$, 则条件 (a) 的右边无意义, 而左边可以等于任何有限数或 $\pm\infty$, 因此等式不能成立.

第二种可能性是 $\lim x_n$ 无意义. 记 $\underline{\lim}\ x_n=\alpha$, $\overline{\lim}\ x_n=\beta$, 则有

$$-\infty\leqslant\alpha=\underline{\lim}\ x_n<\overline{\lim}\ x_n=\beta\leqslant+\infty.$$

这时分两种情况讨论.

(1) $\{x_n\}$ 不是非负数列, 这时只要检查条件 (a) 中的等式是否成立.

令 $y_n=-x_n\ (n=1,2,\cdots)$, 则 $\overline{\lim}\ y_n=-\underline{\lim}\ x_n=-\alpha$, 于是条件 (a) 的左边为 0, 右边为 $\beta-\alpha\neq 0$ (即为正数或 $+\infty$), 等式不能成立.

(2) $\{x_n\}$ 为非负数列, 这时 $\alpha\geqslant 0$. 设子列 $x_{p_n}\to\alpha$, 定义数列 $\{y_n\}$ 如下 [4, 16]:

$$y_k=\begin{cases}1, & k=p_n,\ n=1,2,\cdots,\\ -x_k, & \text{其他}.\end{cases}$$

这样就有

$$\overline{\lim}\ y_n=1,\quad \overline{\lim}\,(x_n+y_n)=\alpha+1=\underline{\lim}\ x_n+1,\quad \overline{\lim}\,(x_ny_n)=\alpha.$$

对于条件 (a) 得到 $\alpha+1\neq\beta+1$, 而对于条件 (b) 得到 $\alpha\neq\beta$, 因此都不能成立等式. □

注 从习题 133 可知若 $\{x_n\}$ 正常收敛, 则对任何 $\{y_n\}$ 都满足条件 (a) 中的等式, 而在其极限不是 0 时也满足条件 (b) 中的等式. 同样可知, 若 $\lim x_n=+\infty$, 则除了 $\overline{\lim}\ y_n=-\infty$ 之外都满足条件 (a) 中的等式, 又除了 $\overline{\lim}\ y_n=0$ 之外都满足条件 (b) 中的等式. 因此在习题 134 的条件下推出的结论不仅是必要的, 而且也是充分的.

习题 135 将在补注小节中作为例题, 用于说明处理上下极限问题的各种方法. 习题 136 和 137 较难, 其中的方法与上面的习题都不相同, 也将在补注小节中解答.

[①] 在 [25] 的附录 A 中证明, 即使习题 134 的条件 (b) 中去掉限制 $(x_n\geqslant 0)$ 之后, $\lim x_n=-\infty$ 仍然不能对所有 $\{y_n\}$ 满足条件 (b). 这当然来自于习题 133(b) 中的条件 $(x_n\geqslant 0)$ 是本质的. 参见在该题解答后的注 1.

1.2.7　柯西命题和施托尔茨定理 (习题 138–145)

这是指习题 138 和 143. 它们是计算 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式的有力工具, 在微分学中的对应物就是著名的洛必达法则 (见 §2.9) ①.

习题 138 (柯西命题) 证明: 如果数列 $x_n\ (n=1,2,\cdots)$ 收敛, 那么算术平均数列

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\ \ (n=1,2,\cdots)$$

也收敛, 而且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

逆命题不成立, 请举例加以说明.

解 1　为了简化讨论, 将 $x_n\to a\ (n\to\infty)$ 记成 $x_n=a+\alpha_n$, 其中 $\alpha_n\to 0$. 考虑

$$\xi_n-a=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)-a=\frac{1}{n}(\alpha_1+\cdots+\alpha_n).$$

把上式右端分成前后两段: $\frac{1}{n}(\alpha_1+\cdots+\alpha_{N_1})+\frac{1}{n}(\alpha_{N_1+1}+\cdots+\alpha_n)$. 先取充分大的 N_1, 使后段分子各项都很小, 从而后段很小. 固定 N_1, 则前段分子是定值, 除以充分大的 n 后也可以很小. 这就是证明的思路.

以下将上述简略的分析用 ε–N 的语言写出如下.

对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时, $|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是有

$$\frac{1}{n}|\alpha_{N_1+1}+\cdots+\alpha_n|<\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定 N_1, 对同一 ε, 存在 $N\ (>N_1)$, 当 $n>N$ 时

$$\frac{1}{n}|\alpha_1+\cdots+\alpha_{N_1}|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是当 $n>N$ 时以上两式同时成立, 从而有

$$\frac{1}{n}|\alpha_1+\cdots+\alpha_n|\leqslant\frac{1}{n}|\alpha_1+\cdots+\alpha_{N_1}|+\frac{1}{n}|\alpha_{N_1+1}+\cdots+\alpha_n|<\varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=a$.

反之, 结论不成立. 例如取振荡数列 $x_n=(-1)^{n-1}\ \ (n=1,2,\cdots)$, 它是发散的.

再看这个数列对应的 $\{\xi_n\}$. 虽然 $x_1=1, x_1+x_2=0, x_1+x_2+x_3=1,\cdots$ 也是振荡数列, 但除以 n 所得的平均值 ξ_n 则是

$$1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\cdots,$$

它是收敛于 0 的无穷小量. □

解 2 (用 §1.2.6 的上下极限工具)　对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 有 $-\varepsilon<\alpha_n<\varepsilon$. 于是如解 1 中那样可以估计得到

$$\frac{1}{n}(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)-\frac{n-N}{n}\varepsilon<\xi_n-a<\frac{1}{n}(\alpha_1+\cdots+\alpha_N)+\frac{n-N}{n}\varepsilon.$$

① 这里应当指出, 在用这些工具时, 只要求分式中的分母是 (严格单调的) 无穷大量, 而对于分子的性态如何并无要求. 因此更确切的说法是用于 $\frac{*}{\infty}$ 型的不定式.

固定 N, 对 n 取上下极限, 得到

$$-\varepsilon \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(\xi_n - a) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(\xi_n - a) \leqslant \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可取得任意小, 故 $\varlimsup_{n\to\infty}(\xi_n - a) = \varliminf_{n\to\infty}(\xi_n - a) = 0$, 即 $\lim_{n\to\infty}\xi_n = a$. □

柯西命题可推广到 $\{x_n\}$ 为正无穷大量或负无穷大量的情况. 前者就是下一题.

习题 139 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

解 模仿上题的分段估计法. 由条件知不妨设 $x_n > 0$.

与上题比较可见, 差别在于上题要求被估计式 $< \varepsilon$, 而本题则要求被估计式 $> K$.

对给定的 $K > 0$, 存在 N_1, 当 $n > N_1$ 时, $x_n > 2K$. 于是这时

$$\frac{1}{n}(x_{N_1+1} + x_{N_1+2} + \cdots + x_n) > \frac{n - N_1}{n}\cdot 2K.$$

固定 N_1, 存在 $N\ (> N_1)$, 使得当 $n > N$ 时同时成立

$$\frac{1}{n}|x_1 + x_2 + \cdots + x_{N_1}| < \frac{K}{3},\quad \frac{n - N_1}{n} > \frac{2}{3}.$$

于是当 $n > N$ 时就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) &= \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{N_1}) + \frac{1}{n}(x_{N_1+1} + \cdots + x_n)\\ &> -\frac{K}{3} + \frac{2}{3}\cdot 2K = K.\end{aligned}$$ □

练习 模仿习题 138 的解 2 再解习题 139.

下一题是习题 138 在乘积形式下的推广.

习题 140 (乘积形式的柯西命题) 证明, 如果数列 $x_n\ (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛, 且 $x_n > 0$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

解 记 $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, 则 $a \geqslant 0$.

若 $a > 0$, 则也有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$. 用平均值不等式 $H \leqslant G \leqslant A$ (见命题 1.1):

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

令 $n \to \infty$ 并在两边用柯西命题, 可见它们都收敛于 a, 因此得到 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = a$.

对于 $a = 0$ 的情况则只要如上写出右边的不等式后再用柯西命题即可. □

注 本题的其他解法有: 模仿柯西命题的解法, 或者取对数后用柯西命题.

下一题在无穷级数中有用 (参见《习题集》 §5.1 的习题 2593).

习题 141 证明, 如果 $x_n > 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 那么 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$ (假设等式右边的极限存在).

解　将 x_n 写成乘积形式

$$x_n = \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)\cdot\left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\cdot x_1,$$

然后对于正数列 $x_1, \frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_{n-1}}, \cdots$ 用习题 140 的结论即可. □

习题 142　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$.

解　将数列通项写为 $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$, 然后记 $x_n = \frac{n^n}{n!}$, 则就有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e},$$

然后用习题 141 的结论即可. □

注　这是与数 e 有关的一个极限, 证明方法很多. 它还与阶乘的斯特林公式有关 (见《习题集》的 §5.10 及其中的习题 3120(b)).

习题 143　证明施托尔茨 (Stolz) 定理: 如果

(a) $y_{n+1} > y_n\ (n = 1, 2, \cdots)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ 存在,

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

分析　令 $y_n \equiv n$, 它满足条件 (a) 和 (b). 又令

$$X_1 = x_1, X_2 = x_2 - x_1, \cdots, X_n = x_n - x_{n-1}, \cdots,$$

就可以将条件 (c) 改写为 $\lim\limits_{n\to\infty} X_{n+1}$ 存在, 而结论成为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} = \lim_{n\to\infty} X_{n+1}.$$

可见这就是习题 138 的柯西命题.

既然柯西命题是施托尔茨定理的特例, 于是也有可能用证明柯西命题的方法来证明施托尔茨定理, 这就是下列证明的指导思想.

解　由题设的两个数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 引入两个新的数列 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$, 其中:

$$X_1 = x_1, X_{n+1} = x_{n+1} - x_n; Y_1 = y_1, Y_{n+1} = y_{n+1} - y_n; n = 1, 2, \cdots,$$

则就有

$$x_{n+1} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n+1},\ y_{n+1} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{n+1},\ n = 1, 2, \cdots.$$

于是习题中的条件 (a),(b),(c) 就依次转换为以下三个条件:

(1) $Y_n > 0\ (n = 2, 3, \cdots)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(Y_1 + \cdots + Y_n) = +\infty$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{X_n}{Y_n}$ 存在,

而求证的结论则改变为: 在条件 (1)–(3) 下, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+\cdots+X_n}{Y_1+\cdots+Y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{Y_n}. \tag{1.20}$$

以下的证明思路与柯西命题的解 1 相同.

设条件 (3) 中的极限, 即 (1.20) 的右边, 为 a. 记

$$\xi_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{Y_1+\cdots+Y_n},$$

又将 $\dfrac{X_n}{Y_n}\to a$ 改记为 $\dfrac{X_n}{Y_n}=a+\alpha_n$, 其中 $\alpha_n\to 0$. 于是 $X_n=aY_n+\alpha_nY_n$.

对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时, 有 $|\alpha_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $n>N_1$ 时, 可对 $|\xi_n-a|$ 作分段估计如下:

$$\begin{aligned}
|\xi_n-a|&=\left|\frac{(X_1-aY_1)+\cdots+(X_n-aY_n)}{Y_1+\cdots+Y_n}\right|\\
&=\left|\frac{Y_1\alpha_1+\cdots+Y_n\alpha_n}{Y_1+\cdots+Y_n}\right|\\
&\leqslant\left|\frac{Y_1\alpha_1+\cdots+Y_{N_1}\alpha_{N_1}}{Y_1+\cdots+Y_n}\right|+\left|\frac{Y_{N_1+1}\alpha_{N_1+1}+\cdots+Y_n\alpha_n}{Y_1+\cdots+Y_n}\right|\\
&\leqslant\left|\frac{Y_1\alpha_1+\cdots+Y_{N_1}\alpha_{N_1}}{Y_1+\cdots+Y_n}\right|+\left|\frac{Y_{N_1+1}\alpha_{N_1+1}+\cdots+Y_n\alpha_n}{Y_{N_1+1}+\cdots+Y_n}\right|\\
&\leqslant\left|\frac{Y_1\alpha_1+\cdots+Y_{N_1}\alpha_{N_1}}{Y_1+\cdots+Y_n}\right|+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

这里对分段估计的第二段利用了其中的 $Y_i>0\ (i=2,3,\cdots,n)$ 和 $|\alpha_i|<\dfrac{\varepsilon}{2}\ (i=N_1+1,\cdots,n)$.

固定 N_1, 并利用条件 (3), 即 $Y_1+\cdots+Y_n\to+\infty$, 可见对同一 ε, 存在 $N\ (>N_1)$, 当 $n>N$ 时, 上式的第一段也小于 $\dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是已经得到当 $n>N$ 时有 $|\xi_n-a|<\varepsilon$, 即 (1.20) 成立. □

注 与习题 139 类似, 施托尔茨定理也可以推广到条件 (3) 中的 (广义) 极限 $a=+\infty$ 的情况. 此外, 对于 $a=-\infty$ 的情况柯西命题和施托尔茨定理也都是成立的. 但是只有对于带确定符号的无穷大才能有这样的推广.

如习题 46–64 中的许多数列计算题所示, 在遇到 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 时有许多方法可用, 但本小节的以上习题提供了更为普遍有效 (但不是万能) 的工具. 读者除了可以用本小节的习题 144 和 145 来做练习之外, 也可以将这些工具用于以前已经做过的题, 并与原来的方法做比较. (实际上习题 144(a),(b) 就是前面的习题 60 和 64 的特例.)

1.2.8 迭代生成的数列 (习题 148–150)

这里只有三道题, 但各有特色, 需要分别介绍.

习题 148 数列 $x_n(n=1,2,\cdots)$ 定义为:

$$x_1=a,\quad x_2=b,\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad (n=3,4,\cdots).$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 1 (从研究数列的分布规律着手) 不妨只讨论 $a<b$ 的情况. 这时有 $x_1<x_3<x_2$, 又有 $x_3<x_4<x_2$. 用数学归纳法可以证明对每个 n 有 $x_1<x_3<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}<\cdots<x_4<x_2$. 于是 $\{[x_{2n-1},x_{2n}]\}$ 成为一个区间套. 这使得子列 $\{x_{2n-1}\}$ 单调递增有上界, 子列 $\{x_{2n}\}$ 单调递减有下界, 因此两个子列都收敛.

写出 $x_{2n}=\dfrac{1}{2}(x_{2n-1}+x_{2n-2})$ 和 $x_{2n-1}=\dfrac{1}{2}(x_{2n-2}+x_{2n-3})$, 两式相减, 则得到

$$x_{2n}-x_{2n-1}=\frac{1}{2}(x_{2n-1}-x_{2n-3})=\frac{1}{4}(x_{2n-2}-x_{2n-3}).$$

由此可见上述区间套的长度趋于 0, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}$. 这样就证明了数列 $\{x_n\}$ 收敛. 记其极限为 A.

为计算极限 A, 我们来计算区间套左端点 (或右端点) 之间的距离的变化规律. 从迭代式可见对每个 n 有

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1}).$$

于是有

$$x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{1}{4}(x_{2n-1}-x_{2n-3}).$$

这样就可以得到

$$\begin{aligned}x_{2n+1}&=[x_{2n+1}-x_{2n-1}]+[x_{2n-1}-x_{2n-3}]+\cdots+[x_3-x_1]+x_1\\&=a+[x_3-x_1]\left(1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)\\&=a+\frac{b-a}{2}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{4^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{4}}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 就得到极限 $A=a+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{b-a}{2}=\dfrac{a+2b}{3}$. □

解 2 (“攻其一点”) 其实只要利用解 1 中的

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1}),$$

就知道增量 $x_{n+1}-x_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 是公比为 $-\dfrac{1}{2}$ 的几何数列. 于是即有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}x_n&=\lim_{n\to\infty}[x_1+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})]\\&=\lim_{n\to\infty}[a+(b-a)(1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}})]\\&=a+(b-a)\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=a+(b-a)\cdot\frac{2}{3}=\frac{a+2b}{3}.\quad\square\end{aligned}$$

解 3 (线性差分方程方法) 本题的线性迭代可以看成为一个二阶线性齐次差分方程, 它与常微分方程中的二阶线性齐次微分方程非常相似, 有现成的解法.

将迭代公式写为二阶线性齐次差分方程

$$2x_n-x_{n-1}-x_{n-2}=0,\tag{1.21}$$

尝试求 $x_n=\lambda^n$ 形式的非零解, 其中底数 $\lambda\neq0$ 待定.

将上述形式代入方程 (1.21), 就得到关于 λ 的二次方程

$$2\lambda^2-\lambda-1=0,$$

解得 $\lambda_1=-\dfrac{1}{2}$, $\lambda_2=1$. 容易看出 λ_1 为方程提供了解 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ 以及它的倍数, 而 λ_2 提供了方程的常值解.

现在写出这两个解的线性组合

$$x_n=A\left(-\frac{1}{2}\right)^n+B, \tag{1.22}$$

其中待定常数 A,B 的选取应当由方程 (1.21) 的初始条件 $x_1=a$ 和 $x_2=b$ 来决定. 于是有线性齐次方程组

$$-\frac{1}{2}A+B=a,\quad \frac{1}{4}A+B=b.$$

从公式 (1.22) 可见 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$, 而只要从上述方程组消去 A 就得到 $B=\dfrac{a+2b}{3}$. 于是答案就是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B=\dfrac{a+2b}{3}$. □

解 4 (**矩阵方法**) 未学过矩阵的读者可在以后再看这个解法.

考虑下列二维向量的线性迭代:

$$\begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\x_{n-2}\end{pmatrix}.$$

求出右边的系数矩阵 $A=\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 的特征值为 $-\dfrac{1}{2}$ 和 1, 然后将它化为对角阵, 即 $A=S\left(\begin{smallmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)S^{-1}$, 其中 $S=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\-2&1\end{smallmatrix}\right)$, $S^{-1}=\dfrac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$. 于是就有

$$\begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}S^{-1}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\x_{n-2}\end{pmatrix}=\cdots=S\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix}^{n-2}S^{-1}\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}.$$

令 $n\to\infty$, 就得到右边的极限为

$$S\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}S^{-1}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}=\frac{a+2b}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

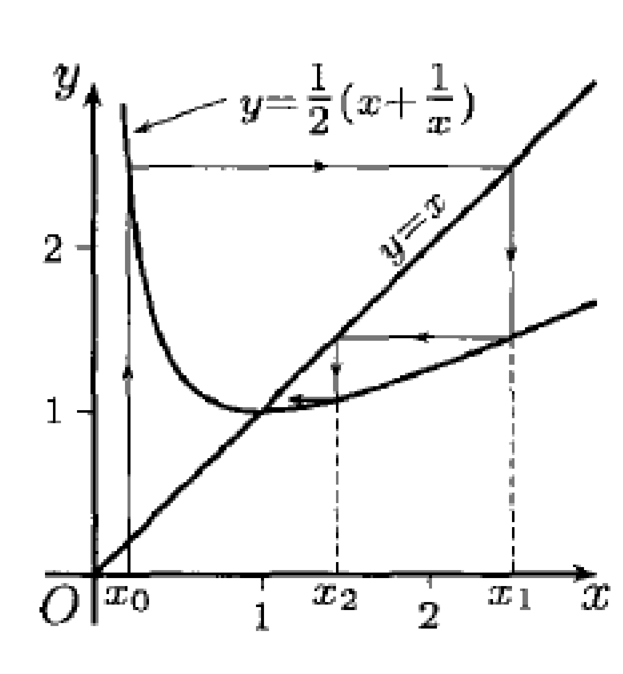
这就是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{a+2b}{3}$. □

注 以上的解 3 和解 4 中的方法都具有一般意义, 即可用于解许多类似的问题.

习题 149 设 $x_n\ (n=1,2,\cdots)$ 是用如下公式确定的数列:

$$x_0>0,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\ (n=0,1,2,\cdots),$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.



习题 149 的附图

解 这是按照 $x_{n+1}=f(x_n)$ 生成迭代数列的典型习题. 先从几何上来观察. 在右图中作出了 $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ 和 $y=x$ 的图像, 以及从某个 x_0 生成 x_1 和 x_2 的过程.

直观启示 $\{x_n\}$ 单调递减有下界, 证明如下.

利用平均值不等式 $A \geqslant G$ 得到

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \geqslant 1.$$

将上式左边除以 x_n, 并利用 $x_n^2 \geqslant 1$, 就有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x_n^2}) \leqslant 1,$$

故 $\{x_n\}$ 有下界 1, 且单调递减. 于是 $\{x_n\}$ 存在极限, 记极限为 C.

在迭代公式中令 $n \to \infty$ 得 $C = \frac{1}{2}(C + \frac{1}{C})$, 解得 $C = 1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. □

注 1 前面的习题 81 实际上也是迭代数列问题, 即从 $x_{n+1} = f(x_n)$ 生成一个数列. 只是其中只要求证明数列收敛. 在那里的解 3 中是先猜出极限后再做的. 这个极限就是方程 $f(x) = x$ 的根, 常称为函数 f 的不动点. 关于这方面的一般规律见后面的 §1.5.7 的第 5 点中的命题 1.9 和 1.10. 它们的证明见 [23] 的 §2.6.

注 2 如设 $a > 0$, 并用迭代公式 $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, 则就得到求平方根 $\sqrt{a}$ 的高效率的算法, 而且容易在电脑上实现. (参见 §1.5.7 的习题 639.2.)

例如对于 $a = 2$, 从 $x_1 = 1.5$ 出发, 就有 $x_2 = 1.416$, $x_3 = 1.414\,215$, 除最后一位外都是准确的. 这表明数列 $\{x_n\}$ 收敛于极限的速度很快. 为此只要如下分析即可. 为简单起见, 取初值 $x_1 > \sqrt{a}$. 这时所有 $x_n > \sqrt{a}$. 记 $\varepsilon_n = |x_n - \sqrt{a}\,|$ 为误差, 则就有

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} = |x_{n+1} - \sqrt{a}\,| &= \left|\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a}\right| \\ &= \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

由此可见, 若 ε_n 不超过 10^{-k} $(k > 0)$, 则 ε_{n+1} 就可能不超过 10^{-2k}. 这表明, 每迭代一次, 近似值的有效位数差不多会增加一倍. 在计算数学中将这样的算法称为二阶算法. 此外还可以指出, 实际上这就是关于方程 $x^2 = a$ 的牛顿求根法 (见 §2.15).

习题 150 证明: 设

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

则数列 x_n 和 y_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 有共同的极限

$$\mu(a,b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(数 a 和 b 的算术-几何平均数).

解 这是用迭代同时生成两个数列的问题.

若 a, b 中有 0, 则从 $n = 2$ 起, 所有 $x_n = 0$, 而 $y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$, 因此极限也是 0.

若 a, b 均不是 0, 则从题意可见只有当 $a, b > 0$ 时迭代才有意义.

不失一般性, 设 $b \geqslant a > 0$. 由平均值不等式 $A \geqslant G$ 及数学归纳法得 $a \leqslant x_2 \leqslant y_2 \leqslant b$. 继续下去就有

$$a = x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant \cdots \leqslant y_3 \leqslant y_2 \leqslant y_1 = b.$$

由此可见数列 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, $\{y_n\}$ 单调递减有下界, 因此都是收敛的. 记它们的极限为 $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $B = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, 并在迭代式 (的任何一个) 中取 $n \to \infty$, 就得到 $A = B$. □

注 算术–几何平均值是高斯发现的, 它与全椭圆积分有关, 并在 1976 年后发展成为高效率的 AGM 算法 (AGM 就是算术几何平均值的英文缩写). (参见 [23] 的 §8.7.1, 包括关于圆周率的 Salamin–Brent 算法的介绍.) 从恒等式

$$y_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(y_n - x_n)^2$$

即可推出误差限 $\varepsilon_n = y_n - x_n$ 满足估计

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{(y_n - x_n)^2}{4(y_{n+1} + x_{n+1})} \approx \frac{1}{8\mu(a,b)}\varepsilon_n^2,$$

可见它与习题 149 的注 2 中所说的求平方根算法同属于二阶算法.

1.2.9 补注 (习题 76, 75(b), 136–137, 135)

在这个补注中有以下内容:

1. 介绍极限计算中的代入法, 然后对不定式作浏览;
2. 解决几个习题 76, 75(b), 136–137, 它们都具有某些特殊性质和较大的难度;
3. 对上下极限作补充说明, 其中用习题 135 为例给出多种解法.

1. 极限计算中的代入法

在数列的极限计算中经常使用代入法 (也称为深入法), 其中最简单的就是极限的四则运算法则. 这就是在已知 $x_n \to a$, $y_n \to b$ 时就有

$$(1)\ x_n \pm y_n \to a \pm b, \qquad (2)\ c\,x_n \to c\,a,$$
$$(3)\ x_n y_n \to a\,b, \qquad (4)\ \frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}\ (b \neq 0).$$

也就是说只需要将极限值“代入”即可.

此外, 如习题 91, 即从 $x_n \to a$ 有 $|x_n| \to |a|$, 这也只要代入. 又若将习题 63 改写为

$$a^{\frac{1}{n}} \to a^0 = 1,$$

又将习题 57 改写为

$$2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} \to 2^1 = 2,$$

则都属于可用代入法求出的极限. 当然这已经超出了四则运算的范围.

有时所遇到的极限计算问题虽然不能直接用代入法, 但作些变换后即可. 例如前面的习题 49 就是如此.

此外我们还可以将 $x_n \to \infty$ 时就有 $\frac{1}{x_n} \to 0$ 看成为一种代入法, 并简记为 $\frac{1}{\infty} = 0$. 于是如习题 46 (即求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10\,000n}{n^2+1}$) 和习题 48 也成为用代入法的例子.

为了建立这类常见的代入运算的合理性, 下面在四则运算法则的基础上, 以命题形式列出一些常见情况以便于应用, 并称之为代入法命题.

命题 1.4 (代入法命题)

(1) 设 $p(x)$ 是 x 的多项式, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} p(x_n) = p(a)$;

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{a}$;

(3) 设 $a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^b$;

(4) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^b = a^b$;

(5) 设 $b > 0$, $b \neq 1$, $\{x_n\}$ 为正数列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \log_b x_n = \log_b a$;

(6) 设 $\{x_n\}$ 为正数列, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = a^b$.

证 为简明起见只写出证明概要, 请读者补足细节.

(1) 只需要有限次使用数列极限的四则运算法则中的法则 (1)–(3) 即可.

(2) 这可以作为一个独立的练习题来做, 也可以作为 (4) 中的 $b = \dfrac{1}{2}$ 的特例得到 (还可参看 §1.9 的习题 802(d) 的解 1).

(3) 从 $|a^{x_n} - a^b| = a^b \cdot |a^{x_n - b} - 1|$ 出发, 按照极限的 ε–N 定义即可解决.

(4) 直接解不等式 $-\varepsilon < x_n^b - a^b < \varepsilon$ 即可, 其中不妨设 $\varepsilon \in (0, a^b)$ 已经成立.

(5) 从 $|\log_b x_n - \log_b a| = \left|\log_b \dfrac{x_n}{a}\right| < \varepsilon$ 出发, 分别对 $b > 1$ 和 $0 < b < 1$ 进行讨论即可解决.

(6) 根据 (3) 我们只需要证明 $y_n \log_a x_n \to b$, 又根据 (5) 得到 $\log_a x_n \to 1$, 因此结论成立. (前面的 (2),(3),(4) 又都是 (6) 的特例.) □

实际上在前面的解题过程中往往可以用代入法来简化其中的证明. 例如: 习题 60 的解 2 与解 3 中有 $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k \to 1$ (这对任何实数 k 都适用), 习题 146 中有 $\ln \dfrac{n+1}{n} \to 0$, 习题 147 的解 2 中有 $\ln \dfrac{2n+1}{n+1} \to \ln 2$.

此外, 有了代入法命题 1.4 之后, 还可以对许多习题提供新的解法.

例如, 习题 64 的 $\dfrac{\log_a n}{n} = \log_a \sqrt[n]{n} \to 0$ 就可以看出是习题 65 的 $\sqrt[n]{n} \to 1$ 的简单推论. 又如, 习题 140, 即乘积形式的柯西命题, 只要取对数, 就自然归结为习题 138 了. 同样习题 142 也可以取对数来解决.

当然对于已经学过连续函数等知识的读者来说, 代入法是自然成立的. 但上面的许多例子说明在学习数列极限理论时用代入法实际上是可以证明的. 同时它为不定式的学习提供了明显的对照和背景.

在说明了代入法之后, 下面对极限计算中的不定式作浏览.

不能直接用代入法的极限计算问题很多, 其中主要就是各种类型的不定式.

本节从习题 46 起就出现了 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 和 $\infty - \infty$ 这两种不定式. 当然其中不少习题在作了适当变化后仍然可以用代入法解决. 然而如习题 58 (即求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$) 等就更复杂一些, 它们不是简单的代入法就能解决的.

其他类型的不定式还有 $0 \cdot \infty$. 例如习题 62 的 $nq^n \to 0$ (其中 $|q| < 1$) 就是趋于 ∞ 的因子 n 与趋于 0 的因子 q^n 的乘积, 因此属于 $0 \cdot \infty$ 型的不定式.

此外, 若将 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式的分子和分母通过倒数变换交换位置, 则就得到 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 它的最重要的出现就是在微分学的导数定义中.

除此之外, 从幂指函数还会产生三种类型的不定式: 1^∞, ∞^0 和 0^0.

例如数 e 的定义是通过习题 69 中的两个数列的极限得到的. 它们都是 1^∞ 型的不定式. 习题 66 可改写成为 0^0 型的不定式, 它的分母可看成为 ∞^0 型的不定式.

这里要指出, 这三种不定式在取对数 (也就是用命题 1.4 的代入法) 之后, 它们都可以转换为 $0\cdot\infty$ 型不定式. $0\cdot\infty$ 与 $\infty-\infty$ 型不定式都可以转换为 $\frac{\infty}{\infty}$ 或 $\frac{0}{0}$ 型. 下面是将 $\infty-\infty$ 转换的一种方法, 它可示意地写为

$$\infty-\infty=\frac{1}{\frac{1}{\infty}}-\frac{1}{\frac{1}{\infty}},$$

然后通分, 就可能得到 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 于是各种类型的不定式都有可能在适当变换之后用习题 138 (即柯西命题) 或习题 143 (即施托尔茨定理) 来解决. 它们虽然不是万能的, 但至少提供了经常有效的计算方法.

下面我们再指出, 利用代入法命题 1.4 和前面的习题 71, 就不难计算出以下各个极限. 它们都是 1^∞ 型的不定式.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$; (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{c}{n}\right)^n$ (c 为常数).

2. 习题 76, 75(b), 136–137

用习题 71 和代入法就很容易解决前面遗留下来的习题 76.

习题 76 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\ (a>0)$.

解 本题是 $0\cdot\infty$ 型的不定式. 作代换 $u_n=a^{\frac{1}{n}}-1$, 于是有 $u_n\to 0$, 同时得到

$$n(a^{\frac{1}{n}}-1)=\ln a\cdot\frac{u_n}{\ln(1+u_n)},$$

从而转换为 $\frac{0}{0}$ 型的不定式, 并只需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}=1$.

利用习题 71 的两个结论就可以推出当 $u_n\to 0$ 时有

$$\lim_{n\to\infty}(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}=\mathrm{e}.$$

(这里又将问题转化为 1^∞ 型的不定式.) 最后用代入法命题 1.4 就得到所要求的

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+u_n)}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left[(1+u_n)^{\frac{1}{u_n}}\right]=\ln\mathrm{e}=1.\quad\square$$

注 已经学过函数极限的读者无疑知道更为一般的 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ 的结论 (见习题 541), 其特例是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$. 由函数极限的归结原理知道对于数列 $x_n\to 0$, $x_n\neq 0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{x_n}-1}{x_n}=\ln a$. 若取 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 则就是习题 76.

习题 75(b) 是因"错位"而成的难题. 学过微分学的读者都知道, 只要用导数工具就容易解决 (即 §2.7 中的习题 1289(a)). 在目前可证明如下.

习题 75(b) 证明不等式: $\mathrm{e}^\alpha>1+\alpha$, 其中 α 是非零实数.

解 首先指出可以从习题 69 得出稍弱一点的不等式 $\mathrm{e}^\alpha\geqslant 1+\alpha\ (\alpha\neq 0)$.

分 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 两种情况来证明.

若 $\alpha>0$ 且为有理数, 可设 $\alpha=\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 都是正整数, 则从习题 69 知道有

$$\mathrm{e}>\left(1+\frac{1}{q}\right)^q,$$

然后利用幂函数 $x^{\frac{p}{q}}$ 在 $x>0$ 时严格单调递增, 就有

$$\mathrm{e}^\alpha=\mathrm{e}^{\frac{p}{q}}>\left(1+\frac{1}{q}\right)^p>1+\frac{p}{q}=1+\alpha.$$

对于 $\alpha<0$ 的情况, 由于 $\alpha\leqslant -1$ 时表达式 $1+\alpha$ 已经小于等于 0, 可见只要在 $-1<\alpha<0$ 的条件下来证明即可. 设 $\alpha=-\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 为正整数, 且有 $q>1$.

从习题 69 知道对大于 1 的正整数 q 有

$$\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^q,$$

然后利用负指数的幂函数 $x^{-\frac{p}{q}}$ 在 $x>0$ 时严格单调递减, 就有

$$\mathrm{e}^\alpha=\mathrm{e}^{-\frac{p}{q}}>\left(1+\frac{1}{q-1}\right)^{-p}=\left(1-\frac{1}{q}\right)^p>1-\frac{p}{q}=1+\alpha.$$

(在 $\alpha>0$ 时最后一步只要用二项式定理, 但在 $-1<\alpha<0$ 时的最后一步需要用到的是习题 7 中的伯努利不等式.)

这样就已经对于所有不等于 0 的有理数 α 得到了 $\mathrm{e}^\alpha>1+\alpha$. 对于 α 为无理数的情况, 可以取一个有理数列 $\{\alpha_n\}$, 使得 $\alpha_n\to\alpha$, 然后对于不等式 $\mathrm{e}^{\alpha_n}>1+\alpha_n$ 取极限 (其中包括代入法命题 1.4) 就可以得到

$$\mathrm{e}^\alpha\geqslant 1+\alpha\ \ (\alpha\neq 0). \tag{1.23}$$

下面证明在 (1.23) 中不可能成立等号. 其中的主要工具就是前面已经证明过的习题 76 中的极限等式.

用反证法. 分 $-1<\alpha<0$ 和 $\alpha>0$ 两种情况来证明.

(1) 设有某个 $\alpha_0\in(-1,0)$ 使得 $\mathrm{e}^{\alpha_0}=1+\alpha_0$ 成立. 这时

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\alpha_0+\frac{1}{n}}-1-\left(\alpha_0+\frac{1}{n}\right)&=(1+\alpha_0)\cdot(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)-\frac{1}{n}\\&=\frac{(1+\alpha_0)\cdot n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)-1}{n}.\end{aligned}$$

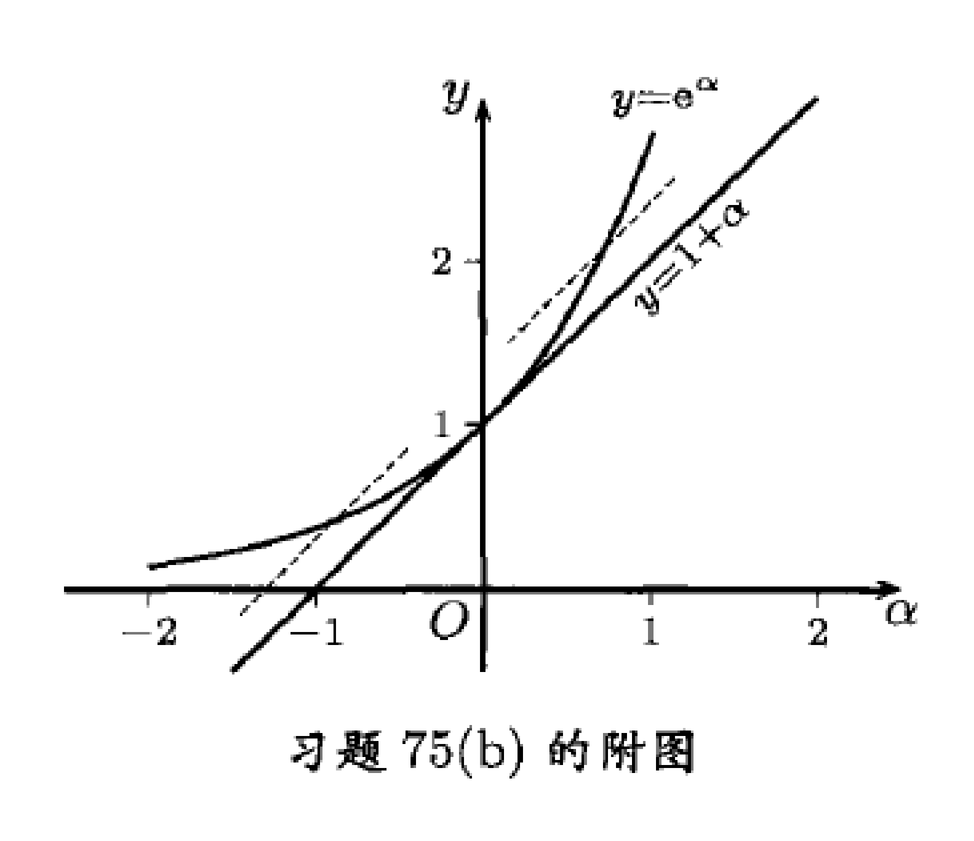
在习题 76 中令 $a = \mathrm{e}$, 可见上面的最后一个分式的分子当 $n \to \infty$ 的极限为 $\alpha_0 < 0$, 因此当 n 充分大时上述分式小于 0. 这样就证明了当 n 充分大时, 对于 $\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{n}$ 来说, 得到了与不等式 (1.23) 相矛盾的结果. 因此 $-1 < \alpha < 0$ 时其中不可能成立等号.

(2) 现在设有某个 $\alpha_1 > 0$ 使得 $\mathrm{e}^{\alpha_1} = 1 + \alpha_1$ 成立. 这时

$$\mathrm{e}^{\alpha_1 - \frac{1}{n}} - 1 - \left(\alpha_1 - \frac{1}{n}\right) = (1+\alpha_1)\cdot(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1) + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{(1+\alpha_1)\cdot n(\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}} - 1) + 1}{n}.$$

同样利用习题 76 (令其中的 $a = \mathrm{e}^{-1}$), 可见上式的最后一个分式的分子当 $n \to \infty$ 的极限为 $-\alpha_1 < 0$, 因此当 n 充分大时上述分式小于 0. 这样就证明了当 n 充分大时, 对于 $\alpha = \alpha_1 - \frac{1}{n}$ 来说, 得到了与不等式 (1.23) 相矛盾的结果. 因此 $\alpha > 0$ 时其中也不可能成立等号. □



习题 75(b) 的附图

注 最后对于上述解法的来历作一点解释. 学过导数的读者不难看出, 上述解法的第二步, 即证明 (1.23) 中不可能成立等号, 其中的思想方法来自于曲线 $y = \mathrm{e}^\alpha$ 的切线斜率在 $\alpha > 0$ 时大于 1, 而在 $\alpha < 0$ 时小于 1. 同时 $y = 1 + \alpha$ 是斜率恒等于 1 的直线.

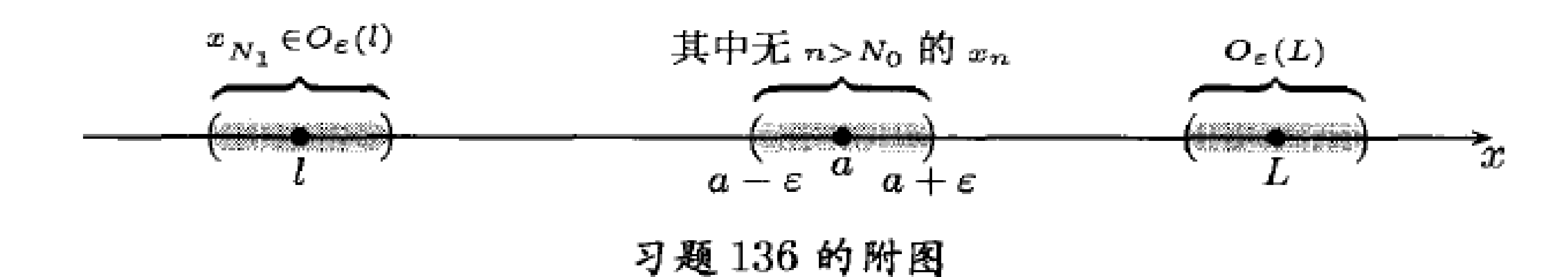
如左图所示, 于 $\alpha \neq 0$ 时 $\mathrm{e}^\alpha > 1 + \alpha$, 同时如两条虚线所示, 如果曲线 $y = \mathrm{e}^\alpha$ 与斜率为 1 的直线相交 ($\alpha \neq 0$), 则就不可能完全在该直线的上方. 这就是上述证明的几何背景.

习题 136 的结论很有趣, 它给出了数列的聚点充满一个区间的一个充分条件 (但不是必要条件, 例如见习题 118). 此外, 习题 136 的证明也是几何思维的一个典型例子.

习题 136 证明: 如果数列 x_n $(n = 1, 2, \cdots)$ 有界, 且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0,$$

那么这个数列的聚点必充满在下极限 $l = \varliminf_{n\to\infty} x_n$ 和上极限 $L = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$ 之间, 即区间 $[\,l, L\,]$ 内的任意一个数都是这个数列的聚点.



习题 136 的附图

解 若 $l = L$ 则结论显然成立.

设 $l < L$, 则只要对于任意的 $a \in (l, L)$, 证明 a 是 $\{x_n\}$ 的聚点即可. 这等价于证明在 a 的任何 ε 邻域中存在数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项.

用反证法. 设在 a 的某个 ε 邻域中只有 $\{x_n\}$ 中的有限多项, 记其中的最大下标为 N_0. 又不妨设 ε 充分小, 使得 a, l, L 的 ε 邻域都不相交 (参看附图).

由于 $x_{n+1} - x_n \to 0$, 存在 $N > N_0$, 当 $n > N$ 时

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

由于下极限 l 是聚点, 存在 $N_1 > N$, 使得 $|x_{N_1} - l| < \varepsilon$.

现在我们来证明数列 $\{x_n\}$ 中从 x_{N_1} 起的所有项都在点 $a - \varepsilon$ 的左边.

用数学归纳法. 由于 $O_\varepsilon(l) \cap O_\varepsilon(a) = \varnothing$, 因此 $x_{N_1} \leqslant a - \varepsilon$.

设 $n = k \geqslant N_1$ 时有 $x_k \leqslant a - \varepsilon$, 则 $x_{k+1} = x_k + (x_{k+1} - x_k) < a - \varepsilon + \varepsilon = a$. 然而由于在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 中没有下标 n 大于 N_0 的任何 x_n, 因此只能是 $x_{k+1} \leqslant a - \varepsilon$. 归纳法的证明结束.

这表明在 $(a - \varepsilon, L]$ 中至多只有数列 $\{x_n\}$ 中的有限多项. 由于上极限 L 也是数列 $\{x_n\}$ 的聚点, 因此这是不可能的. □

下一个习题的条件和结论对于初学者可能比较陌生. 应当指出, 它是极限理论中的一个重要命题, 在数学的多个分支中有用, 其证明的思想方法也值得学习.

习题 137 设数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots$ 满足条件

$$0 \leqslant x_{m+n} \leqslant x_m + x_n \quad (m, n = 1, 2, \cdots),$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{n}$ 存在.

解 先证 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 收敛的必要条件: 有界性. 因 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 非负, 只要证明它有上界.

为此需考察 x_n 的变化趋势. 注意题设的条件是对下标作分解时的不等式估计. 仿此作 x_n 的下标分解: 暂取某个固定的正整数, 将它记为 t, 用 t 除 n 得 $n = qt + r$ $(r = 0, 1, \cdots, t-1)$. 这样就将 n 分成 qt 与 r 两部分, 它们都随 n 而变化. 当 $n \to \infty$ 时 r 是有界量, qt 是无穷大量, q 也是无穷大量.

依此将 x_n 分成对应的两部分, 得到如下估计 (其中定义 $x_0 = 0$):

$$x_n = x_{qt+r} \leqslant x_{qt} + x_r \leqslant qx_t + x_r \leqslant qx_t + rx_1,$$

其中最右边一式的第二项 rx_1 为有界量.

现在来估计 $\dfrac{x_n}{n}$. 用上述结果有

$$\frac{x_n}{n} \leqslant \frac{qx_t + rx_1}{n} = \frac{x_t}{t} \cdot \frac{qt}{n} + \frac{rx_1}{n} \leqslant \frac{x_t}{t} + \frac{rx_1}{n},$$

其中 $\frac{x_t}{t}$ 为常量, $\{\frac{rx_1}{n}\}$ 为无穷小量, 于是知道 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 是非负有界数列.

在上式中令 $n \to \infty$ 取上极限得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n} \leqslant \frac{x_t}{t} + \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{rx_1}{n} = \frac{x_t}{t}.$$

由于上式左边是一个确定的数, 而右边的 t 可取到任何正整数, 对上式令 $t \to \infty$ 取下极限, 就得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n} \leqslant \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{x_t}{t} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{x_n}{n}.$$

这表明上极限等于下极限.

由于 $\{\frac{x_n}{n}\}$ 为有界数列, 它的上下极限相等就表明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ 存在. □

注 本题的结论还可以加强为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\inf\{\frac{x_n}{n}\}$. 此外, 数列非负的条件可以去掉. 这时上述极限以及下确界可以取到 $-\infty$.

3. 关于上下极限的补充

上下极限是数列极限的必要组成部分, 这里对其基本内容作一点补充.

首先, 上下极限有三种等价的描述方式, 或者说有三种等价的定义. 给定一种定义后, 其余两种定义的内容可以命题或定理的形式得到证明.

第一种定义就是《习题集》在 §1.2 开始时所采取的, 即对于给定数列将上极限定义为其最大聚点, 将下极限定义为其最小聚点. 在一般的教科书中会证明它们的存在性. 此外从这个定义可以推出: 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=-\infty$, 则就是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$; 又若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n=+\infty$, 则就是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

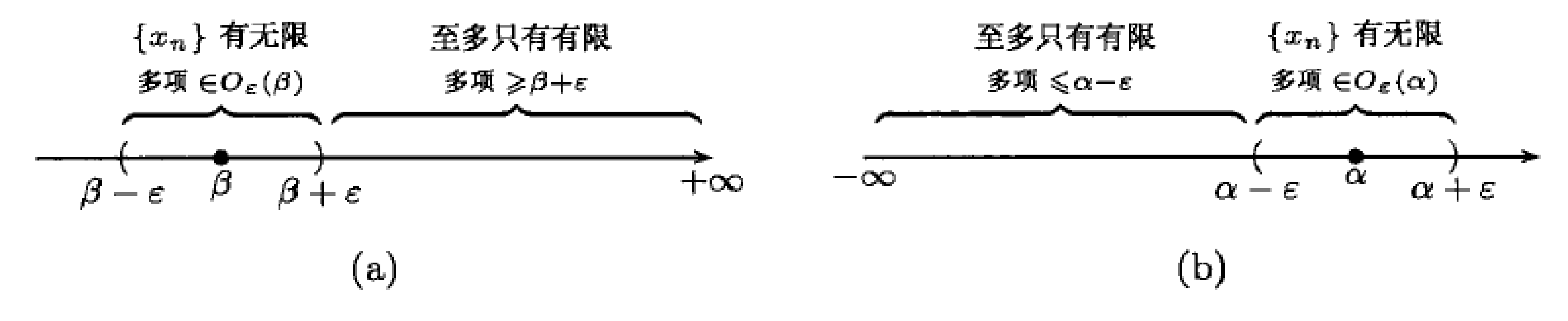
第二种定义就是用 ε–N 语言, 也就是极限定义的推广. 对于上下极限为有限数的情况可用逻辑记号较简短地表述如下 (其中 $\forall$ 读作 "对每一个", $\exists$ 读作 "存在"):

$$\text{(I) }\beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\iff\begin{cases}(1)\quad\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N: x_n<\beta+\varepsilon;\\(2)\quad\forall\varepsilon>0,\forall N',\exists n'>N':\beta-\varepsilon<x_{n'}<\beta+\varepsilon.\end{cases}$$

$$\text{(II) }\alpha=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\iff\begin{cases}(1)\quad\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N:\alpha-\varepsilon<x_n;\\(2)\quad\forall\varepsilon>0,\forall N',\exists n'>N':\alpha-\varepsilon<x_{n'}<\alpha+\varepsilon.\end{cases}$$

从聚点定义容易证明上述结论. 对于以无穷大为上下极限的情况不难写出相应的结果并作出证明, 读者可以作为练习来做.

下面是上下极限为有限数时的几何示意图:



上下极限第二定义的示意图

第三种定义就是下列表达式:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=\lim_{n\to\infty}\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\},\quad\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n=\lim_{n\to\infty}\inf\{x_n,x_{n+1},\cdots\},$$

它们在证明上下极限的某些性质时往往可以将证明归结为上述定义右边的计算问题, 有其方便之处.

在前面讲解习题 131–134 时我们是按照上下极限的第一定义来进行的, 下面将习题 135 作为例题给出其多种解法 (其中同样略去极限号 lim 下的 $n\to\infty$).

习题 135 证明, 如果 $x_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$, 且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{x_n} = 1,$$

那么数列 $\{x_n\}$ 收敛.

解 1 用第一种定义, 即上下极限的聚点定义. 由于等式左边的乘积不允许是不定式 $0\cdot\infty$, 而右边是 1, 因此可以推知两个上极限都是正有限数.

这时 $\overline{\lim}\,\dfrac{1}{x_n} = \beta \in (0,+\infty)$ 是数列 $\{\dfrac{1}{x_n}\}$ 的最大聚点, 即有子列 $\dfrac{1}{x_{p_n}} \to \beta$, 于是就有 $x_{p_n} \to \dfrac{1}{\beta}$, 且可知这也就是数列 $\{x_n\}$ 的最小聚点. 这样就得到

$$\underline{\lim}\, x_n = \frac{1}{\overline{\lim}\,\dfrac{1}{x_n}}, \tag{1.24}$$

然后再利用题中的等式条件就得到所要求的 $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$. □

(以下几个解法中只指出如何证明 (1.24).)

解 2 用第二种定义, 即上下极限的 ε–N 定义. 记 $\alpha = \underline{\lim}\, x_n \in (0,+\infty)$, 则对任意的 $\varepsilon\in(0,\alpha)$, 存在 N, 使得当 $n>N$ 时有 $x_n > \alpha-\varepsilon$. 由此可见同时有 $\dfrac{1}{x_n} < \dfrac{1}{\alpha-\varepsilon}$. 因为上式右边可任意接近 $\dfrac{1}{\alpha}$, 因此就有

$$\overline{\lim}\,\frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

又因有子列 $x_{p_n} \to \alpha$, 于是也有 $\dfrac{1}{x_{p_n}} \to \dfrac{1}{\alpha}$, 因此上述不等式成立等号, 即得 (1.24). □

解 3 用第三种定义. 记

$$\beta_n = \sup\{\frac{1}{x_n}, \frac{1}{x_{n+1}}, \cdots\},$$

则根据上确界定义, 对于 $p=0,1,2,\cdots$ 有 $\dfrac{1}{x_{n+p}} \leqslant \beta_n$, 也就是 $x_{n+p} \geqslant \dfrac{1}{\beta_n}$. 同时对于任何 $\varepsilon\in(0,\beta)$, 存在某个非负整数 p_0, 使得 $\beta_n - \varepsilon < \dfrac{1}{x_{n+p_0}}$, 也就是 $x_{n+p_0} < \dfrac{1}{\beta_n-\varepsilon}$. 这样就已经得到

$$\inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\} = \frac{1}{\beta_n} = \frac{1}{\sup\{\dfrac{1}{x_n}, \dfrac{1}{x_{n+1}}, \cdots\}}.$$

然后令 $n\to\infty$, 就得到所要求的公式 (1.24). □

解 4 当然也可以将问题归结于习题 132 中的更一般的运算法则来解决. 令 $y_n = \dfrac{1}{x_n}$, 则如前所说, 所有出现的上下极限都是正有限数, 因此就可以从习题 132(a),(b) 得到

$$\underline{\lim}\,(x_n y_n) = 1 \leqslant \underline{\lim}\, x_n \cdot \overline{\lim}\,\frac{1}{x_n} \leqslant \overline{\lim}\,(x_n y_n) = 1,$$

可见 (1.24) 成立. □

注 关于正数列的公式 (1.24), 及其对称的公式 $\overline{\lim}\, x_n = \dfrac{1}{\underline{\lim}\,\dfrac{1}{x_n}}$ (在习题 132(a) 的解中已经用过), 它们对于上下极限为 0 和 $+\infty$ 的情况仍然成立.

§1.3 函数的概念 (习题 151–236)

内容简介 函数是数学分析的主要对象. 本节将中学数学关于函数的知识加以复习和扩充, 为后面的学习作准备. 其中的习题绝大多数都比较简单, 因此在多数情况我们只作简要说明. 下面按照内容分成几个小节来讲解. 在最后的补注小节中证明关于周期函数的两个命题.

1.3.1 关于函数概念的基本训练 (习题 151–196)

习题 151–170 是给定函数表达式后求其定义域, 后 5 题则还要求其值域.

这里的定义域就是所谓的"自然定义域". 由于数学分析是在实数系内讨论问题, 因此在实数范围内使得表达式有意义的点的全体就称为该函数的自然定义域.

这些习题中的函数都是初等函数, 即从基本初等函数出发, 经过有限次四则运算和复合运算得到的函数. 这在中学数学和一般的数学分析教科书中都已经作了介绍. 下面只分析一个习题.

习题 170 求函数 $y=(-1)^x$ 的定义域和值域.

解 当指数 x 为整数时 $(-1)^x$ 总有意义, 函数值 $(-1)^x$ 不是 1 就是 -1. 其次当指数 x 为既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 时, 其中取分母 q 为正整数, 则当 q 为奇数时, 分子 p 只能是偶数, 因此 $(-1)^x=1$; 而当 q 为偶数时, 分子 p 只能是奇数, 因此 $(-1)^x$ 不是实数.

当指数 x 为无理数时, 用欧拉公式 (参见 §1.10.1 的习题 819 的底注) 有 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, 于是 $(-1)^x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}=\cos\pi x+\mathrm{i}\sin\pi x$, 因此不是实数.

综合以上讨论, 可见本题的函数 $(-1)^x$ 的定义域为所有整数和分母 q 为奇数的既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 的全体. 又可见该函数的值域是二元集 $\{-1,1\}$. □

注 由此题可见初等函数的定义域也可能是很复杂的. 习题 158, 162, 165 等也是如此. 只是需要指出, 在数学分析中主要研究在区间上有定义的函数.

在接下来的习题 171–177 中, 前 4 题是从几何与物理背景得到的函数, 要求写出其表达式, 并作出图像. 后三题是对于符号函数 $\operatorname{sgn} x$, 取最大整数函数 $[x]$ 和不超过 x 的素数个数形成的函数 $\pi(x)$ $(0\leqslant x\leqslant 20)$ 作出它们的图像. 应当指出, 其中 $\operatorname{sgn} x$ 和 $[x]$ 是数学分析中的常用函数, 初学者应当重视.

下面先给出习题 171 的解答.

习题 171 如附图所示, 在三角形 ABC 中, 底 $AC=b$, 高 $BD=h$, 内接矩形 $KLMN$ 的高 $NM=x$. 求矩形 $KLMN$ 的周长 P 和它的面积 S 关于 x 的函数式, 并作函数 $P=P(x)$ 和 $S=S(x)$ 的图像.

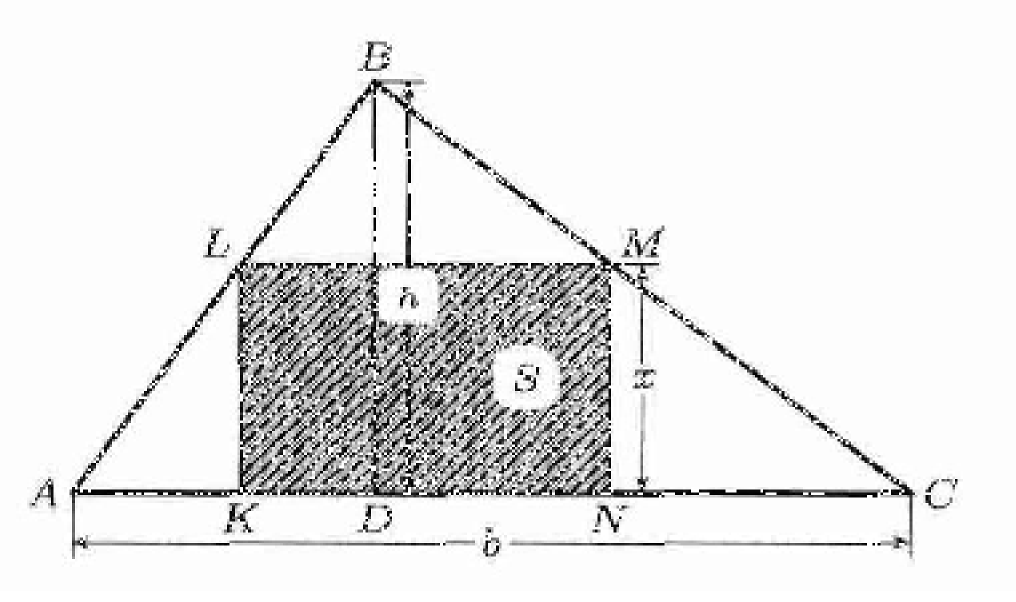
解　利用三角形 LBM 与三角形 ABC 相似, 就可求出矩形的边 $LM = b\left(1-\dfrac{x}{h}\right)$.

于是就可以得到矩形 $KLMN$ 的周长和面积分别为

$$P(x) = 2LM + 2MN = 2\left(1-\frac{x}{h}\right)b + 2x$$

$$= 2\left(1-\frac{b}{h}\right)x + 2b \ (0 < x < h),$$

$$S(x) = LM \cdot MN = b\left(1-\frac{x}{h}\right)x \ (0 < x < h).$$



习题 171 的附图

它们的定义域为 $0 < x < h$ (其图像从略). □

注　$P(x)$ 和 $S(x)$ 的图像分别是直线和抛物线, 但事先不易想到的是从 $P(x)$ 的表达式可以发现, 当 $b > h$ 时, 周长 $P(x)$ 随着 x 的增加而单调递减 (即附图中的情况), 而当 $b < h$ 时则相反.

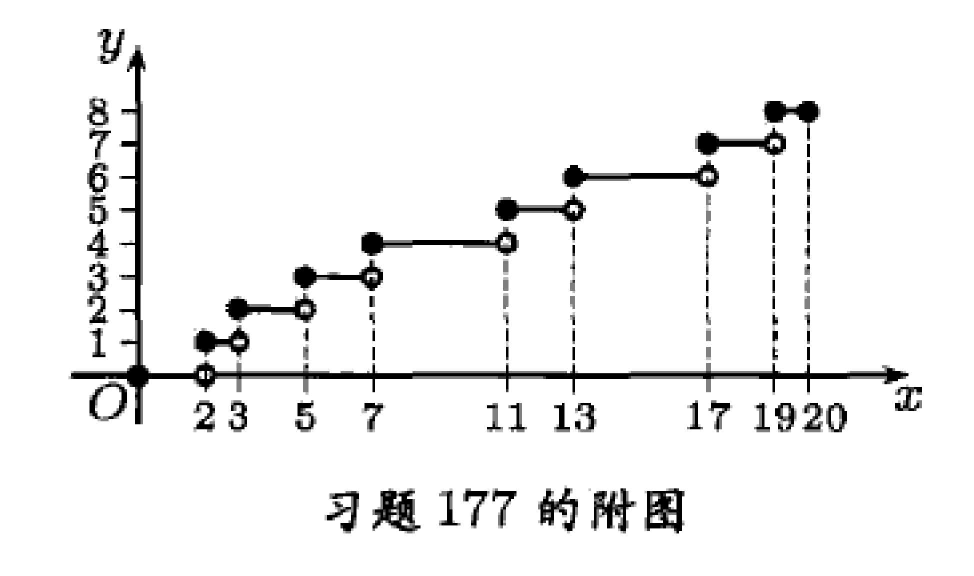
这里还要指出, 在应用问题中求出的函数的定义域, 一般来说未必是该函数的自然定义域.

习题 177　设 $y = \pi(x)$ $(x \geqslant 0)$ 是不超过数 x 的素数的个数, 画出这个函数当自变量在 $0 \leqslant x \leqslant 20$ 范围内的图像.

解　列出不超过 20 的所有素数, 即 $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$, 就可以确定 $\pi(x)$ 是如下列表的分段定义的函数:

x	$[0,2)$	$[2,3)$	$[3,5)$	$[5,7)$	$[7,11)$	$[11,13)$	$[13,17)$	$[17,19)$	$[19,20]$
$\pi(x)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8

然后就可以作出附图中的图像. 下面顺便介绍与函数 $\pi(x)$ 有关的一些故事.



习题 177 的附图

函数 $\pi(x)$ 是了解素数分布的重要工具. 由于素数个数无穷, 因此当然有

$$\lim_{x \to +\infty} \pi(x) = +\infty.$$

虽然素数在正整数中的分布规律是极其不规则的, 但是如果将 $\pi(x)$ 除以 x, 则就可以研究在不超过 x 的正整数中素数出现的平均频率. 例如有:

$$\frac{\pi(20)}{20} = \frac{8}{20} = 0.4, \ \frac{\pi(100)}{100} = \frac{25}{100} = 0.25, \ \frac{\pi(1000)}{1000} = \frac{168}{1000} = 0.168.$$

高斯发现, 这个平均频率当 x 越来越大时, 呈现出与自然对数函数 $\ln x$ 的倒数越来越相似的规律性. 用函数极限的等价记号 (见 §1.5) 写出, 这就是著名的素数定理:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \ (x \to +\infty).$$

在高斯提出这个猜测的一百多年之后, 即在 1896 年, 这个素数定理才得到证明, 又在 1949 年找到了它的初等 (但可能更为困难的) 证明. 读者可以在著名的科普读物《什么是数学》[3] 中找到有关的材料. □

习题 178–196 都是对于一些比较简单的函数的计算题. 建议读者若有可能的话可以边做题边从几何上考虑它们的图像. 这样将代数与几何结合起来的学习方法在数学分析中是值得提倡的.

1.3.2 拟合与插值 (习题 197–202)

这里的前 4 题是典型的拟合与插值问题, 最后两题也与此有关.

在实际问题中往往事先不知道某个函数的表达式, 而只能通过观察或实验手段确定该函数在若干个特殊自变量值处的函数值. 以此为条件, 如何在某一类函数中找出一个满足该条件的具体函数, 这就是拟合问题. 拟合的目的是为了得到在其他自变量值处的函数值, 这就是插值问题. 因此这是两个密切相关的问题.

为此我们介绍在这方面最为基本的拉格朗日插值公式.

问题的一般提法如下. 设在互不相等的 $n+1$ 个点 x_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 上给定值 $f(x_k)$, 试求不超过 n 次的多项式 $L_n(x)$, 使得它满足条件:

$$L_n(x_k)=f(x_k),\ k=0,1,\cdots,n.$$

这对于实验科学是非常有用的, 即在不知道函数 f 的表达式的情况下, 如果能够测定它在有限个点上的值, 则就可以用多项式来近似代替 f.

为此先考虑所要求满足的条件为

$$f(x_0)=1,\ f(x_k)=0,\ k=1,\cdots,n. \tag{$*$}$$

显然乘积 $(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 就满足 $(*)$ 中的后 n 个条件. 于是

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$$

就满足条件 $(*)$.

采用与求和记号 $\sum$ 相应的求积记号 $\prod$ 可以将多项式 $l_0(x)$ 改记为

$$l_0(x)=\prod_{k=1}^{n}\frac{x-x_k}{x_0-x_k}.$$

然后再考虑在点 x_j 处等于 1 而在其余 n 个点 x_k $(k\neq j)$ 处为 0 的多项式. 采用类似的方法可见这样的多项式可记为

$$l_j(x)=\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}.$$

最后将这 $n+1$ 个多项式分别乘以 $f(x_j)$ $(j=0,1,\cdots,n)$ 并求和就得到满足原来的插值条件的 n 次多项式:

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}f(x_j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\frac{x-x_k}{x_j-x_k},$$

它就是拉格朗日插值公式.

注 插值问题的以上解法常称为“分而治之”. 这种方法最早出现于约公元四世纪时我国古代的《孙子算经》中 (其原文见 [14]), 国际上将由该法导出的结论称为中国剩余定理. 它在今天的计算机程序设计中有用 (参看 [12] 的第二卷半数值算法的 §4.3.2).

习题 197–199 可以分别用 $n=2,3,4$ 的拉格朗日公式直接得到. 下面给出其中最后一题的计算, 所用的符号同前.

习题 199 已知 $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$, 求三次函数
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

解 对于 $n=3$ 计算如下 (其中下标分别为 $-1,0,1,2$). 由于 $f(-1)=0$, $l_{-1}(x)$ 不必计算.

$$l_0(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)}=\frac{1}{2}(x^3-2x^2-x+2),$$
$$l_1(x)=\frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)}=-\frac{1}{2}(x^3-x^2-2x),$$
$$l_2(x)=\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{6}(x^3-x).$$

最后得到的答案为

$$\begin{aligned}L_3(x)&=0\cdot l_{-1}(x)+2\cdot l_0(x)-3\cdot l_1(x)+5\cdot l_2(x)\\&=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2.\quad\square\end{aligned}$$

适用于 $n+1$ 个点的拉格朗日多项式的次数未必是 n. 事实上从上面的推导可见, 对于 $n+1$ 个点来说, 只能说 $L_n(x)$ 的次数不高于 n. 例如, 习题 201 表明, 当 x_k $(k=0,1,\cdots,n)$ 和 $f(x_k)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 分别为算术级数时, 则 $L_n(x)$ 的次数为 1.

习题 202 则是对于指数函数的相应规律. 习题 200 是给定三个点上的函数值求形式为 $a+bc^x$ 的拟合函数, 可以用待定系数法求解.

1.3.3 复合函数 (习题 203–213.2)

函数的复合是产生新函数的一种重要运算.

设给定 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$, 则复合函数 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$ 的定义域是使得 $g(x)$ 属于 f 的定义域的 x 组成的. 它可以是空集. 例如 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=-x^2-1$ 就是如此.

注意在 $f\circ g$ 和 $g\circ f$ 都有意义时, 一般来说它们并不相同.

这一小节的习题都与复合函数有关.

下面对习题 210 给出解答. 它恰好是数学归纳法的用武之地.

习题 210 设 $f_n(x)=\underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n\text{ 次}}$, 若 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 从 $f_1(x)=f(x)$ 出发, 有

$$f_2(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x)=\frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+2x^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

因此我们猜测有可能成立如下的公式:

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}. \tag{1.25}$$

用数学归纳法. 当 $n=1,2,3$ 时已经成立. 设 $n=k$ 时上式成立, 则当 $n=k+1$ 时就有

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

可见 (1.25) 成立. □

习题 211–213.2 是已知复合函数时求复合前的函数. 下面给出最后一题的解答.

习题 213.2 设 $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$, 求 $f(x)$.

解 令 $t=\dfrac{x}{x+1}$, 则问题就是如何将复合后的函数 x^2 用 t 表出.
从 $t=\dfrac{x}{x+1}$ 可解出 $x=\dfrac{t}{1-t}$, 将它代入 x^2 就得到

$$x^2=\left(\frac{t}{1-t}\right)^2=\frac{t^2}{(1-t)^2}.$$

这表明若在等式右边用 $t=\dfrac{x}{x+1}$ 代入就得到左边的 x^2, 因此 $f(t)=\dfrac{t^2}{(1-t)^2}$ 就是所要求的函数关系. 最后将 t 改写为 x, 就得到复合前的 $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-x)^2}$. □

1.3.4 单调性、反函数和奇偶性 (习题 214–232)

这里有许多习题讨论具体函数的单调性. 下面是带有理论性的一个习题.

习题 223 设 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 和 $f(x)$ 都是单调递增函数. 证明, 如果 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant \psi(x)$, 那么

$$\varphi(\varphi(x))\leqslant f(f(x))\leqslant \psi(\psi(x)).$$

解 先看左边的不等式. 问题是如何使得其两边发生联系.
这可以分两步来做. 先利用 $\varphi(x)\leqslant f(x)$, 又利用 φ 单调递增, 因此就有

$$\varphi(\varphi(x)) \leqslant \varphi(f(x)).$$

再次利用 $\varphi(x) \leqslant f(x)$, 就得到 $\varphi(f(x)) \leqslant f(f(x))$. 合并以上就证明了左边的不等式. 对于右边不等式的证明是类似的. □

下一习题的结论是有用的, 它的解也为用分析法思考问题提供了一个例子.

习题 232 证明, 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的所有函数可以表示成偶函数和奇函数之和的形式.

分析 设给定区间 $(-l, l)$ 上的函数 $f(x)$, 要求找出在 $(-l, l)$ 上有定义的一个偶函数 $g(x)$ 与一个奇函数 $h(x)$, 使得在此区间上成立

$$f(x) = g(x) + h(x). \tag{1.26}$$

这里的目的是寻找两个具有指定性质的未知函数. 下面所用的分析法与 §1.1 中用于证明如习题 9(b) 等不等式的分析法有些不同.

这就是在求出两个未知函数之前先假定它们存在, 将要求证的等式认为已经成立, 然后由此式出发作些运算或变换, 看能否有办法求出 g 和 h 的表达式.

由于区间 $(-l, l)$ 关于原点对称, 在 (1.26) 中用 $-x$ 代替 x, 并利用 g 为偶函数, 即有 $g(-x) = g(x)$, 又利用 h 为奇函数, 即有 $h(-x) = -h(x)$, 于是得到

$$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x). \tag{1.27}$$

然后就可以从 (1.26) 和 (1.27) 两式出发, 消去 h 得到 g, 又从两式消去 g 得到 h, 即得到

$$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]. \tag{1.28}$$

最后从上述表达式可以看出 g 和 h 确实分别为偶函数和奇函数, 而且它们的和就是 f, 即满足 (1.26). 因此原来的存在性假设是正确的. □

通过以上分析,就可以写出非常简短的证明如下.

解 对于在区间 $(-l, l)$ 上给定的函数 f 用 (1.28) 定义两个函数 g 和 h. 从它们的表达式可见 g 为偶函数, h 为奇函数, 且满足所要求的等式 (1.26). □

习题 232 可以用于检验满足某些条件的函数是否为偶函数或奇函数. 下面就是这样的一道练习题 (参见 §1.10.1 的习题 809).

练习 设函数 f 对一切实数 x 和 y 满足方程

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

试证明 f 一定是奇函数.

1.3.5 周期函数 (习题 233–236)

这里的题不多, 但其中有两个困难. 第一是周期函数的最小周期问题[①], 第二是如何判定某些函数是或不是周期函数.

① 一般定义周期为正数, 因此最小周期也就是最小正周期.

最小正周期的存在性有很好的结果, 见 §1.3.6 中的命题 1.5, 但还没有见到计算最小正周期的有效方法. 下面通过举例来说明我们推荐的解法.

习题 233 (b) 证明, $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 是周期函数, 并求它的最小周期.

解 利用正弦函数 $\sin x$ 的最小周期为 2π, 可见 f 也是以 2π 为周期的周期函数. 问题是求它的最小周期. (这里可以参考附录一的习题 335 的图像.)

从 $f(0)=0$ 可见若 p 是 f 的最小周期, 则也有 $f(p)=0$. 下面我们将证明 f 在 $[0,2\pi]$ 中与 $\sin x$ 一样只有 3 个零点, 即 $0,\pi,2\pi$, 而 π 显然不是 f 的周期 (例如从 $f(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{2}{3}$ 而 $f(\dfrac{3\pi}{2})=-\dfrac{2}{3}$ 可知), 因此 f 的最小周期就是 2π.

利用三角恒等式 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ 和

$$\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=2\sin x\cos^2 x+(2\cos^2 x-1)\sin x,$$

就可以将 f 改写如下:

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x=\sin x\,(\frac{4}{3}\cos^2 x+\cos x+\frac{2}{3}).$$

在最后一式的括号内令 $t=\cos x$, 将它写成 t 的二次三项式, 就可以看出它始终大于 0, 因此 f 的零点与 $\sin x$ 相同. □

习题 233 (h) 考察 $\sin x+\sin\sqrt{2}\,x$ 是否是周期函数.

解 1 记 $f(x)=\sin x+\sin\sqrt{2}\,x$. 因 $f(0)=0$, 我们可以考察 f 的零点全体所成集合, 看它是否具有周期函数的零点应当具有的特性.

由三角函数的和差化积公式得到 $f(x)=2f_1(x)f_2(x)$, 其中

$$f_1(x)=\sin\frac{\sqrt{2}+1}{2}x,\quad f_2(x)=\cos\frac{\sqrt{2}-1}{2}x.$$

由此可见 f 有无穷多个零点, 将其全体记为数集 S.

由于 f 是 f_1 和 f_2 的乘积, 即有 $S=S_1\bigcup S_2$, 其中

$$S_1=\{x\mid f_1(x)=0\}=\{x\mid \frac{\sqrt{2}+1}{2}x=j\pi, j=0,\pm1,\cdots\},$$

$$S_2=\{x\mid f_2(x)=0\}=\{x\mid \frac{\sqrt{2}-1}{2}x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\cdots\}.$$

由于 $\sqrt{2}$ 是无理数, 可见 $S_1\cap S_2=\varnothing$.

由 $f(0)=0$ 可见, 若 f 有周期 p, 则 $f(p)=f(0)=0$. 因此 $p\in S$. 以下分两种情况.

(1) 若 $p\in S_1$, 则可任取某个 $q\in S_2$. 这时有 $f(p+q)=f(q)=f_2(q)=0$. 因此 $p+q\in S$. 利用 S_1,S_2 的上述表达式可知, 这时无论 $p+q\in S_1$ 或 $p+q\in S_2$ 都会导致 $\sqrt{2}$ 成为两个整数的商, 这是不可能的.

(2) 若 $p\in S_2$, 则可任取某个 $q\in S_1$. 这时有 $f(p+q)=f(q)=f_1(q)=0$, 因此也有 $p+q\in S$. 以下同 (1).

综合以上分析可知 $f(x)$ 不是周期函数. □

解 2 若设 f 有周期 p, 则就成立

$$\sin(x+p)+\sin\sqrt{2}(x+p)=\sin x+\sin\sqrt{2}\,x.$$

移项得到 $\sin(x+p)-\sin x=\sin\sqrt{2}\,x-\sin\sqrt{2}(x+p)$, 然后对两边用三角函数的和差化积公式得到 (已约去公因子 2):

$$\cos(x+\frac{p}{2})\sin\frac{p}{2}=-\cos\sqrt{2}(x+\frac{p}{2})\sin\frac{\sqrt{2}p}{2}.$$

取 x 使得 $x+\frac{p}{2}=\frac{\pi}{2}$, 则左边为 0. 由于 $\sqrt{2}$ 是无理数, 右边的第一个因子不等于 0, 因此只能有 $\sin\frac{\sqrt{2}p}{2}=0$. 于是 $\sqrt{2}p$ 是 2π 的整数倍.

同样取 x 使得 $\sqrt{2}(x+\frac{p}{2})=\frac{\pi}{2}$, 则同理推出 $\sin\frac{p}{2}=0$, 于是 p 又是 2π 的整数倍.

由于 $\sqrt{2}$ 是无理数, 以上两个结论不能相容, 可见 $f(x)$ 不是周期函数. □

注 第一个解法与上面对于习题 233(b) 的解法相同, 即从 $f(0)=0$ 出发研究 f 的零点集 S, 若 f 有周期 p, 则一定有 $p\in S$. 第二个解法取自名著 [7] 的中译本的 191 页. 其中还证明了更为一般的结论: 当 α 为无理数时,

$$\sin x+\sin\alpha x$$

一定不是周期函数. 不难看出, 用解 1 中的方法也可以推出这个较一般的结论.

习题 234 证明, 对于狄利克雷函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

任意有理数都是它的周期.

解 有理数加有理数仍是有理数, 无理数加有理数必是无理数, 因此结论成立. □

注 本题表明, 非常值的周期函数也可以没有最小正周期. 此外, 狄利克雷函数是分析中的重要例子, 今后还会多次出现和使用 (参见 §1.7.3 的习题 734).

习题 236 证明, 如果函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 满足等式

$$f(x+T)=kf(x),$$

其中 k 和 T 是正常数, 那么 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=a^x\varphi(x)$ 的形式, 其中 a 是常数, $\varphi(x)$ 是周期为 T 的周期函数.

解 1 (**分析法**) 假设结论成立, 则就有

$$f(x+T)=a^{x+T}\varphi(x+T)=kf(x)=ka^x\varphi(x).$$

利用 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$, 又在两边约去 a^x, 就得到 $a^T=k$. 于是解出 $a=k^{\frac{1}{T}}$. 然后从 $f(x)=a^x\varphi(x)$ 可以确定出

$$\varphi(x)=f(x)k^{-\frac{x}{T}},$$

以下只要验证如此确定的 a 和 $\varphi(x)$ 是否合乎要求. 从略. □

解 2 (**综合法**) 取 $a=k^{\frac{1}{T}}$ 和 $\varphi(x)=f(x)k^{-\frac{x}{T}}$, 则已有 $f(x)=\varphi(x)a^x$. 又从

$$\varphi(x+T)=f(x+T)k^{-\frac{x+T}{T}}=kf(x)\cdot k^{-\frac{x+T}{T}}=f(x)k^{-\frac{x}{T}}=\varphi(x)$$

可见 φ 是周期为 T 的周期函数. □

1.3.6 补注

在周期函数的研究中会遇到许多困难的问题. 在这一小节中将以两个命题的形式回答与前面的习题有关的两个理论问题. 由于其中需要后面的连续函数等知识, 初学者在第一次阅读时可以先跳过, 等以后再回过来学习.

注意: 周期函数的定义域不一定是整个实数轴. 例如中学数学中的 6 个三角函数, 它们都是周期函数, 但除了正弦和余弦函数之外, 其余 4 个都不是以 $(-\infty,+\infty)$ 为定义域的. 其中特别要注意, 正切和余切函数的最小正周期是 π.

第一个问题是: 最小正周期的存在性问题.

如习题 234 所示, 狄利克雷函数 $\chi(x)$ 以任意有理数为其周期, 可见非常值的周期函数也未必有最小正周期. 那么什么条件下能够保证一个周期函数有最小正周期呢? 下面以命题的形式给出这方面的一个常用结论. 同时可知非常值的无最小正周期的周期函数一定是处处不连续的.

命题 1.5 设 f 是非常值周期函数, 且至少有一个连续点, 则 f 有最小正周期.

证 用反证法. 若 f 无最小正周期, 即有无穷多个越来越小的正周期. 由于任何两个周期之差仍为周期, 因此 f 必有任意小的正周期.

取趋于 0 的一列正周期 α_n, $n=1,2,\cdots$. 又设 f 于点 x_0 连续. 则对于任何点 x, 存在分解式 $x=x_0+k_n\alpha_n+\beta_n$, 其中 k_n 为整数, $0\leqslant\beta_n<\alpha_n$. 于是有

$$f(x)=f(x_0+k_n\alpha_n+\beta_n)=f(x_0+\beta_n).$$

令 $n\to\infty$ 并利用 f 于点 x_0 处连续, 就得到 $f(x)=f(x_0)$. 因此 f 是恒等于 $f(x_0)$ 的常值函数, 与假设条件相矛盾. □

注 命题 1.5 最早见于数学通报杂志的 1963, 第 12 期, 其中周期函数的定义域为整个实数轴. 此外还可参考该刊的 1959, 第 12 期; 1963, 第 6 期; 1965, 第 4, 6 期; 1980, 第 10 期等.

第二个问题是: 两个周期函数之和是否是周期函数.

如习题 235.1 所示, 定义域相同的两个周期函数, 如果它们的周期可公度, 也就是两者之比为有理数, 那么它们的和与积也是周期函数. 其证明并不困难.

另一方面, 习题 233(h) 则表明周期不可公度的两个周期函数之和可以不是周期函数. 这是否具有一般意义?

下面的定理要比习题 233(h) 和所引的 [7] 中的结论更为一般.

命题 1.6 设 f_1 和 f_2 是定义在同一集合上的周期函数, 它们的周期不可公度. 若 f_1, f_2 中至少一个有界, 又至少有一个连续, 则 $f=f_1+f_2$ 不是周期函数.

证 用反证法. 设 f 有周期 $p>0$, 则从

$$0=f(x+p)-f(x)=f_1(x+p)+f_2(x+p)-f_1(x)-f_2(x)$$

得到恒等式

$$f_1(x+p)-f_1(x)\equiv -f_2(x+p)+f_2(x).$$

利用这个恒等式定义一个新的函数 F 如下:

$$F(x)=f_1(x+p)-f_1(x)=-f_2(x+p)+f_2(x). \qquad (*)$$

设 T_1,T_2 分别是 f_1 和 f_2 的周期. 从定义 $(*)$ 可见 F 同时以 T_1,T_2 为周期. 不妨设 $T_1>T_2>0$, 则 F 又以 T_1-T_2 为周期. 利用辗转相除法, 可见 F 有无穷多个越来越小的正周期, 从而有任意小的正周期.

取 F 的一列趋于 0 的正周期 α_n, $n=1,2,\cdots$. 设 x_0 在定义域中, 则对于定义域中任意其他点 x, 有分解 $x=x_0+k_n\alpha_n+\beta_n$, $n=1,2,\cdots$, 其中 k_n 为整数, $0\leqslant\beta_n<\alpha_n$.

不妨设 f_1 和 f_2 中的 f_1 为其定义域上的连续函数, 于是有

$$F(x)=F(x_0+\beta_n)=f_1(x_0+\beta_n+p)-f_1(x_0+\beta_n),$$

令 $n\to\infty$, 并记上式右边的极限为 c, 就得到

$$F(x)=F(x_0)=f_1(x_0+p)-f_1(x_0)=c.$$

于是对所有 x 成立

$$F(x)=f_1(x+p)-f_1(x)=-f_2(x+p)+f_2(x)=c.$$

这时对一切整数 n 有

$$f_1(x_0+np)=f_1(x_0)+nc,\ \ f_2(x_0+np)=f_2(x_0)-nc.$$

由于 f_1,f_2 中至少有一个有界, 因此只能有 $c=0$.

于是就证明了 $F\equiv 0$, 同时也就证明了 p 是 f_1 和 f_2 的共有周期, 引出矛盾. □

注 1 这个证明是苏州大学的陈敏教授告诉编者的. 特别当 f_1,f_2 中有一个是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续周期函数时, 定理的条件满足. 此外, 从证明可见, 连续条件可减弱为在某个单侧连续或存在极限.

举一个例子.

例题 设 $f_1(x)=\tan\alpha\pi x$, $\alpha>0$, $f_2(x)=\chi(x)$ (即狄利克雷函数), 证明, $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 为周期函数的充分必要条件是 α 为有理数.

解 若 α 为有理数, 则 f_1 与 f_2 的周期可公度, 根据习题 235.1 知道 $f=f_1+f_2$ 为周期函数; 若 α 为无理数, 则可以根据 f_1 连续, f_2 有界, 然后用命题 1.6 知道 $f=f_1+f_2$ 不是周期函数. □

最后, 不易想到的是周期不可公度的两个周期函数之和仍然可能是周期函数.

1956 年有人在美国数学月刊上提出问题: 两个周期函数的周期不可公度时, 它们的和是否仍然可能是周期函数? 许多读者给出了肯定的回答, 其中有两个例子发表于该杂志的第 62 卷 (1957), 598–599 页. 此外还可以参考在数学通报, 1965, 第 5 期, 40–43 页和 [25] 4–10 页中的例子.

§1.4 函数的图像表示 (习题 237–380)

内容简介 本节主要训练如何快速作出函数的大致图像 (称为草图), 其中提出了图形的叠加 (即相加)、相乘、开平方等非常实用的技巧, 这对于数学分析今后的学习都是很有用的工具. 除了按照内容分若干小节讲解方法之外, 还在最后的补注小节中用初等方法对某些函数作出了严格的单调性分析.

在本书的附录一中给出了 §1.4 中所有作图题的图像的参考答案. 由于本节主要是作草图, 而附录一中的图像是准确结果, 因此读者的答案只要在主要方面与参考答案相同就可以认为是正确的.

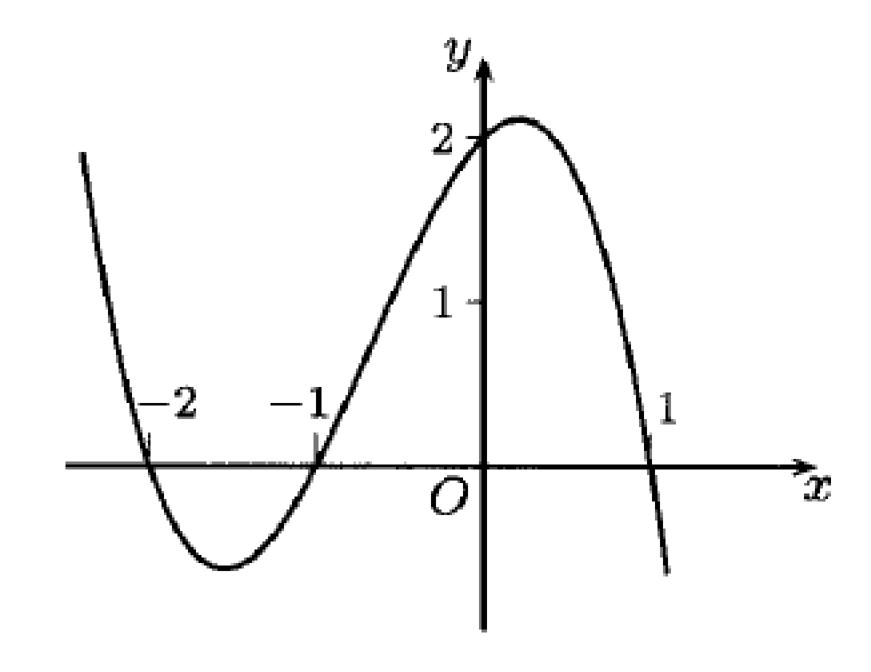
1.4.1 有理函数的图像 (习题 237–265)

这里包含多项式 (也称有理整函数) 与它们的商, 即有理分式函数.

习题 237–244 是线性函数和二次函数, 它们的图像是直线和抛物线. 习题 245–265 是次数大于 2 的多项式和有理分式. 我们先举两个多项式作图的例子.

习题 246 作 $y=(1-x^2)(2+x)$ 的图像.

解 这是三次多项式 $y=-x^3-2x^2+x+2$. 由于它的三个根 $\pm1,-2$ 已知, 因此在区间 $(-\infty,-2)$, $(-2,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$ 上的 y 的符号已知. 根据三次函数至多有两个极值点, 而最高次项 x^3 的系数为 -1, 就可作出草图如右. □



习题 246 的附图

注 多项式作图时需要以下基本知识:

(1) n 次多项式至多有 n 个实根, n 为奇数时至少有一个实根, n 为偶数时可以没有实根;

(2) n 次多项式至多有 $n-1$ 个极值点, 其中极大值点和极小值点交替出现. 在相邻极值点之间, 以及极值点与无穷远之间, 多项式函数一定是严格单调的;

(3) 当 $|x|$ 无限增加时 $|y|$ 也无限增加, 奇次多项式的图像两侧趋于不同号的无穷大, 而偶次多项式的图像两侧则趋于同号的无穷大. 这里的正负号由多项式中最高次项的系数的符号来决定.

(以上几点均可从高等代数课程中的代数基本定理推出, 但其中的部分内容也可以在数学分析中作出证明. 例如 §1.5.3 的习题 408, §2.6.1 的习题 1240, §2.7.1 的习题 1281 等都与此有关.)

习题 247 作 $y=x^2-x^4$ 的图像.

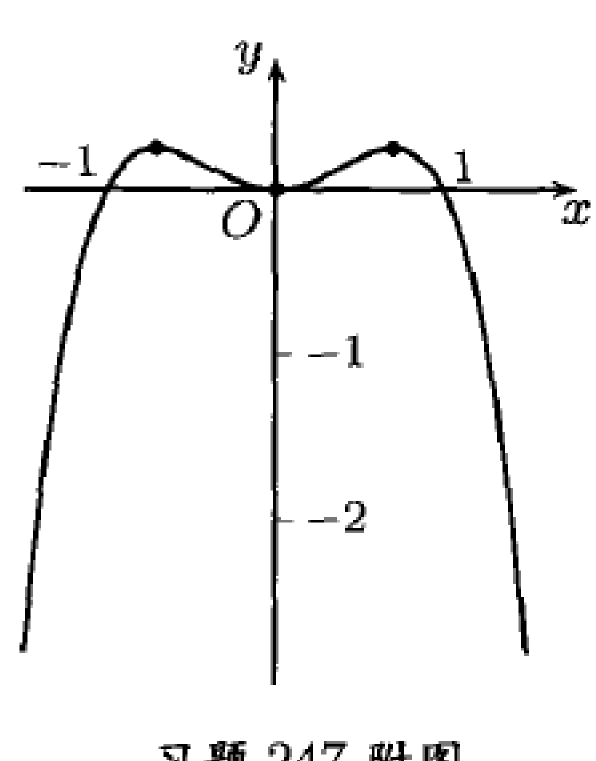
解 注意到这是偶函数. 对函数表达式作因式分解

$$y=x^2(1-x)(1+x),$$

这样就知道有 3 个互异零点, 其中 $x=0$ 是二重的. 同时还知道在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上 $y>0$, 在 $x<-1$ 和 $x>1$ 时 $y<0$.

如习题 246 的注中所示, 四次多项式最多可以有三个极值点, 在相邻极值点之间和极值点与无穷远之间, 函数均严格单调, 而当 $|x|$ 无限增大时 y 趋于 $-\infty$.

这样就可以如附图所示, 作出函数 $y=x^2-x^4$ 的图像. 还应当注意到, 在 $x=0$ 邻近, 当 $|x|$ 趋于 0 时二次项 x^2 起主要作用, 因此图像与 $y=x^2$ 相似. 而当 $|x|>1$ 时, 随着 $|x|$ 增大, $-x^4$ 起主要作用, 因此图像与开口向下的四次抛物线 $y=-x^4$ 相似.



习题 247 附图

此外, 图像有两个极大值点和一个极小值点. 它们的精确位置在将来可以用微分学方法求出. 由于本题的函数表达式很简单, 因此也可以用配方法得到

$$y=-(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4},$$

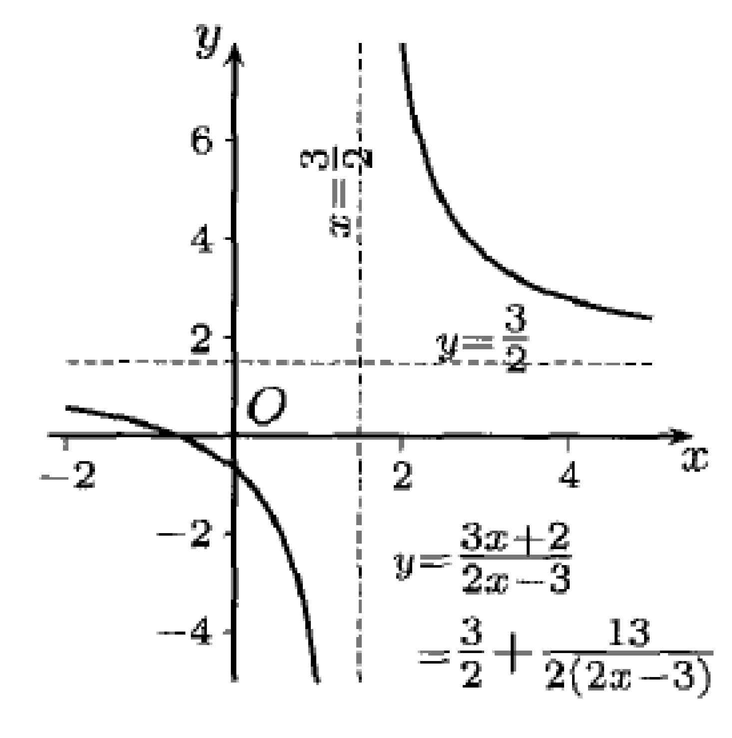
从而求出极大值点为 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, 极大值为 1/4. □

接下来是有理分式函数的作图. 习题 251 中提示了分式线性函数 (其分母分子均为一次函数) 的作图方法.

习题 251 作一次分式函数

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0, c\neq 0)$$

的图像, 将其化为形如 $y=y_0+\frac{m}{x-x_0}$, 并以 $y=\frac{3x+2}{2x-3}$ 为例作探讨.



习题 251 的附图

解 在所述条件下总可以将 y 分解如下:

$$y=\frac{a}{c}+\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x-\left(-\dfrac{d}{c}\right)}=y_0+\frac{m}{x-x_0}, \qquad (*)$$

其中

$$x_0=-\frac{d}{c},\ y_0=\frac{a}{c},\ m=\frac{bc-ad}{c^2}.$$

由此可见, $y(x)$ 的图像可以从最简单的直角双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 出发经过三步得到: (1) 将纵坐标乘以 m, 当 $m>0$ 时图像形状不变, 只是在 y 方向按比例放大或缩小, 当 $m<0$ 时图像还要对于 x 轴作反射变换; (2) 将经过 (1) 处理的图像在水平方向移动 x_0 的距离, $x_0>0$ 时为右移, $x_0<0$ 时为左移; (3) 最后再将图像在垂直方向移动 y_0 的距离, $y_0>0$ 时向上移, $y_0<0$ 时向下移.

对于题中的具体例子, 可以计算得到

$$y=\frac{3}{2}+\frac{\frac{13}{4}}{x-\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{13}{4(x-\frac{3}{2})}.$$

如 (*) 所示, 这时 $x_0=y_0=\frac{3}{2}$, 当 $x\to x_0=\frac{3}{2}$ 时 $y\to\infty$, 故有垂直渐近线 $x=\frac{3}{2}$; 当 $x\to\infty$ 时 $y\to y_0=\frac{3}{2}$, 故有水平渐近线 $y=\frac{3}{2}$ (参见附图).

由于 $m=13/4$ 较大, 在附图中的 x 轴和 y 轴所取的单位长度不同. □

在习题 251 中提出的方法可以用于解决本小节中许多类似的习题. 这里的方法是将一个有理分式函数分解为比较简单的函数之和, 然后在 x 方向和 y 方向作平移, 最后将图像相加等.

下面是两个常见函数的作图题, 这就是习题 256 和 257.

习题 256 作 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 的图像 (阿涅西箕舌线).

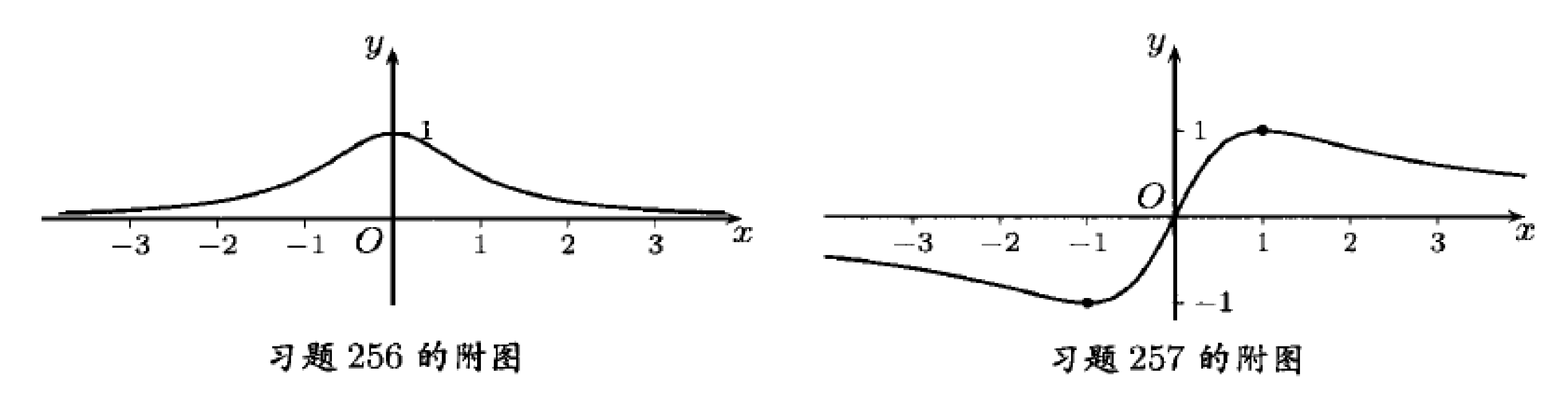
解 容易看出它是偶函数, 于 $x=0$ 达到极大值 1, 在两侧均为严格单调, 且当 $|x|$ 无限增大时趋于 0. 因此有水平渐近线 $y=0$. 见下面的附图. □

习题 257 作 $y=\frac{2x}{1+x^2}$ 的图像 (牛顿蛇形线).

解 容易看出它是奇函数, y 的符号与 x 一致, 故只需讨论 $x\geqslant 0$ 的部分. 在 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$ 时从

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{2(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

可见 $y(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格单调递增, 同样考虑 $1\leqslant x_1<x_2$, 又可看出 $y(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调递减. 这样也就已经知道极大值点是 $x=1$, 极大值为 1. 又可看出 $y(+\infty)=0$, 即有水平渐近线 $y=0$. 这样就可以作出附图中的图像. □



习题 256 的附图　　习题 257 的附图

1.4.2 无理函数、幂函数和初等超越函数的图像 (习题 266–324.2)

这里的初等超越函数包括指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数以及它们的复合.

下面先看出现平方根的最简单例子.

习题 266 作 $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (抛物线) 的图像.

解 只要将函数表达式两边平方就得到抛物线方程

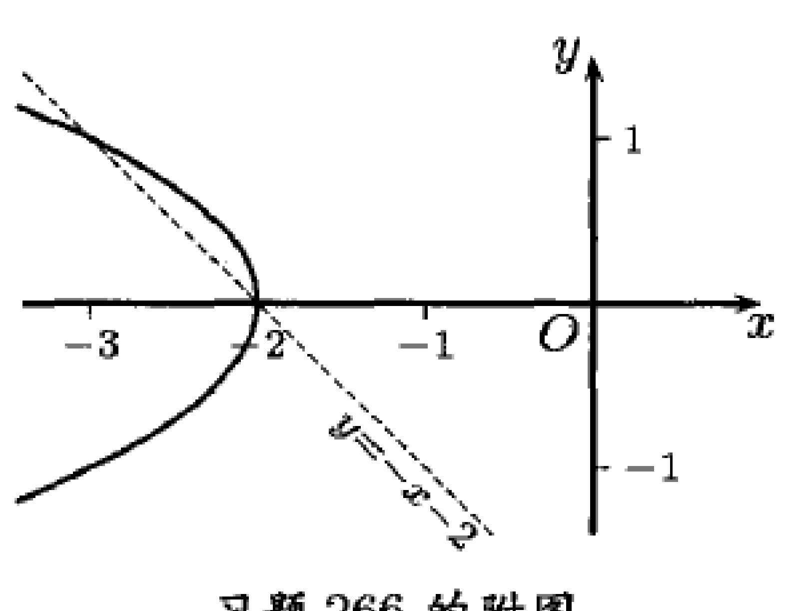
$$x = -y^2 - 2.$$

它的图像如附图所示, 即是以 x 轴为对称轴, 开口向左的一条抛物线.

但这里可以提出另一种观点, 即对于图像直接进行开平方根的运算. 这对于理解如何从 $f(x)$ 的图像得到 $\sqrt{f(x)}$ 或 $\pm\sqrt{f(x)}$ 的图像是有益的.

设已知 $f(x)$ 的图像, 则为了得到 $y = \pm\sqrt{f(x)}$ 的图像, 首先确定其定义域是使得 $f(x) \geqslant 0$ 的那些 x 值. 对于习题 266 这个定义域就是 $(-\infty, -2]$.

其次是除了有上下对称的两支曲线外, 要注意到在定义域的边界点处曲线 $y = \pm\sqrt{f(x)}$ 可能会有垂直的切线. 本题的情况就是如此. 其原因可以从幂函数的图像来理解. 我们知道 $y = x^\alpha$ 当 $0 < \alpha < 1$ 时, 在点 $x = 0$ 处函数图像就有垂直切线, 因此开平方根运算就有可能出现这样的现象.



习题 266 的附图

当然幂函数的情况不完全如此. 例如 $f(x) = x^3$, 则 $y = \sqrt{f(x)}$ 在 $x = 0$ 处的切线与 x 轴重合, 并不是垂直切线. 这里的原因仍然在于幂函数 $y = x^\alpha$ 当 $\alpha > 1$ 时在点 $x = 0$ 处的切线是水平的.

如果理解了上面的说明, 则以下许多出现垂直切线的图像都容易作出. 为方便起见, 不妨先作出 $f(x)$ 的图像, 然后再作 $y = \sqrt{f(x)}$ (或 $y = \pm\sqrt{f(x)}$) 的图像. 如附图所示, 我们将 $f(x) = -x - 2$ 用虚线表示, 然后将它在 x 轴上方的部分“开平方”就得到所要的答案. □

注 从后面的习题 328(e) 和 329.1(d) 可知, “开平方”是对于图像的一种运算. 这里对于如何从 $f(x)$ 的图像得到 (位于 x 轴上方的) $\sqrt{f(x)}$ 的图像再作一些说明, 请读者与习题 266 的解答对照起来看:

(1) 只有 $f(x)$ 的图像在 x 轴上方的部分才能被开平方;

(2) 由 $y = \sqrt{x}$ 的单调递增性可知, $\sqrt{f(x)}$ 的单调性与 $f(x)$ 相同. 因此对 $f(x)$ 的单调性区间分析就提供了 $\sqrt{f(x)}$ 的单调性区间;

(3) 在 $f(x)$ 的图像与 x 相交处, 如果图像在该点的切线既不是水平切线, 也不是垂直切线, 则 $\sqrt{f(x)}$ 在该点具有垂直切线;

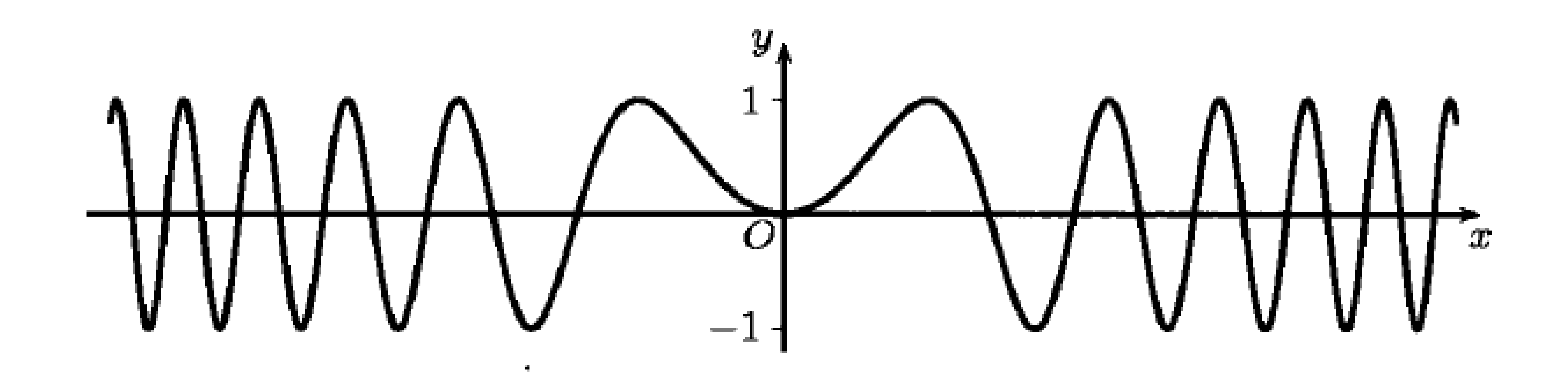
(4) 更进一步, 若 $1 < f(x)$, 则 $1 < \sqrt{f(x)} < f(x)$, 而当 $1 > f(x) > 0$ 时, 则 $1 > \sqrt{f(x)} > f(x)$.

在这一小节的习题中还包含了一些复合函数的作图, 例如习题 279 中的 6 个小题都是给定 $y_1(x)$, 求作 $e^{y_1(x)}$ 的图像. 建议对于这类题分别作出 $y_1 = y_1(x)$ 和 e^{y_1} 的图像, 然后从它们的变化趋势判断出复合函数的变化趋势, 进而作出图像. 实际上习题 266 也可以说是如此作出的复合函数的图像.

当然这样的图像一般来说只能是草图, 其中许多进一步的问题需要微分学知识的帮助才能完全解决.

下面再解答几个习题, 其中的函数都是数学分析中的重要例题. 它们的图像表明了复合运算情况的处理方法.

习题 298 作 $y=\sin x^2$ 的图像.



习题 298 的附图

解 这是偶函数. 容易知道其零点全体为 $\pm\sqrt{n\pi}$, n 取所有非负整数. 从数列极限 (习题 47) 知道

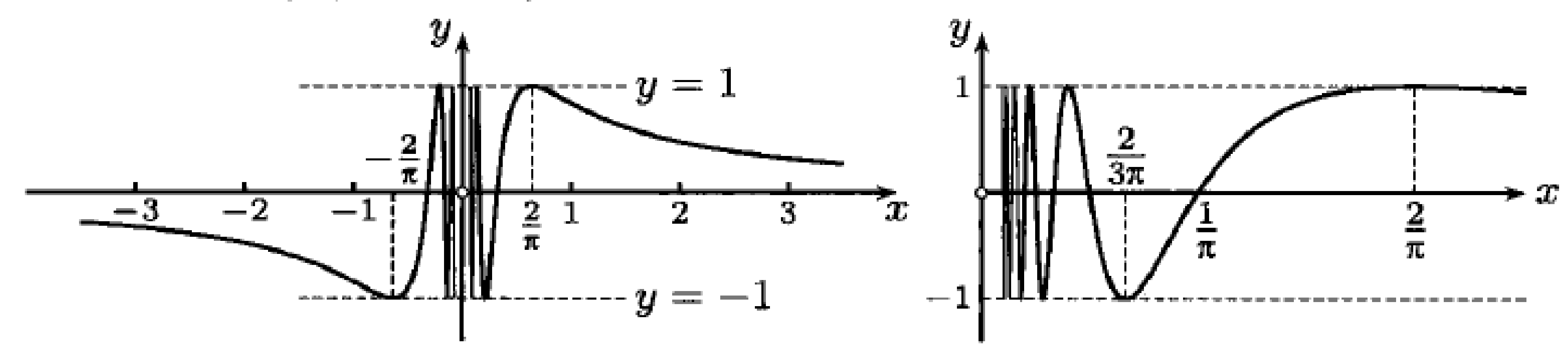
$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(n+1)\pi}-\sqrt{n\pi})=0,$$

即相邻的零点之间的距离随着 n 的增大而单调趋于 0. 同样可以确定该函数达到 $+1$ 和 -1 的自变量值, 这样就容易作出其草图. 还可以从今后关于 $\sin x\sim x$ $(x\to 0)$ 的知识知道在 $x=0$ 附近, $y=\sin x^2$ 的图像与 $y=x^2$ 相似. □

习题 299 作 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的图像.

解 这是奇函数, 即关于原点中心对称. 在点 $x=0$ 处无定义. 值域为 $-1\leqslant y\leqslant 1$.

当 x 从 $+\infty$ 减少趋于原点的右侧时, $1/x$ 从 0 单调递增到 $+\infty$, 因此 y 在 -1 到 1 之间作无限次摆动. 具体来说, y 在 $[\dfrac{2}{\pi},+\infty)$ 上单调递减趋于 0, 图像以 $y=0$ 为水平渐近线, 在 $[\dfrac{2}{3\pi},\dfrac{2}{\pi}]$ 上从 -1 单调增加到 1, 依次类推. 如附图所示, 不难确定 y 的所有零点和取到 ±1 的所有极值点的坐标. □



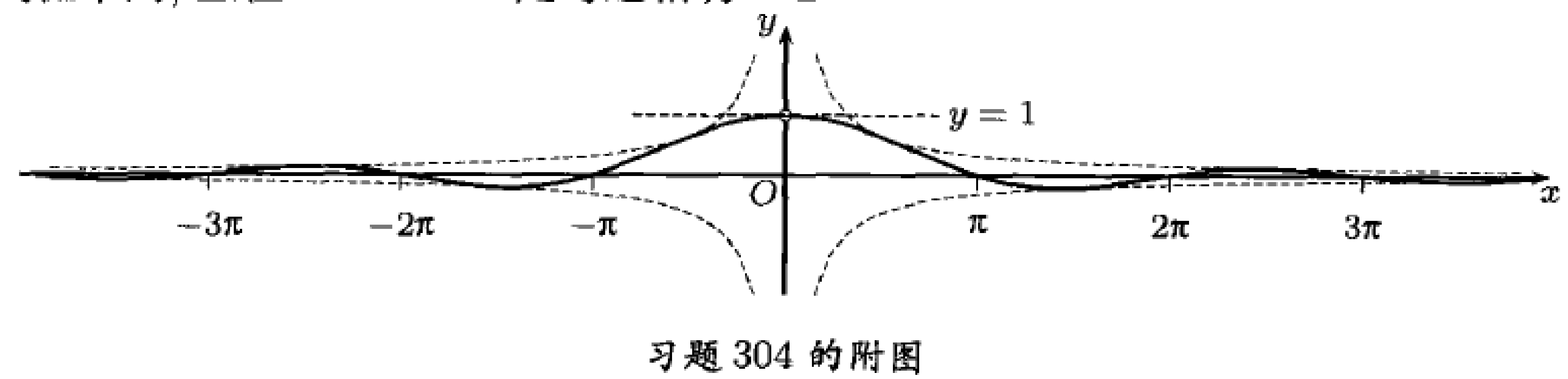
习题 299 的附图 (右分图是左分图的 $x>0$ 部分在水平方向的放大)

下面两道题与图像的乘法有关, 同时它们在理论和应用上也很重要.

习题 304 作 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的图像.

解 该函数为偶函数, 于 $x=0$ 处没有定义, 但根据下一节的函数极限知识知道它在该点的极限为 1.

将该函数的图像看成为正弦曲线 $\sin x$ 与直角双曲线 $\frac{1}{x}$ 相乘, 就可以作出下面的图像, 其中用虚线表示的 4 条曲线是 $y=\pm\frac{1}{x}$ ($x>0$ 和 $x<0$), 它们将 $y=\frac{\sin x}{x}$ 的图像夹在中间, 且在 $\sin x=\pm 1$ 处与之相切. □



习题 304 的附图

在《习题集》的新版中增加了习题 324.2, 其中含有 12 道小题. 它们可以认为是到此为止的本节习题的一个小结. 下面给出这些习题的提示或解题概要, 供读者参考. 它们的图像均见附录一. 关于其中使用的各种技巧可以参考下一小节, 即 §1.4.3 中的习题 325, 328 和 329.1.

习题 324.2 作下列函数的图像:

(a) $y=x^3-3x+2$;
(参考前面给出的习题 246 的解题过程.)

(b) $y=\dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;
(先将 $y(x)$ 分解为

$$y=-1-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{5}{4(1+x)}-\frac{1}{2(1+x)^2},$$

然后分别作出每一项的图像, 再将它们相加. 这里可以参考前面给出的习题 251 的解题过程, 还可以参考附录一中习题 260–261 等的图像.)

(c) $y=\dfrac{x^2}{|x|-1}$;

(这是偶函数, 只要先作出 $x>0$ 的部分再关于 y 轴作反射. 对 $x>0$ 可先作分解

$$y=x+1+\frac{1}{x-1},$$

然后将各项的图像相加即可.)

(d) $y=\sqrt{x(1-x^2)}$;

(参考前面对于习题 266 的解题过程. 在附录一中将根号下的 $x(1-x^2)$ 的图像用虚线画出, 然后取其大于 0 的部分开平方即可. 还可以参考习题 267–273 等的图像.)

(e) $y=3\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

（这是周期为 4π 的函数. 从 $\sin x$ 的图像出发经过 x 方向的缩放、平移和 y 方向的缩放就可以得到. 还可以参考习题 284–286 等的图像.）

(f) $y = \cot \dfrac{\pi x}{1+x^2}$;

（相当于习题 290 和 257 的图像进行复合, 然后再乘以 π.）

(g) $y = \dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

（注意在 $x=0,1$ 处函数没有定义, 当 $x \to \pm\infty$ 时 $y \to 2$, 因此有水平渐近线 $y=2$. 分别讨论三个区间 $(-\infty,0)$, $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 即可作出图像.）

(h) $y = \lg(x^2-3x+2)$;

（先作出 x^2-3x+2 的图像, 对其中 >0 的部分取对数.）

(i) $y = \arcsin\left(\dfrac{3}{2} - \sin x\right)$;

（先作出 $\dfrac{3}{2} - \sin x$ 的图像, 对其函数值处于 $[-1,1]$ 的部分取反正弦.）

(j) $y = \arctan\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right)$;

（先作出 $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}$ 的图像, 然后取反正切.）

(k) $y = \log_{\cos x} \sin x$;

（这是周期为 2π 的函数, 且只对于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 同时大于 0 时才有定义. 于是只要在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上讨论就够了. 用换底公式有 $y(x) = \dfrac{\ln\cot x}{\ln\sin x}$, 即可看出其单调性.）

(l) $y = (\sin x)^{\cot x}$.

（这是周期为 2π 的函数, 且只在 $\sin x > 0$ 时有定义. 于是只要在 $(0,\pi)$ 上讨论. 若将函数改写为

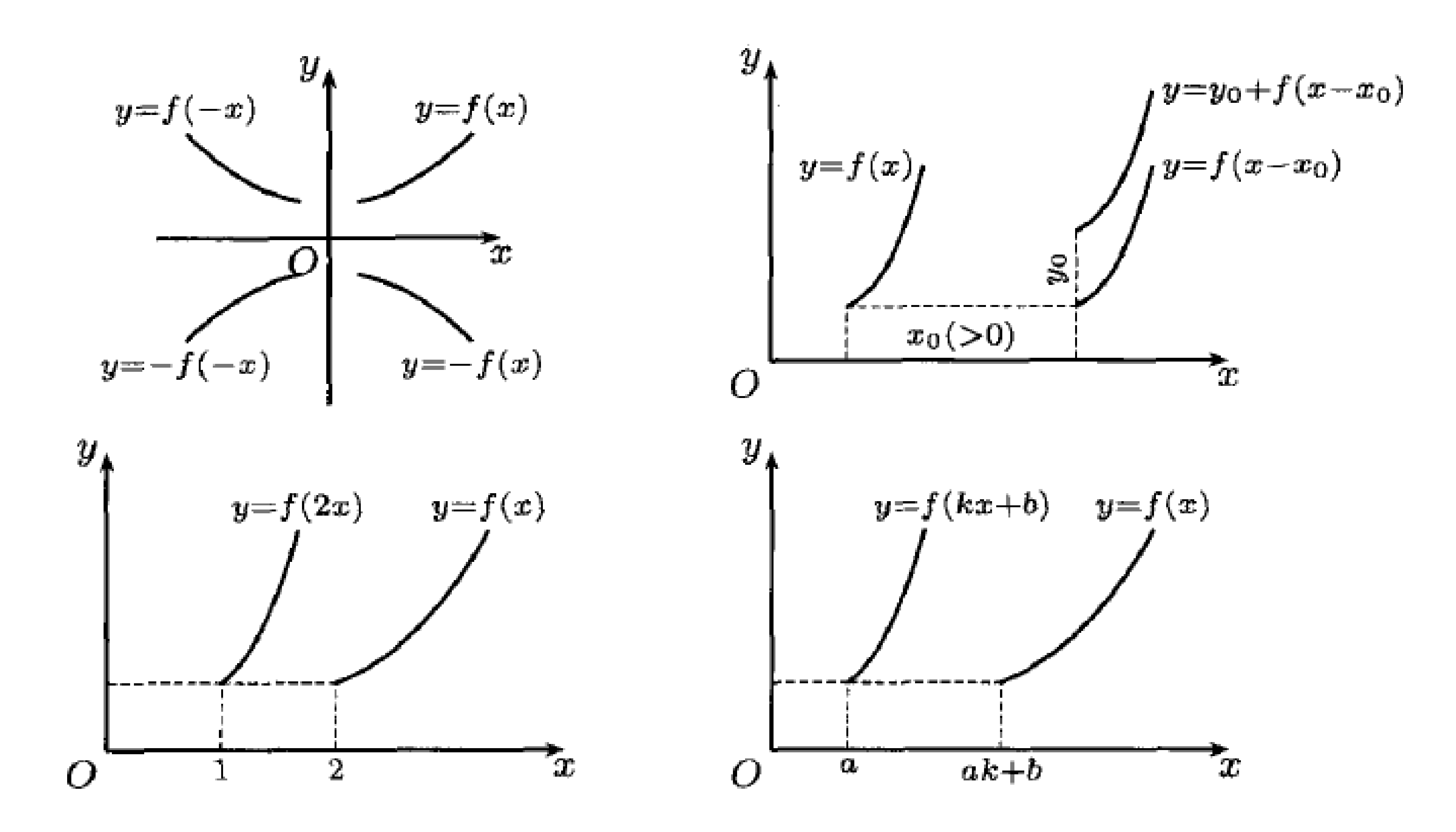
$$y(x) = \mathrm{e}^{\cot x \ln\sin x},$$

并利用 $\cot x$ 的图像（见习题 290）和 $\ln\sin x$ 的图像（参考习题 308）, 则不难确定出 $y(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上严格单调递增, 且有 $y(+0)=0$ 和 $y(\pi-0)=+\infty$.）

1.4.3　关于图像运算的一般规律（习题 325–367）

习题 325 和 328 讨论了从 $y=f(x)$ 的已知图像出发, 如何得到有关的其他图像, 熟练掌握这些技巧对于作草图是非常有帮助的. 这可以看成是前面许多习题中体现的方法的进一步总结. 习题 330 则是对两个函数的图像的运算.

习题 325 中包含的是关于 $y=f(x)$ 的自变量和因变量的线性变换所带来的图像变化. 为简单起见, 该习题的附图只作了一个非常简单的 $y=f(x)$ 的图像, 然后以示意方式表示出它在上述各种变换下所发生的变化.

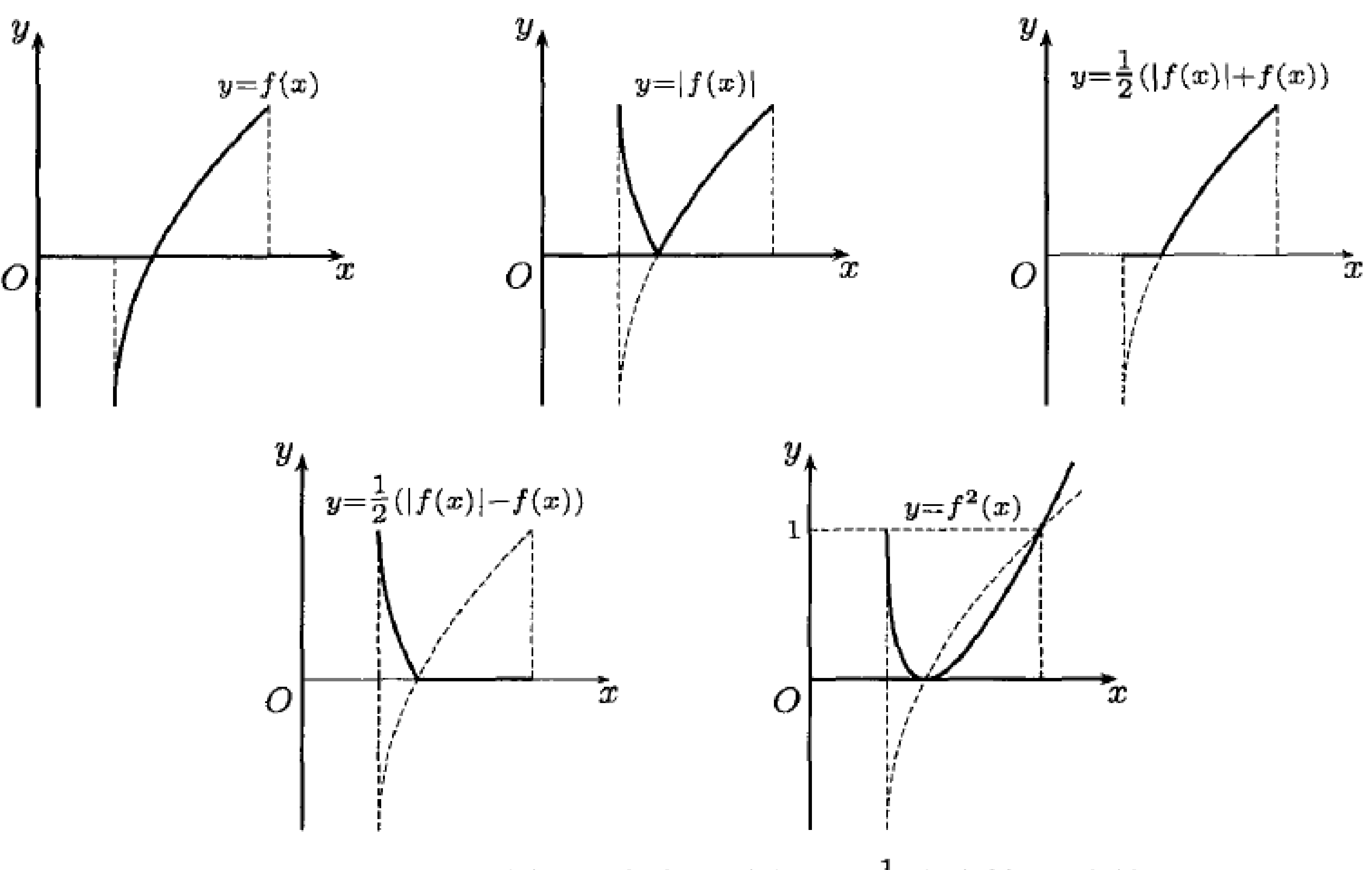


习题 325 的附图: (a) $y=-f(x)$, (b) $y=f(-x)$, (c) $y=-f(-x)$, (d) $y=f(x-x_0)$, (e) $y=y_0+f(x-x_0)$, (f) $y=f(2x)$, (g) $y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$

习题 328 要复杂一些. 从其小题 (a) 到 (d) 的 4 道题是与取绝对值和平方有关的变换, 其中从 $f(x)$ 的已知图像得到

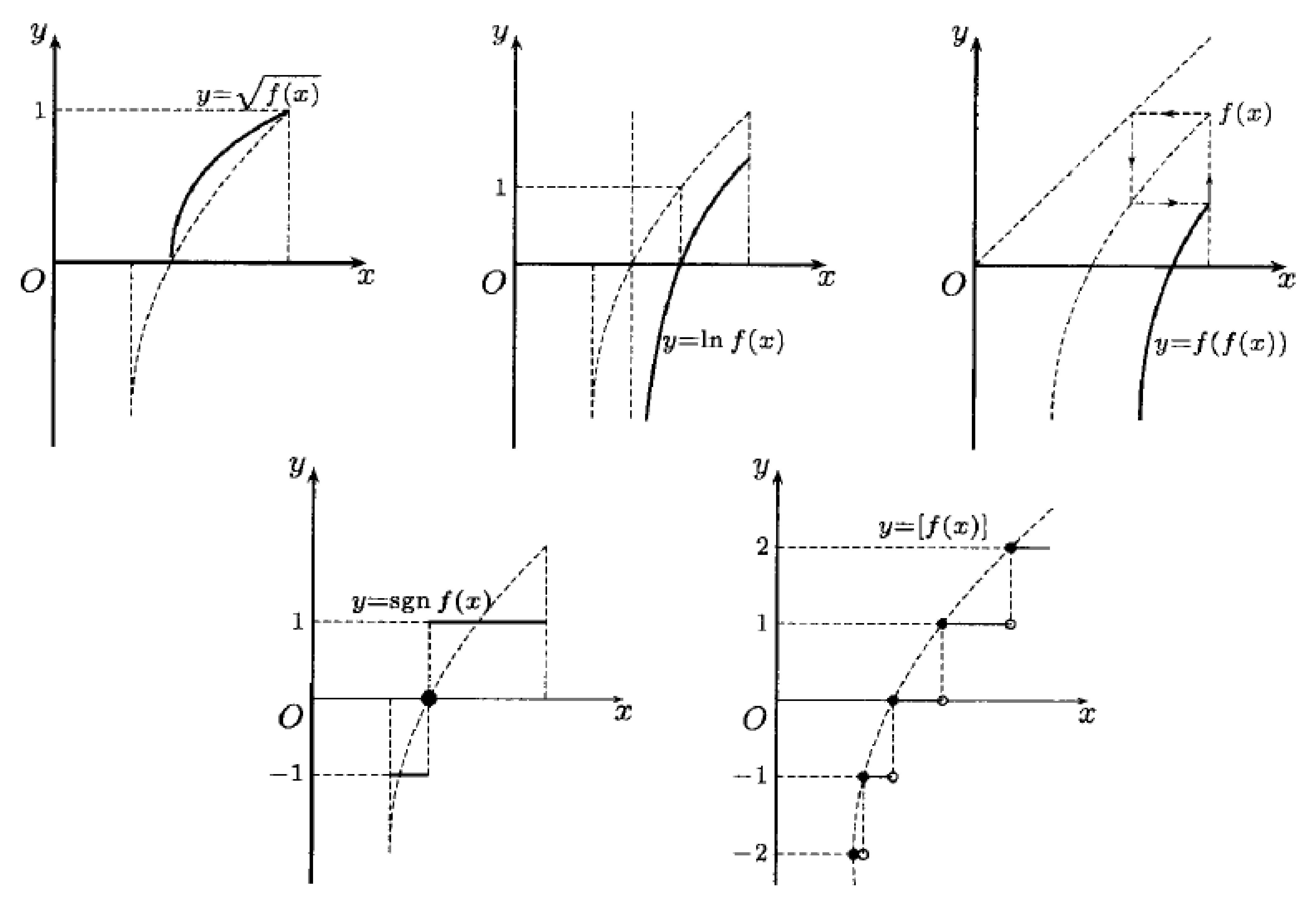
$$\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x)) \text{ 和 } \frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$$

的图像, 即是分别取出 $f(x)$ 的图像在 x 轴上方和下方的部分的两种有用的“运算”.



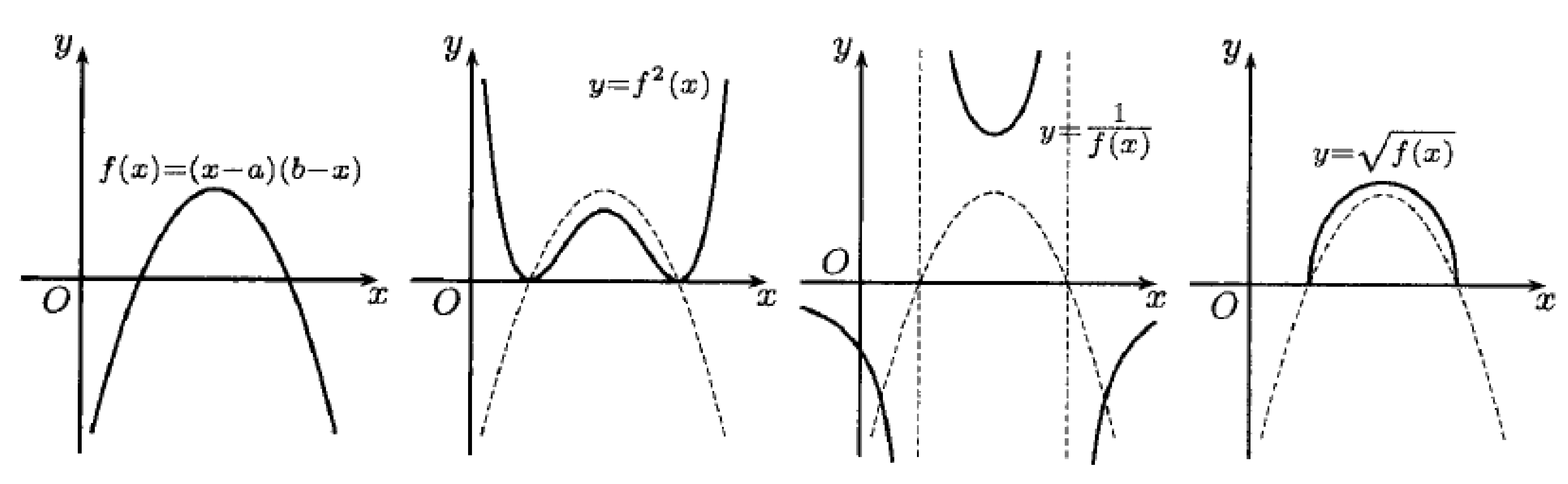
习题 328 的附图: (a) $y=|f(x)|$, (b) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|+f(x))$, (c) $y=\frac{1}{2}(|f(x)|-f(x))$, (d) $y=f^2(x)$

习题 328 从小题 (e) 到 (i) 的 5 道题是各种有用的复合运算, 其中第一个就是在习题 266 及其注中已经详细说明过的开平方运算.

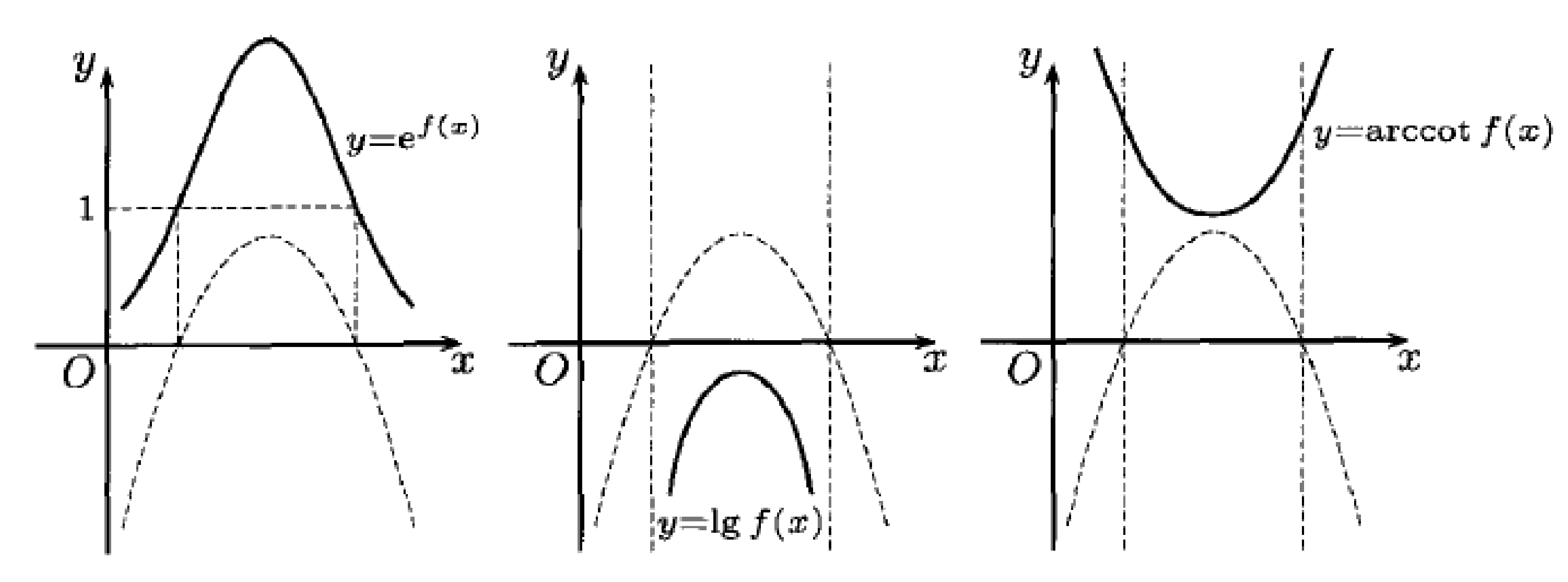


习题 328 的附图 (续): (e) $y=\sqrt{f(x)}$, (f) $\ln f(x)$, (g) $y=f(f(x))$, (h) $y=\operatorname{sgn} f(x)$, (i) $y=[f(x)]$

习题 329.1 是给定一个具体的二次函数 $f(x)=(x-a)(b-x)$ $(a<b)$, 然后要求作出 $f^2(x), \dfrac{1}{f(x)}, \sqrt{f(x)}, \mathrm{e}^{f(x)}, \lg f(x), \operatorname{arccot} f(x)$ 等 6 个有关函数的图像. 由于这里存在两个参数 a 和 b, 因此在一幅图像中不能反映出所有可能的情况. 下面的附图中所取的参数使得 $\max f(x)=\dfrac{(b-a)^2}{4}<1$, 它与 $\max f(x)\geqslant 1$ 的图像是不一样的.



习题 329.1 的附图: $f(x)=(x-a)(b-x)$ $(a<b)$, (a) $y=f(x)$, (b) $y=f^2(x)$, (c) $y=\dfrac{1}{f(x)}$, (d) $y=\sqrt{f(x)}$

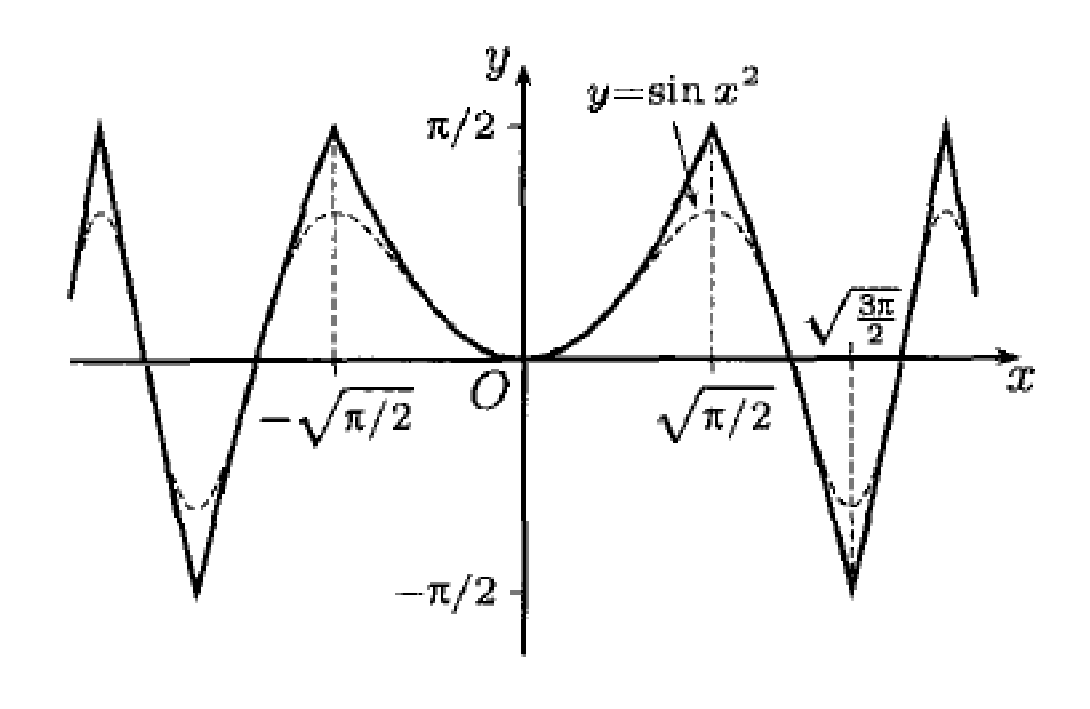


习题 329.1 的附图 (续): (e) $y=\mathrm{e}^{f(x)}$, (f) $y=\lg f(x)$, (g) $y=\operatorname{arccot} f(x)$

下面给出新版中增加的习题 329.2 中的一个小题的解答 (该题共有 10 个小题). 它对于作复合函数的图像, 以及理解正弦函数和反正弦函数的关系, 都是有益的.

习题 329.2 1)(a) 作出函数 $y=\arcsin(\sin x^2)$ 的图像.

解 如下面的附图所示, 首先用虚线作出函数 $\sin x^2$ 的图像 (见习题 298 的附图). 由于 $y(x)$ 是偶函数, 以下只需讨论 $x \geqslant 0$.



习题 329.2 1)(a) 的附图

首先作单调性分析.

在区间 $[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ 上 $\sin x^2$ 从 0 严格单调递增到 1, 因此 $y(x)$ 从 0 严格单调递增到 $\frac{\pi}{2}$ (参见习题 311 的反正弦函数的图像). 同样可以知道在区间 $[\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{3\pi}{2}}]$ 上 $y(x)$ 从 $\frac{\pi}{2}$ 严格单调递减到 $-\frac{\pi}{2}$. 以此类推就可以确定图像的各个单调区间.

从反正弦函数的定义知道, 当 $|y| \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时成立恒等式 (参见 §1.8.2 的 (1.46)):

$$\arcsin(\sin y) \equiv y,$$

就可以简单地写出函数 $y(x)$ 在各个区间上的分析表达式.

首先在 $[-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ 上就有 $y(x)=x^2$. 然后利用 $\frac{\pi}{2} \leqslant y=x^2 \leqslant \frac{3\pi}{2}$ 时有

$$\sin x^2=\sin(\pi-x^2),$$

而 $|\pi-x^2| \leqslant \frac{\pi}{2}$, 这样就知道在区间 $[\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{3\pi}{2}}]$ 上有 $y=\pi-x^2$. 同样可以推出在区间 $[\sqrt{\frac{3\pi}{2}},\sqrt{\frac{5\pi}{2}}]$ 上有 $y=x^2-2\pi$ 等等. 这样就可以作出附图所示的图像.

由以上分析可见这个函数图像是由分段抛物线弧组成的曲线, 同时这也使得我们对于附图中的每个角点如何形成有确切的了解. □

习题 330 则是从两个函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像出发求它们的和、积与复合. 在附录一中以 $f(x)=\sin x$ 和 $g(x)=\frac{1}{2}x$ 为例作出了它们的图像. 在习题 331–350 中给出了这方面的许多训练题. 此外还有训练倒数变换 $\frac{1}{f(x)}$ 的习题 351–355.

习题 356–358 是复合函数的训练题. 它们对于复合运算的理解很有帮助. 在习题 357 中出现 $\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi$, 而在习题 358 中则出现 $\varphi\circ\psi\neq\psi\circ\varphi$.

习题 359–367 是与对称性有关的训练题, 这里包括奇延拓、偶延拓和周期函数的一些讨论. 其中三道不难的理论题 363–365 指出了轴对称、中心对称和周期性之间的联系, 很有意义.

现在给出习题 363 的解答.

习题 363 证明, 如果函数 $y=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 的图像关于两条垂直线 $x=a$ 和 $x=b$ $(a<b)$ 对称, 那么函数 $f(x)$ 是周期函数.

解 任取 x, 它关于垂直线 $x=a$ 的对称点就是 $2a-x$ (易见 x 与 $2a-x$ 的算术平均值等于 a). 于是有 $f(x)=f(2a-x)$.

同理有 $f(x)=f(2b-x)$. 从

$$f(2a-x)=f(2b-x)$$

出发, 令 $2a-x=t$, 则就有 $2b-x=2b-(2a-t)$. 将它们代入上述等式, 并再将 t 改写为 x, 就得到

$$f(x)=f(2(b-a)+x),$$

可见 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. □

1.4.4 反函数、用参数表示的函数和隐函数的图像 (习题 368–370.2)

习题 368 中的 4 个小题是给定 $x=x(y)$ 后作其反函数 $y=y(x)$ 的图像. 下面只对作图过程作简要分析, 然后作出小题 (d) 的图像.

习题 368 作函数 $y=y(x)$ 的图像, 其中

(a) $\mathrm{x}=\mathrm{y}-\mathrm{y}^3$;　　(b) $\mathrm{x}=\dfrac{1-y}{1+y^2}$;

(c) $\mathrm{x}=\mathrm{y}-\ln\mathrm{y}$;　　(d) $\mathrm{x}^2=\sin\mathrm{y}$.

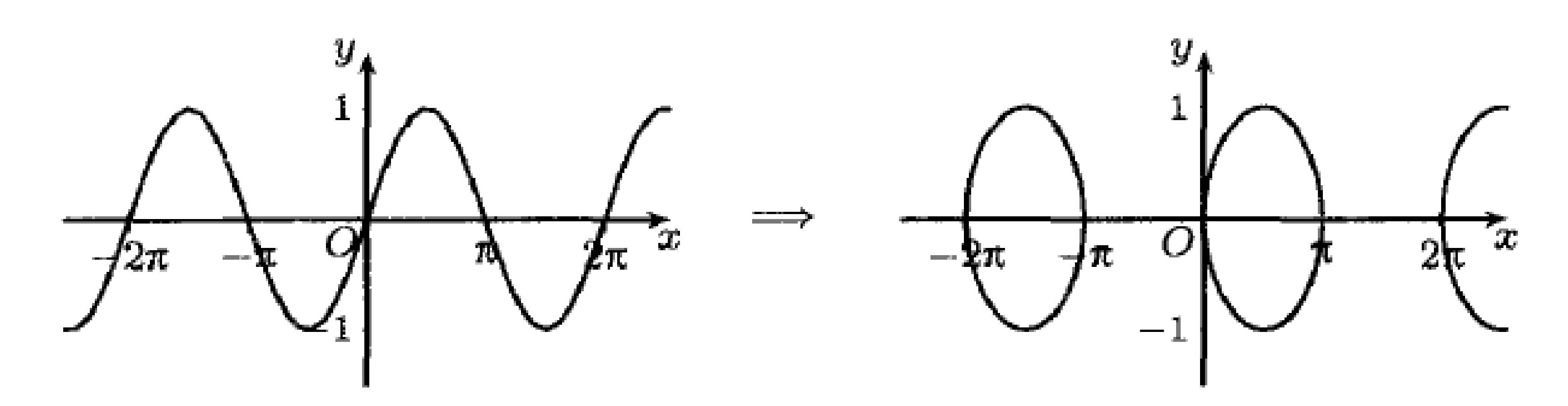
分析 只要以 y 为自变量作出函数 $x=x(y)$ 的图像, 则其中每一个严格单调的曲线段就确定了反函数 $y=y(x)$. 在附录一中的习题 368 的 4 幅图都是这样作出的.

这里只要注意在作出 $x=x(y)$ 的图像之后, 对于某些范围的 x 值可以存在多于一个的 y 与之对应, 因此实际上确定了 $y=y(x)$ 的多个单值支.

另一种方法是利用 $x=x(y)$ 的图像及其反函数 $y=y(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称, 因此可以先将题中的方程 $x=x(y)$ 中的 x,y 对换, 改为 $y=y(x)$, 在作出它的图像后再关于直线 $y=x$ 作反射即可.

下面以最后一个小题 (d) 为例来说明具体作图过程.

首先将题设中的方程 $x^2=\sin y$ 改为 $y^2=\sin x$, 如附图的左边分图所示, 先作出 $\sin x$ 的图像, 然后施行图像的“开平方”运算, 得到右边分图中的 $\pm\sqrt{\sin x}$ 的图像. 这时当然只有使得 $\sin x\geqslant 0$ 的部分才能被开平方. (参见前面的习题 266 的解以及其注.)



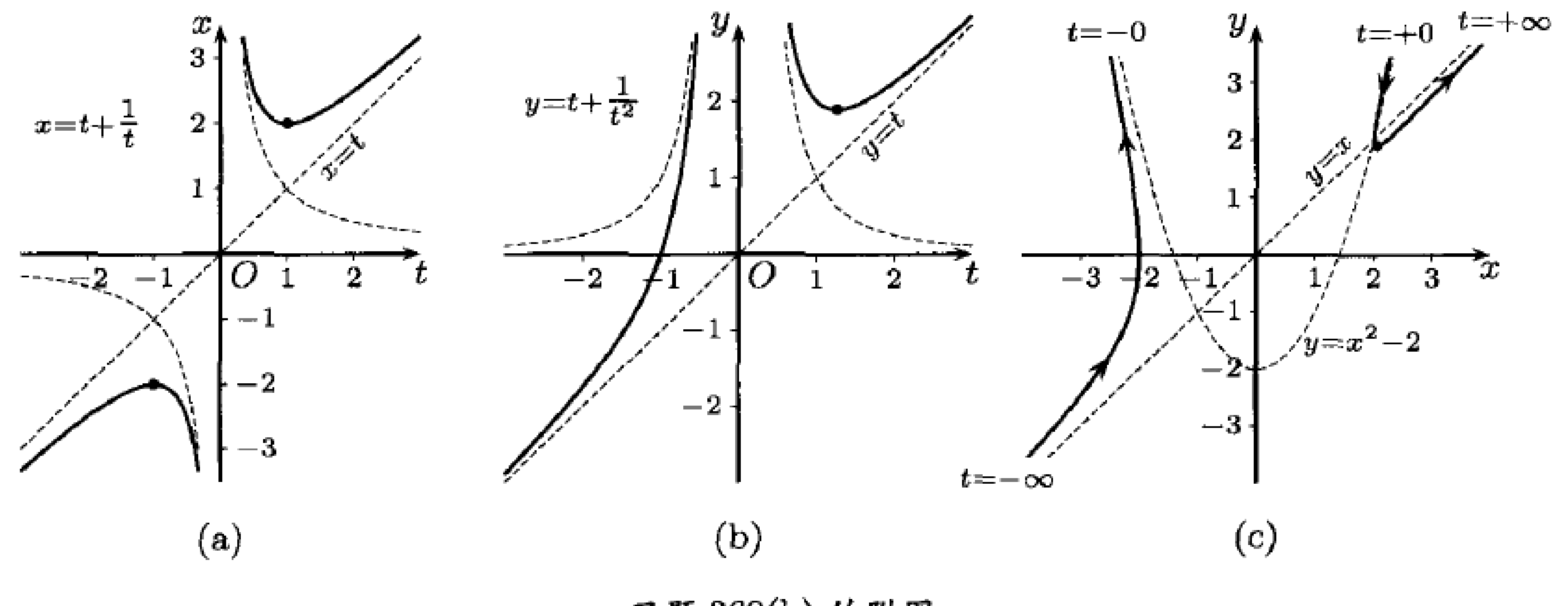
习题 368(d) 的附图

最后, 将右边分图的图像关于直线 $y=x$ 作反射, 这样就得到附录一中习题 368(d) 的图像. □

习题 369 中的 7 个小题都是要求作出用参数表示的函数的图像 (见附录一). 下面对其中较难的两题给出解题过程.

习题 369(b) 作以参数形式给出的函数 $y=y(x)$ 的图像, 其中 $x=t+\dfrac{1}{t}$, $y=t+\dfrac{1}{t^2}$.

解 我们推荐的方法是先分别作出 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 的图像 (它们就是附录一的习题 253 和 255 中的图像), 见附图的分图 (a),(b), 然后根据对它们的分析来确定出 $y=y(x)$ 的两支曲线, 并作出其图像, 见附图的分图 (c).



习题 369(b) 的附图

下面将详细说明, 如何充分利用附图的分图 (a),(b) 所提供的信息, 比较准确地作出分图 (c) 中的 $y=y(x)$ 的图像.

从分图 (a),(b) 可见, 当 t 从 $-\infty$ 递增到 0 时, $x(t)$ 从 $-\infty$ 递增到 -2, 然后递减趋于 $-\infty$; 而 $y(t)$ 则是简单地从 $-\infty$ 递增趋于 $+\infty$. 这样就容易作出分图 (c) 中的左边的一支曲线, 其中用箭头标出了参数 t 从 $-\infty$ 递增到 -0 的方向.

在上述作图时需要求出 $\max\limits_{t<0} x(t)=-2$, 这不难得到如下. 不妨看 $t>0$ 的情况, 这时从平均值不等式就有 $t+\dfrac{1}{t}\geqslant 2$, 且当 $t=1$ 时成立等号. 可见 $t>0$ 时 $x(t)$ 的最小值为 2. 由于 $x(t)$ 为奇函数, 因此也就知道 $t<0$ 时 $x(t)$ 的最大值为 -2.

关于 $x(t)$ 的单调性也是容易分析的. 例如, 设 $t_1 < t_2 \leqslant -1$, 则就有

$$x(t_2) - x(t_1) = t_2 - t_1 + \frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} = \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2}(t_1 t_2 - 1) > 0,$$

可见 $x(t)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上严格单调递增. $x(t)$ 在其他区间上的单调性分析是类似的.

现在考虑 $t > 0$ 对应的一支曲线 $y = y(x)$. 如分图 (a),(b) 所示, 随着 t 从 $+0$ 递增趋于 $+\infty$, $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是先递减后递增. 然而由于它们的单调性的转变还分别对应于不同的参数值, 因此要困难一点.

仍使用平均值不等式, 从

$$y(t) = t + \frac{1}{t^2} = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} + \frac{1}{t^2} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{t^2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}},$$

且在 $\frac{t}{2} = \frac{1}{t^2}$ 时成立等号, 因此就确定了 $t = \sqrt[3]{2}$ 时 $y(t)$ 达到最小值 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1.890$. 同样可以对 $t > 0$ 时的 $y(t)$ 作出单调性分析. 例如, 当 $0 < t_1 < t_2 \leqslant \sqrt[3]{2}$ 时就有

$$y(t_2) - y(t_1) = t_2 - t_1 + \frac{1}{t_2^2} - \frac{1}{t_1^2} = \frac{t_2 - t_1}{t_1^2 t_2^2}(t_1^2 t_2^2 - t_1 - t_2) < 0,$$

其中利用了

$$t_1 + t_2 > 2\sqrt{t_1 t_2} = \sqrt[3]{16}\sqrt{\frac{t_1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{t_2}{\sqrt[3]{2}}} \geqslant \sqrt[3]{16}\left(\frac{t_1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{t_2}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 = t_1^2 t_2^2.$$

可见 $y(t)$ 在 $(0, \sqrt[3]{2}]$ 上严格单调递减. $y(t)$ 在其他区间上的单调性分析是类似的.

然后就可以制成下列表格:

t	0	$(0,1)$	1	$(1, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2} \approx 1.260$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
$x(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 2.054$	$\nearrow$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} \approx 1.890$	$\nearrow$

当 $t \to \pm 0$ 和 $t \to \pm\infty$ 时, 曲线都趋于无穷远处. 为了把握其趋势, 需要有渐近线的知识 (见习题 626). 下面将求出当 $x \to \pm\infty$ 时有斜渐近线 $y = x$. 此外还可以从参数方程推出当 $t \to 0$ 时, $y = y(x)$ 的图像将逼近抛物线 $y = x^2 - 2$. 这些都在分图 (c) 中用虚线表出.

为此只要作下列计算:

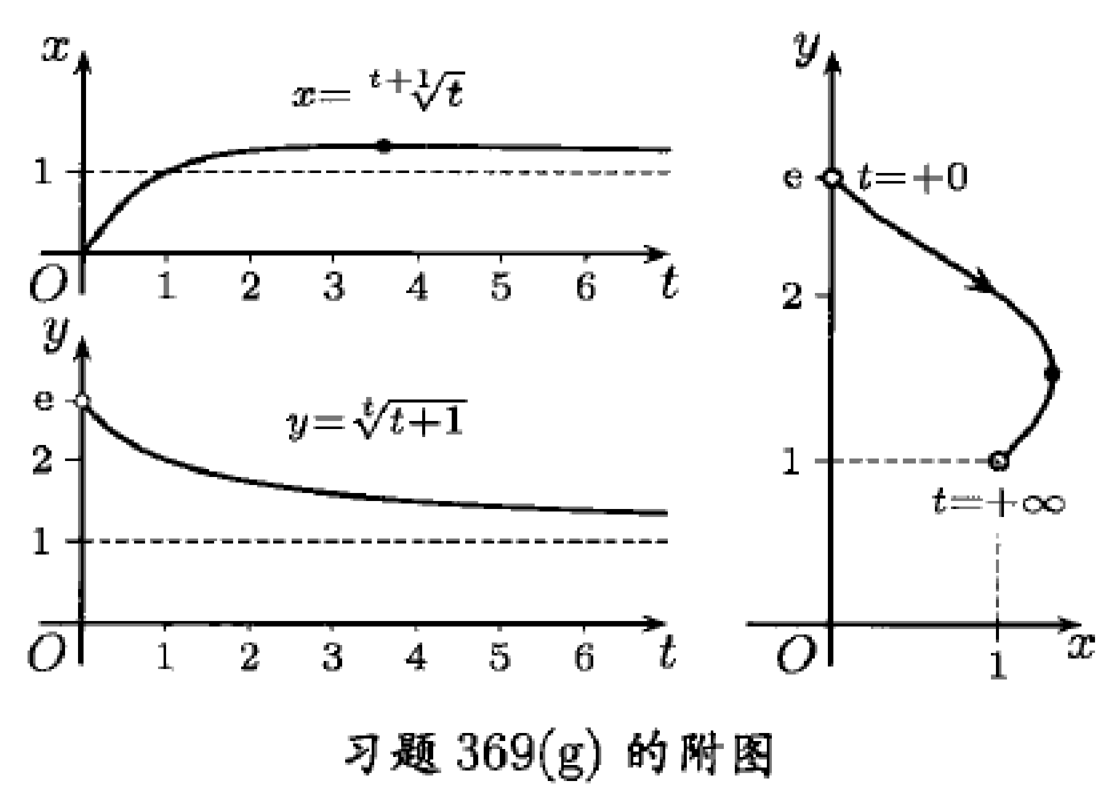
$$y(t) - [x^2(t) - 2] = t + \frac{1}{t^2} - (t^2 + \frac{1}{t^2}) = t - t^2 \to 0 \ \ (t \to +0),$$

$$y(t) - x(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} \to 0 \ \ (t \to +\infty),$$

这样就知道当 $t \to +0$ 时, 曲线逼近抛物线 $y = x^2 - 2$, 而当 $t \to +\infty$ 时, 曲线逼近斜渐近线 $y = x$.

根据以上分析就可以比较准确地作出分图 (c) 中的第二支曲线, 其中也用箭头标出了参数 t 从 $+0$ 趋于 $+\infty$ 的递增方向. □

习题 369(g) 作以参数形式给出的函数 $y = y(x)$ 的图像, 其中 $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$.



习题 369(g) 的附图

解 这时参数 $t > 0$. 先分别作出 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$ 的图像, 但这里需要了解函数 $x(t), y(t)$ 的单调性以及当 $t \to +\infty$ 时的极限, 这在目前都是有困难的.

简言之, 利用习题 65 中的 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 就不难确定 $x(+\infty) = y(+\infty) = 1$. $x(0) = x(0+) = 0$ 是明显的. 再利用习题 69 中关于数 e 的知识, 就可以确定出 $y(0+) = \mathrm{e}$.

为了确定 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的单调区间, 我们需要微分学的工具 (见 §2.7). 在 §1.4.7 的第 1, 4 点中, 将分别给出它们的单调性分析的初等证明. 在其中还得到了 $x(t)$ 的最大值点为 $t_0 \approx 3.591$, 最大值为 $x(t_0) \approx 1.321$. 目前不妨观察一下自变量 t 取正整数的情况. 利用习题 65 的解 3 中的类似方法和直接计算, 可以证明

$$x(0) < x(1) < x(2) < x(3) < x(4), \text{ 而当 } n \geqslant 4 \text{ 时则有 } x(n) > x(n+1).$$

对于 $y(t)$ 则不难证明 $y(n) > y(n+1)$ 对一切正整数成立.

在附图左边作出了 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的图像, 由此就可以在附图右边作出 $y = y(x)$ 的图像. 当 t 从 0 单调递增趋于无穷大时, y 从 e 单调递减趋于 1, 而 x 则先是单调递增到大于 1 的某个值 (≈ 1.321), 然后再单调递减趋于 1. □

习题 370.1 和 370.2 是作隐函数的图像. 一种常用方法就是引入参数, 将隐函数作图问题归结为用参数表示的函数作图问题. 下面先看其中的一个典型例子.

习题 370.1(b) 作出由方程 $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ 确定的隐函数图像 (笛卡儿叶形线).

解 令 $y = tx$, 代入所给定的方程中解得参数方程

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3},$$

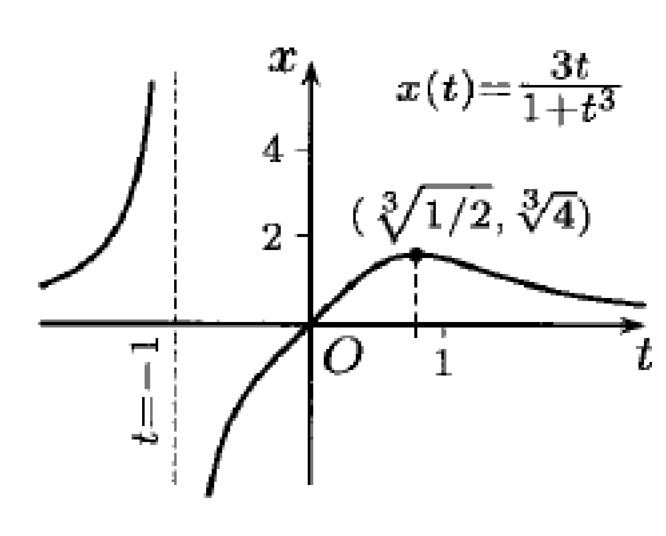
然后分别作出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的图像如右边的附图 1.

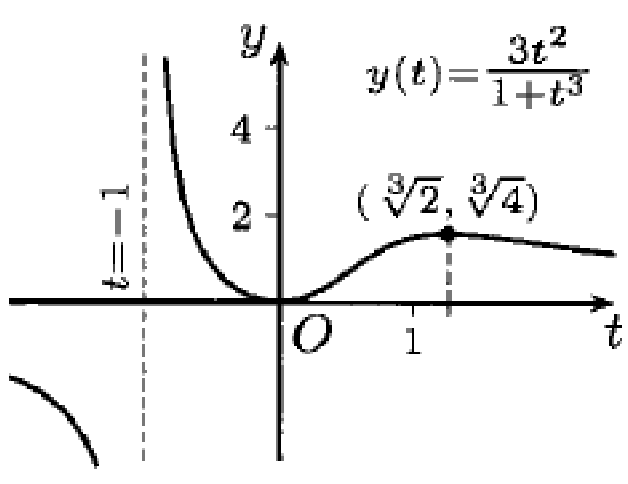
当然在还没有微分学工具的情况下这两个图像的作图还不是很容易的. 这里简单说明一下目前可以如何进行.

将 $x(t), y(t)$ 改写为

$$x(t) = \frac{3}{t^2 + \dfrac{1}{t}}, \quad y(t) = \frac{3}{t + \dfrac{1}{t^2}},$$

然后利用 (附录一中的) 习题 254–255 的已知图像再作倒数变换 (见习题 351–355) 就可以作出 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的草图.





习题 370.1(b) 的附图 1

实际上在将 $x(t), y(t)$ 如上改写之后, 仿照习题 369(b) 中的方法进行单调性分析也是不难的. 还可以注意到这里的 $y(t)$ 的分母就是该题中的 $y(t)$.

这里确定 $t>0$ 时 $x(t)$ 的最大值点和最大值是重要的 (在附图 1 中已经标出). 这可用平均值不等式来解决. 从

$$\frac{1}{x(t)}=\frac{\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}+t^2}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{4}},$$

可见在分子的三项相等时成立等号, 由此即可确定当 $t=\sqrt[3]{1/2}$ 时 $x(t)$ 达到最大值 $\sqrt[3]{4}$. 对于 $y(t)$ $(t>0)$ 的讨论是类似的.

下面是单调性分析结果的列表表示:

t	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	$(-1,\sqrt[3]{1/2})$	$\sqrt[3]{1/2}$	$(\sqrt[3]{1/2},+\infty)$	$+\infty$
$x(t)$	0	↗	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0

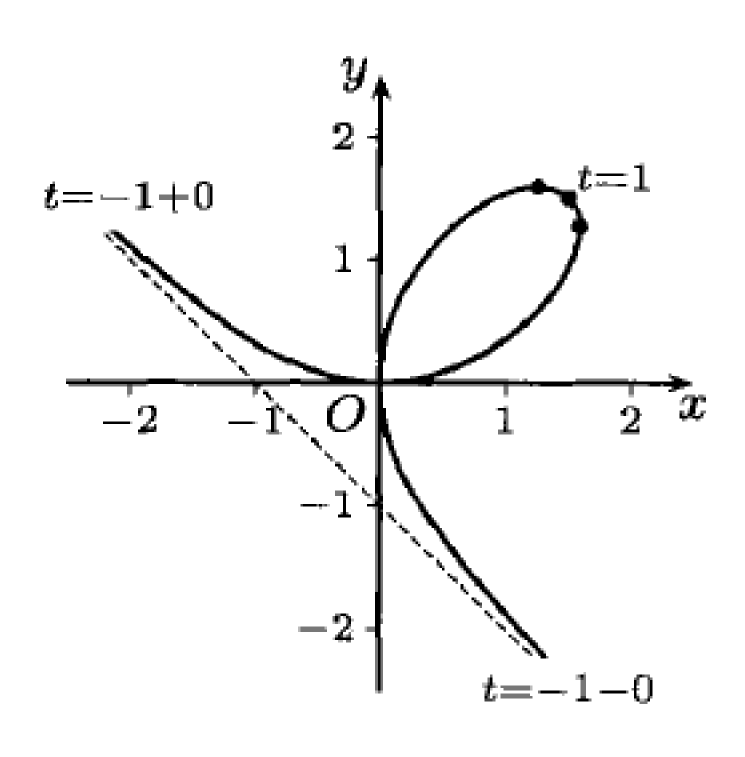
t	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2},+\infty)$	$+\infty$
$y(t)$	0	↘	↘	↗	$\sqrt[3]{4}$	↘	0

从参数方程可见当 $t\to-1$ 时图像趋于无穷远处. 通过计算极限

$$y(t)+x(t)=\frac{3t(t+1)}{1+t^3}=\frac{3t}{t^2-t+1}\to-1\ \ (t\to-1),$$

可见有斜渐近线 $x+y=-1$.

然后就可以从附图 1 作出 $y=y(x)$ 的图像. 如附图 2 所示, 这里一方面需要利用参数 $t=y/x$ 的几何意义, 另一方面可从隐函数方程关于 x, y 的对称性, 看出图像关于直线 $y=x$ 对称, 因此只要作出其中的一半再关于该直线作反射即可.



习题 370.1(b) 的附图 2

当参数 t 从 $-1+0$ 递增到 0 时, 如列表所示 $y=y(x)$ 从 $+\infty$ 处递减到 0, 图像从左边的渐近线附近趋于原点. 然后当 $t>0$ 时, 图像在第一象限中. 当 t 从 0 增加到 1 时, $x(t)$ 在 $t=\sqrt[3]{1/2}\approx0.79$ 处达到最大值 $\sqrt[3]{4}\approx1.587$, 然后递减.

作为 $y=y(x)$ 的图像来看, 则从原点起递增到点 $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$, 然后递减到点 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. 这样就作出了一半的图像. 利用图像关于第一象限的角平分线 $x=y$ 对称, 就不难完成另一半的图像.

用微分学工具可以更准确地作出这个图像, 并得到曲线的单调性和凹凸性的知识. 这将是第二章的 §2.12.3 的习题 1541 的内容. □

下一题的作图也是很有趣味的问题, 我们只做简要的介绍, 而将其中所需要的严格证明放到本节的补注小节中去.

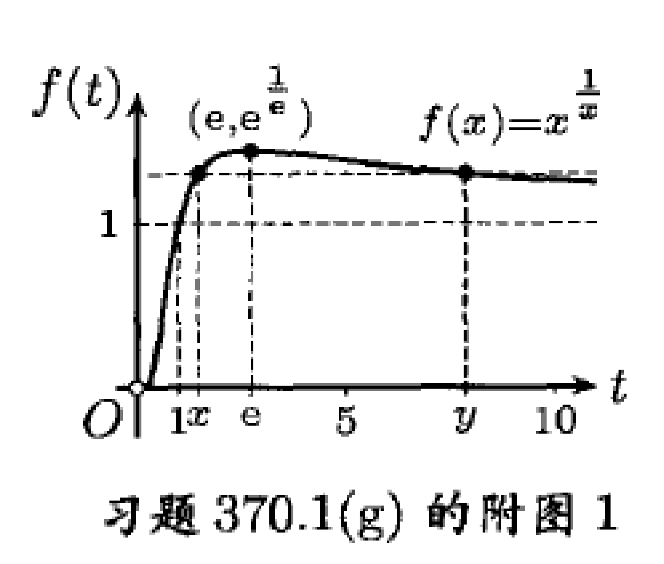
习题 370.1(g) 作出由 $x^y = y^x\ (x > 0, y > 0)$ 确定的隐函数的图像.

显然在第一象限的角平分线 $x = y$ 满足方程 $x^y = y^x$. 为了回答是否还有其他的点 (x, y) 满足该方程, 我们介绍两种方法.

解 1 将方程两边开 xy 次根, 得到等价的方程

$$x^{\frac{1}{x}} = y^{\frac{1}{y}},$$

可见这与函数 $f(t) = t^{\frac{1}{t}}$ 有关, 即是否存在 $x \neq y$ 使得 $f(x) = f(y)$. 下面我们给出其图像, 并说明如何用它来解本题.



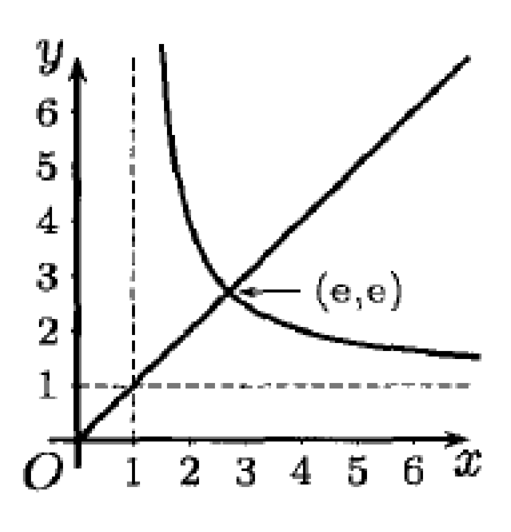
习题 370.1(g) 的附图 1

在附图 1 中作出了 f 的图像, 其中有关单调性和极限方面的结论与本题有关. 这就是在 $(0, \mathrm{e}]$ 上 f 严格单调递增, 而在 $[\mathrm{e}, +\infty)$ 上 f 严格单调递减. 最大值点是 $x = \mathrm{e}$, 最大值是 $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

此外有关的信息是 $f(1) = 1$, 当 $x > 1$ 时 $f(x) > 1$, $f(+0) = 0$ 和 $f(+\infty) = 1$.

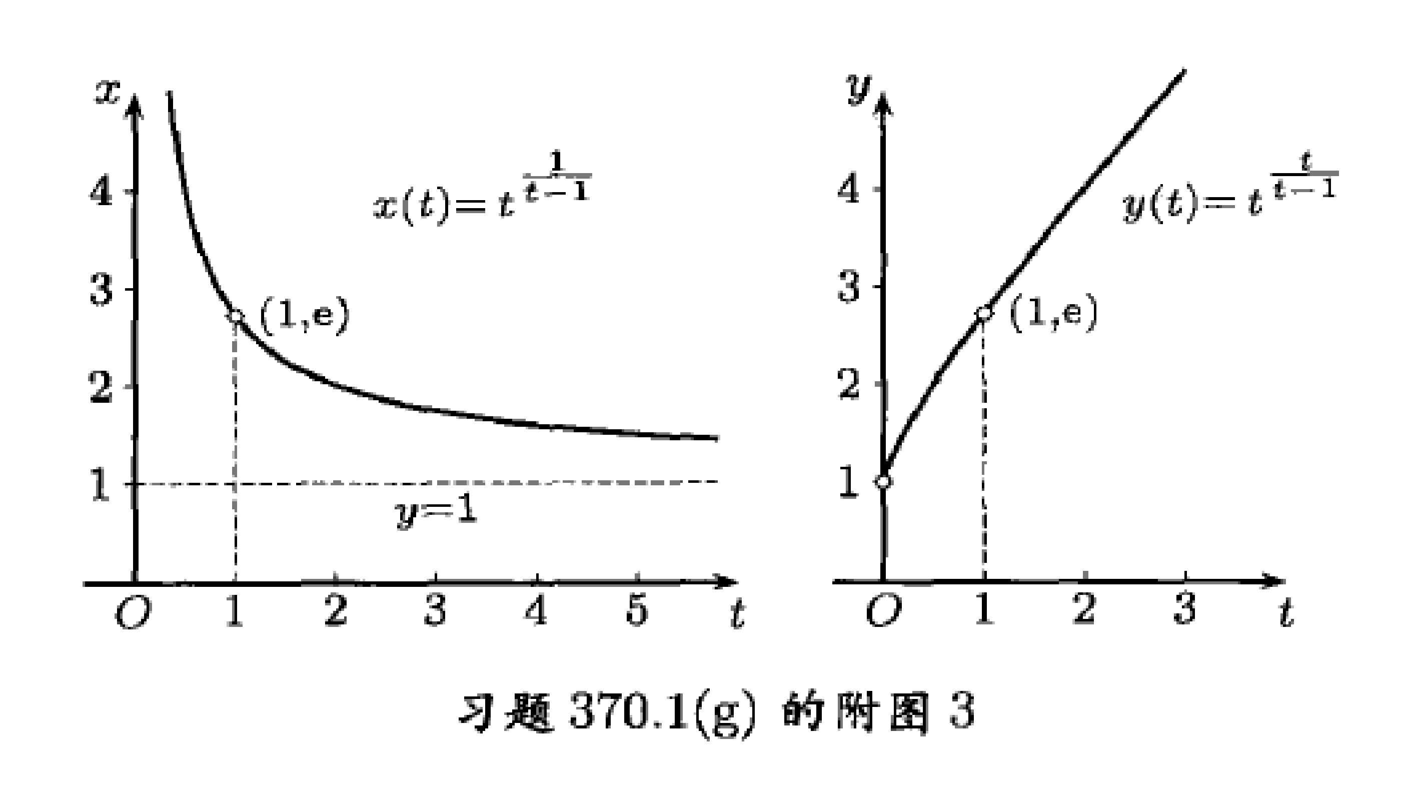
在 §1.4.7 的第 3 点中, 我们将给出函数 f 的单调性分析的初等证明 (还可参见 §2.12.2 的习题 1527).

由此可见, 在 $0 < x \leqslant 1$ 和 $x = \mathrm{e}$ 时, 不可能存在 $x = y$ 之外的其他 y 值满足方程 $x^y = y^x$, 而在 $1 < x < \mathrm{e}$ 和 $x > \mathrm{e}$ 时, 则除了 $x = y$ 之外还存在惟一的 y, 满足 $x \neq y$ 和方程 $x^y = y^x$. 这样就可以得到本题的解答, 其图像见附图 2.



习题 370.1(g) 的附图 2

如附图 2 所示, 除了 $y = x$ 的平凡解之外, 还存在一条其形状很类似于直角双曲线 $y = 1/x$ 的曲线, 它与直线 $y = x$ 交于点 (e, e), 又以 $x = 1$ 为垂直渐近线, 以 $y = 1$ 为水平渐近线. 这条曲线关于 x 的严格单调递减性质也已经包含在附图 1 的单调性信息之中了. □



习题 370.1(g) 的附图 3

解 2 在习题 370.1(b) 的笛卡儿叶形线的研究中的方法也可以解决这里的问题. 用 $y = tx$ 引入参数 t, 就可以得到参数方程

$$x(t) = t^{\frac{1}{t-1}},$$

$$y(t) = tx(t) = t^{\frac{t}{t-1}}.$$

为简明起见, 这里只将关于这两个函数的单调性信息罗列如下 (参见附图 3):

利用函数极限和连续性语言 (有关习题见后面的 §1.5 和 §1.7), $x(t)$ 在点 $t = 1$ 处的两

侧极限都等于 e, 若补充定义 $x(1)=\mathrm{e}$, 就成为在 $(0,+\infty)$ 上的严格单调递减的连续函数, 且有 $x(+0)=+\infty$ 和 $x(+\infty)=1$. 另一方面, $y(t)$ 在补充定义 $y(1)=\mathrm{e}$ 之后却是在 $(0,+\infty)$ 上的严格单调递增的连续函数, 且有 $y(+0)=1$ 和 $y(+\infty)=+\infty$.

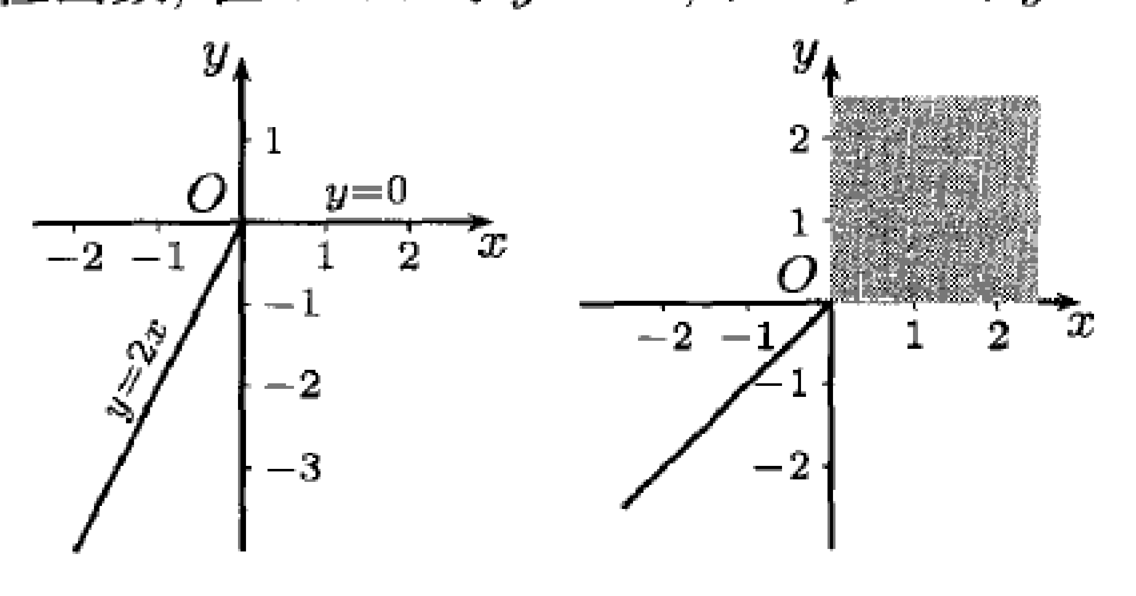
根据以上信息和参数 $t=y/x$ 的几何意义就可作出附图 2 中的图像.

对于 $x(t),y(t)$ 的上述单调性分析用微分学方法是容易得到的 (见后面的 §2.12.3 的习题 1544). 在 §1.4.7 的第 2 点中, 我们将用初等方法来解决这些问题. □

最后来观察习题 370.1(h) 的解答, 它有一些与众不同的特点.

习题 370.1(h) 作出由 $x-|x|=y-|y|$ 确定的隐函数的图像.

解 先作出函数 $y(x)=x-|x|$ 的图像. 如附图的左分图所示, $y(x)$ 是一个分段线性函数, 在 $x<0$ 时 $y=2x$, 在 $x\geqslant 0$ 时 $y=0$.



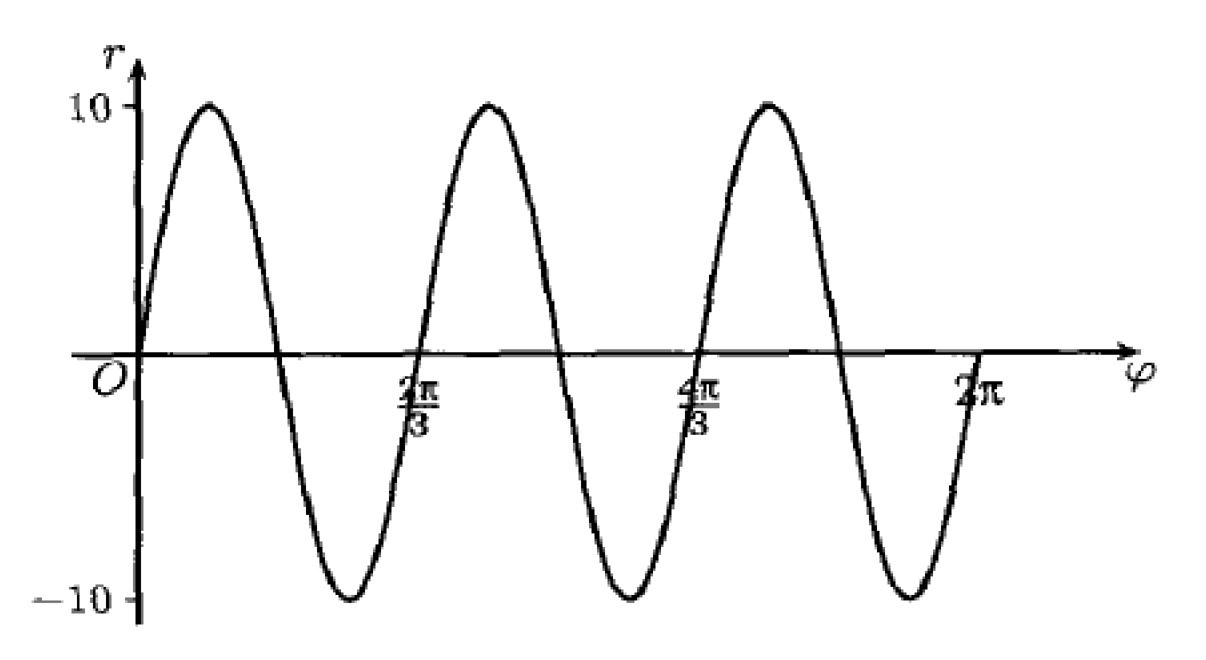
习题 370.1(h) 的附图

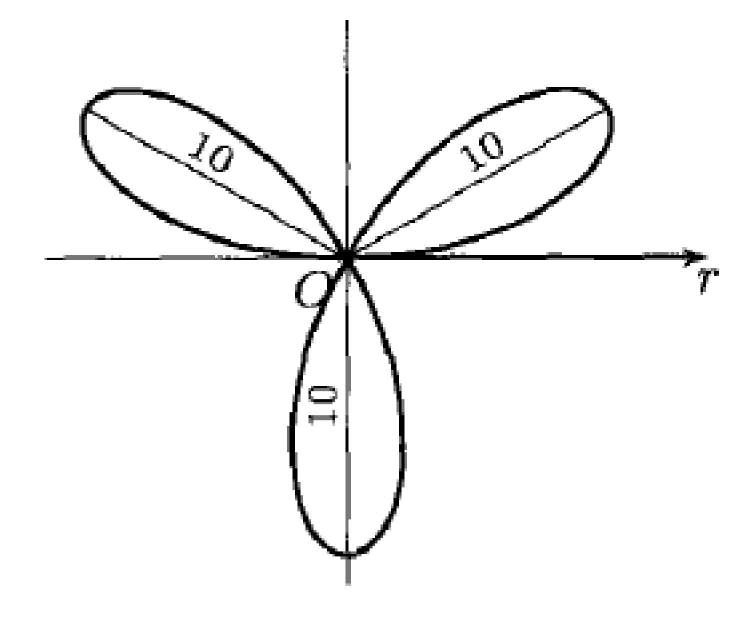
由此可见图像只能在一、三象限内. 在第三象限中若有点 (x,y) 满足方程 $x-|x|=y-|y|$, 则只能是 $x=y$, 在第一象限中, 包括两个正半轴与原点, 任何点 (x,y) 都满足该方程. 这表明, 其中的任何 $y=y(x)$ 都满足条件. 这样就得到了附图的右分图中的图像. □

注 在多元微积分中的隐函数理论 (见《习题集》的 §6.4) 给出了从方程 $f(x,y)=0$ 出发在某个点 (x_0,y_0) 附近能够确定隐函数 $y=y(x)$ (或者 $x=x(y)$) 的充分条件. 与此相反, 习题 370.1(h) 表明, 对于第一象限内的任何点的任何邻域, 都不可能由该题的方程确定出隐函数. 于是所谓的图像只能是将整个象限涂以阴影了.

1.4.5 极坐标系中的函数图像 (习题 371.1–371.3)

习题 371.1(f) 在极坐标系 (r,φ) 中作函数 $r=10\sin 3\varphi$ 的图像 (三叶玫瑰线).





习题 371.1(f) 的附图

这里的方法就是先在直角坐标系 (φ,r) (或 (r,φ)) 中作出 $r=10\sin 3\varphi$ 的图像, 然后将 φ 轴在想象中压缩为一个点, 从而作出在极坐标系中的草图.

如附图所示, 左分图在 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$ 的部分经过上述处理后就得到右边的第一叶, 然后可以分别得到第二叶和第三叶.

这里还要注意到在作第二叶时遇到了 $r<0$ 的问题. 在极坐标系中对于 $r<0$ 时的点 (r,φ) 的位置规定为: 从极点出发的极角为 φ 的射线的反方向直线上与极点距离为 $|r|$ 的点.

利用这个规定就可以发现在左分图中从 π 到 2π 的图像在右分图的极坐标系中不会产生新的图像. □

习题 371.1(a) 和 (b) 的图像都是螺线, 即围绕极点作无限次旋转的曲线 (其图像见附录一). 只是对于后者需要注意存在水平渐近线. 这在直角坐标系中容易求出. 实际上由于 $r=\frac{\pi}{\varphi}$, 因此当 φ 趋于 0 时点 (r,φ) 趋于无穷远. 利用 $y=r\sin\varphi$ 和关于正弦函数的基本极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 就可以得到

$$\lim_{\varphi\to 0} y(\varphi)=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\pi\sin\varphi}{\varphi}=\pi,$$

即存在水平渐近线 $y=\pi$.

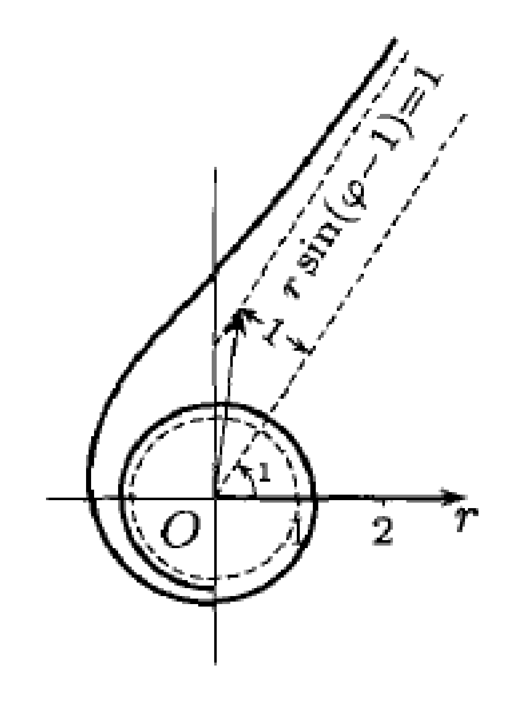
此外, 在这两个习题中还特别用虚线画出了函数在 $\varphi<0$ 时的图像.

同样存在水平渐近线的还有习题 371.2(b), 其计算同上.

在下面的例子中出现了斜渐近线.

习题 371.1(h) 在极坐标系 (r,φ) 中作函数 $\varphi=\frac{r}{r-1}$ $(r>1)$ 的图像.

解 曲线为螺线. 从方程可见, 当 $r\to 1+0$ 时它将作无限次旋转从外部逼近圆周 $r=1$. 另一方面, 当 r 趋于 $+\infty$ 时极角 $\varphi\to 1$. 这强烈提示该曲线可能存在渐近线.



习题 371.1(h) 的附图

然而这并不表明从极点出发极角为 1 (即近似为 57.295 8°) 的直线就是渐近线. 写出直角坐标方程

$$x=r\cos\frac{r}{r-1},\quad y=r\sin\frac{r}{r-1},$$

就可以看出 $r\to+\infty$ 等价于 $x\to+\infty$, 然后按照求渐近线的计算方法求出极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{r\to+\infty}\tan\frac{r}{r-1}=\tan 1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}(y-x\tan 1)&=\lim_{r\to+\infty}\left(r\sin\frac{r}{r-1}-\tan 1\cdot r\cos\frac{r}{r-1}\right)\\&=\lim_{r\to+\infty}\frac{r}{\cos 1}\sin\frac{1}{r-1}=\frac{1}{\cos 1},\end{aligned}$$

即得斜渐近线 $y=x\tan 1+\sec 1$, 其极坐标方程是 $r\sin(\varphi-1)=1$, 具有明显的几何意义 (参见附图). □

在极坐标系中作图时仍然可以利用在直角坐标系中作图时经常出现的对称性. 例如习题 371.2(c) 就是如此, 其中的方程是 $r^2+\varphi^2=100$. 这时图像关于 x 轴和 y 轴都是

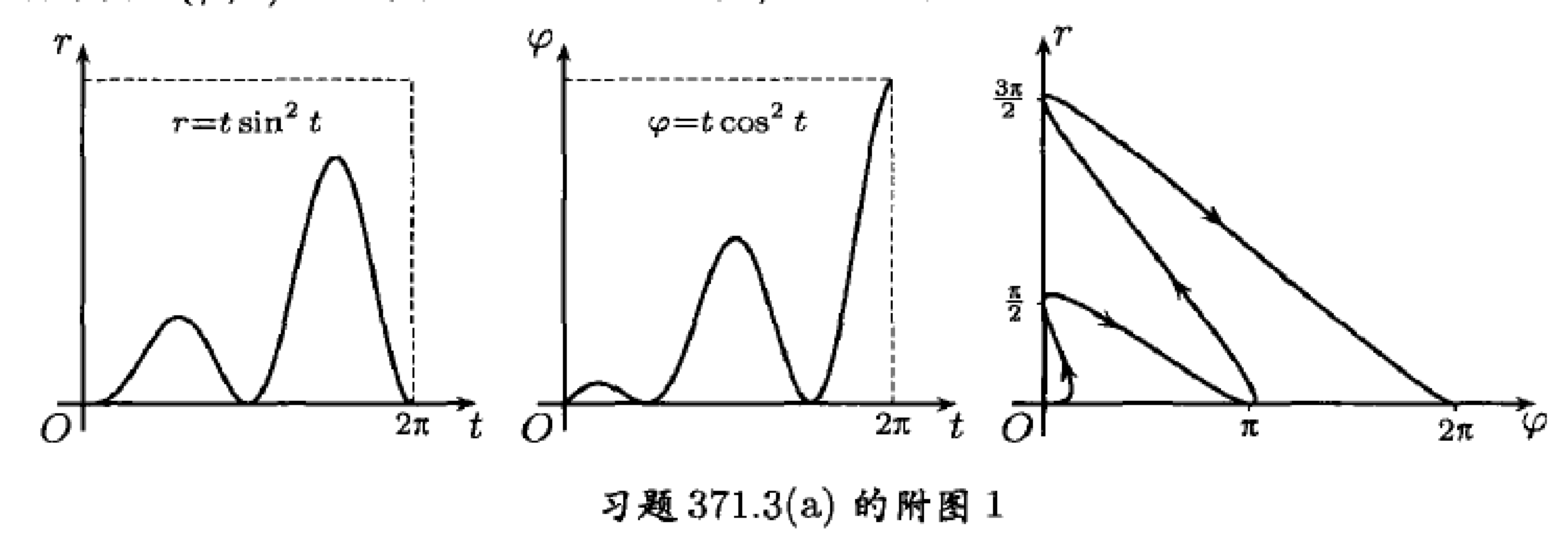
对称的, 因此只要作出 $r,\varphi\in[0,10]$ 部分的图像, 然后利用对称性即可. (为清楚起见在附录一中对于该题只作出了这部分的图像, 当然它并非局限在第一象限内.)

最后两个习题, 即习题 371.3(a) 和 (b), 是用参数方程给出极坐标系中的函数, 要求作其图像, 下面以其中的第一题为例对其中的方法作简要说明.

习题 371.3(a) 在极坐标系 (r,φ) 中作以参数 $(t\geqslant 0)$ 形式给出的函数 $\varphi=t\cos^2 t, r=t\sin^2 t$ 的图像.

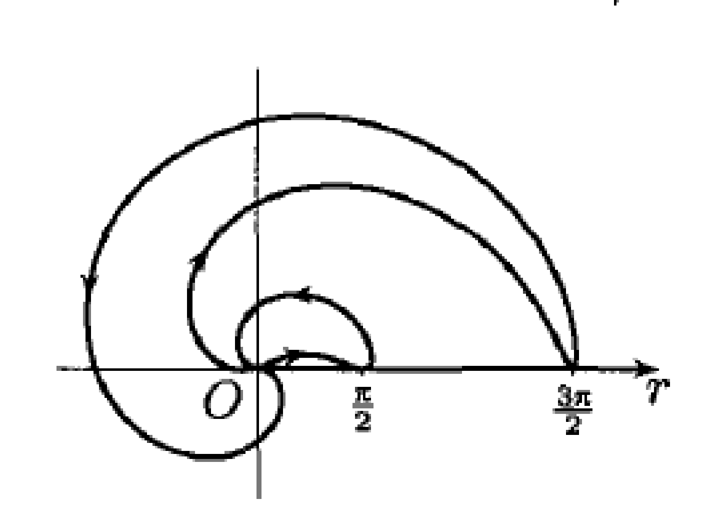
解 只要将前面关于参数方程给出的函数作图方法和上面建议的极坐标系中函数的作图方法合用就不难解决问题. 为清楚起见用两个附图来说明作图的过程.

首先如附图 1 的前两个分图所示, 作出 $r(t),\varphi(t)$ 在直角坐标系中的图像, 然后将它们合成为在 (φ,r) 的直角坐标系中的图像, 即得到附图 1 最右边的分图.



习题 371.3(a) 的附图 1

在附图 1 的基础上, 就不难作出附图 2 中的极坐标 (r,φ) 中的函数草图.



习题 371.3(a) 的附图 2

为清楚起见, 在附图 1 的最后一幅分图和附图 2 中分别用箭头标出了参数 t 的增加方向. 两个图中各自的 4 段曲线分别一一对应.

在附图 2 中它们分别为: (1) 从原点到极轴上的 $r=\pi/2$; (2) 从极轴上的 $r=\pi/2$ 回到原点, 这时的 $\varphi=\pi$; (3) 从原点到极轴上的 $r=3\pi/2$; (4) 从极轴上的 $r=3\pi/2$ 回到原点, 这时的 $\varphi=2\pi$. □

小结 对于用极坐标 r,φ 给出的函数, 设其方程为 $r=r(\varphi)$, 则从

$$x=r(\varphi)\cos\varphi,$$

$$y=r(\varphi)\sin\varphi$$

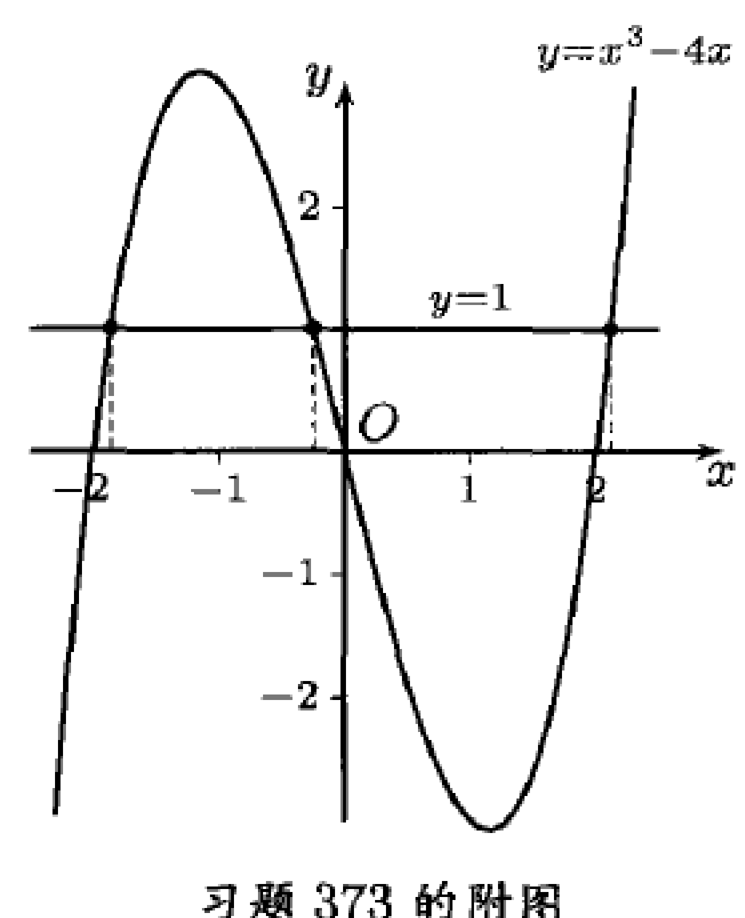
可见, 这就是以 φ 为参数的参数方程给定的函数. 由于极坐标所特有的几何意义, 如果能够先在 (r,φ) 的直角坐标系中作出图像, 则就比较容易得到它在极坐标系中的图像.

另一方面, 在前面的直角坐标系中的许多作图方法对于极坐标系也是有效的. 上面给出的渐近线计算和对称性等方法就是这方面的例子.

1.4.6 用函数图像求方程 (组) 的近似解 (习题 372–380)

由于许多精密的求根方法都需要事先给定所要求的根的近似值作为初始值, 因此从函数图像得到的根的近似解即使比较粗糙, 也是有意义的. 这里只举一个例子.

习题 373 利用图像解方程 $x^3-4x-1=0$.



习题 373 的附图

解 这里有几个方法. 一种方法是作出函数 $y=x^3-4x-1$ 的图像, 然后从该图像与 x 轴的交点位置来读出其近似值.

这里采取另一种方法, 即分别作出 $y=x^3-4x$ 和 $y=1$ 的图像, 然后从它们的交点读出其横坐标作为根的近似值. 如附图所示, 三个根的近似值约为 $-1.9, -0.3$ 和 2.1. □

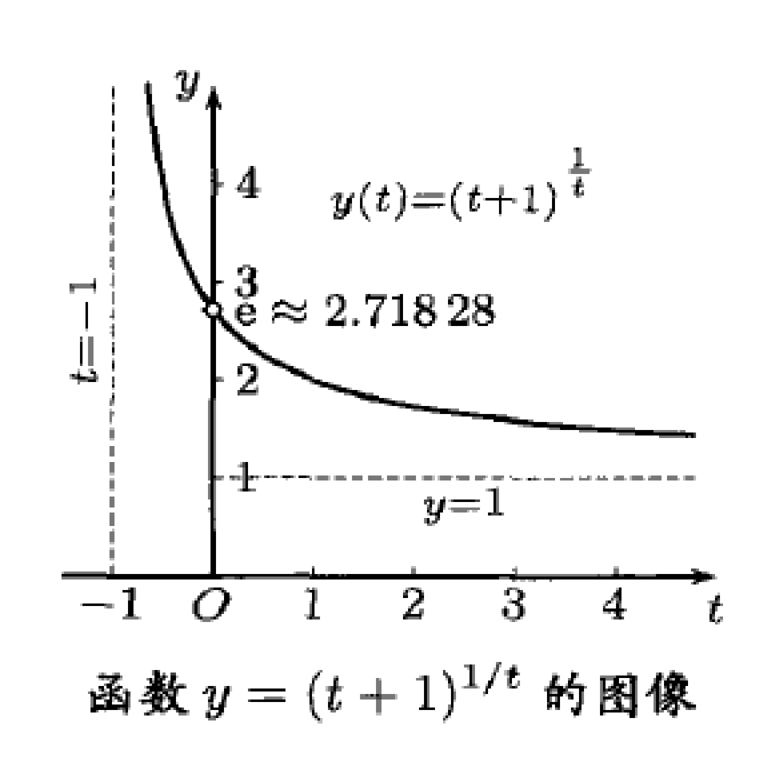
注 用 Mathematica 软件求出的三个根的近似值为 $-1.860\,8, -0.254\,1$ 和 $2.114\,9$.

1.4.7 补注

从前面可见, 为了作出较为准确的草图, 其中的单调性分析起了最为重要的作用. 困难往往在于缺乏微分学工具时, 对较为复杂的函数很难作出这样的分析.

在这个补注中, 我们将用初等方法 (即指不用微分学工具) 分几步来解决在习题 369(g) 遇到的函数 $x(t)=t^{\frac{1}{t+1}}$, $y(t)=(t+1)^{\frac{1}{t}}$, 习题 370.1(g) 的解 1 中的辅助函数 $f(t)=t^{\frac{1}{t}}$ 和解 2 中出现的两个函数 $x(t)=t^{\frac{1}{t-1}}$ 和 $y(t)=tx(t)=t^{\frac{t}{t-1}}$ 的单调性分析问题. 它们在有关问题的作图中起关键作用.

1. 对 $y(t)=(t+1)^{\frac{1}{t}}$ 的单调性分析 (参见右边的附图)



函数 $y=(t+1)^{1/t}$ 的图像

这个函数在 $t=0$ 处没有定义, 但不难证明它有极限. 对于还没有学习函数极限的读者来说, 至少可以从数列极限来理解以下内容.

令 $t_n=\dfrac{1}{p_n}$, 其中 $p_n\to+\infty$, 则就可以用习题 71 知道有 $\lim\limits_{n\to\infty}y(t_n)=\mathrm{e}$. 同理令 $t_n'=\dfrac{1}{q_n}$, 其中 $q_n\to-\infty$, 就又得到 $\lim\limits_{n\to\infty}y(t_n')=\mathrm{e}$. 综合起来这就表明任何数列 $t_n\to 0$ (且其每一项非零) 时, $y(t_n)$ 一定趋于 e.

在函数极限理论中用归结原理过渡就可以得到 $\lim\limits_{t\to0}y(t)=\mathrm{e}$. 类似地不难建立 $y(-1-0)=+\infty$ 和 $y(+\infty)=1$ 的结论. 其中后者可以利用习题 65 和夹逼方法得到.

下面主要是证明 $y(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 和 $(-1,0)$ 上分别严格单调递减.

利用 §1.2.9 中的命题 1.4(6) 所提供的代入法, 可见只需要对于自变量为有理数的情况作出单调性证明就已经足够了.

对于 $t>0$, 设 m_1, m_2, n 为正整数, 且使得

$$t_1=\frac{m_1}{n}>t_2=\frac{m_2}{n},$$

即满足 $m_1>m_2$, 就可以用平均值不等式如下:

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{m_1}{n}\right)^{\frac{m_2}{m_1}}&=\Bigg[\left(1+\frac{m_1}{n}\right)^{m_2}\cdot\underbrace{1\cdot\cdots\cdot 1}_{m_1-m_2\text{ 个 }1}\Bigg]^{\frac{1}{m_1}}\\&<\frac{m_2\left(1+\frac{m_1}{n}\right)+(m_1-m_2)}{m_1}=1+\frac{m_2}{n},\end{aligned}$$

这等价于 $y(t_1)<y(t_2)$, 即已经证明 $y(t)$ 严格单调递减. 这同时也就解决了习题 369(g) 中的 $y(t)$ 的单调性分析问题.

对于 $-1<t<0$, 用相同的方法可以证明也是如此.

2. 对 $x(t)=t^{\frac{1}{t-1}}$ 和 $y(t)=t^{\frac{t}{t-1}}$ 的单调性分析 (参见习题 370.1(g) 的解 2 及其附图 3)

如前所说用 $y=tx$ 的方法得到参数 t 的两个函数

$$x(t)=t^{\frac{1}{t-1}},\quad y(t)=tx(t)=t^{\frac{t}{t-1}}.$$

将 $x(t)$ 与 $(t+1)^{\frac{1}{t}}$ 作比较, 就可以知道它们之间只相差 t 的一个单位平移, 于是即推出 $x(t)$ 在 $0<t<1$ 和 $t>1$ 时均为严格单调递减, 且在补充定义 $x(1)=\mathrm{e}$ 后成为 $t>0$ 上的严格单调递减函数.

对于 $y(t)$ 则只需要将它改写为

$$y(t)=t^{\frac{t}{t-1}}=\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{t}-1}},$$

可见 $y(t)$ 与 $x(t)$ 只相差关于 t 的倒数变换, 因此推出 $y(t)$ 在 $0<t<1$ 和 $t>1$ 时均为严格单调递增, 且在补充定义 $y(1)=\mathrm{e}$ 后成为 $t>0$ 上的严格单调递增函数.

3. 对 $t^{\frac{1}{t}}$ 的单调性分析 (参见习题 370.1(g) 的解 1 及其附图 1)

为与前后比较方便起见改用 x 为自变量.

设 $x_2>x_1\geqslant\mathrm{e}$, 则有 $t>1$ 使得 $x_2=tx_1$, 同时 (利用前面的讨论) 还成立 $t^{\frac{1}{t-1}}<\mathrm{e}\leqslant x_1$, 于是就有

$$x_2^{\frac{1}{x_2}}=(tx_1)^{\frac{1}{tx_1}}=\left[\left(t^{\frac{1}{t-1}}\right)^{t-1}\cdot x_1\right]^{\frac{1}{tx_1}}<\left(x_1^{t-1}\cdot x_1\right)^{\frac{1}{tx_1}}=x_1^{\frac{1}{x_1}}.$$

这就证明了函数 $x^{\frac{1}{x}}$ 在区间 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上严格单调递减.

同样对于 $0<x_2<x_1\leqslant\mathrm{e}$, 存在 $0<t<1$ 使得 $x_2=tx_1$, 且成立 $t^{\frac{1}{t-1}}>\mathrm{e}>x_1$, 以下的推导与上面相同, 只是要利用 $t-1<0$, 这时以 $t-1$ 为指数的幂函数是严格单调递减的. 这证明了函数 $x^{\frac{1}{x}}$ 在区间 $(0,\mathrm{e}]$ 上严格单调递增.

还应当指出, 在区间 $(0,1)$ 上函数 $x^{\frac{1}{x}}$ 的严格单调递增性的证明可以从幂函数和指数函数的单调性直接推出, 并不需要如上的推导.

4. 对 $x(t)=\sqrt[t+1]{t}$ 的单调性分析 (参见习题 369(g) 的解及其附图)

为了与上面的讨论容易比较起见, 将这个函数改记为 $y(x)=x^{\frac{1}{x+1}}$.

与前面的 $x^{\frac{1}{x}}$ 情况类似, 在 $[0,1]$ 上的严格单调递增性是容易证明的. 设 $0<x_1<x_2<1$, 则就有 $1>\dfrac{1}{x_1+1}>\dfrac{1}{x_2+1}>\dfrac{1}{2}$, 于是就有

$$x_1^{\frac{1}{x_1+1}}<x_2^{\frac{1}{x_1+1}}<x_2^{\frac{1}{x_2+1}},$$

其中分别利用了幂函数和指数函数的单调性.

主要的问题是讨论 $x\geqslant 1$ 的情况. 从 $y(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增, $y(1)=1$ 和 $y(+\infty)=1$ 可见 $y(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可能有附图所示的情况, 即先递增再递减.

这里采用的方法是将 x 换为 tx, 然后问是否有使得 $y(x)=y(tx)$ 的 $t\neq 1$? 下面可以看到可由此确定 $y(x)$ 的单调区间, 并得到 $y(x)$ 的最大值点和最大值.

从 $y(x)=y(tx)$, 也就是 $x^{\frac{1}{x+1}}=(tx)^{\frac{1}{tx+1}}$, 就可以得到

$$x^{\frac{x}{x+1}}=t^{\frac{1}{t-1}}. \tag{1.29}$$

由于 $x\geqslant 1$, 上式左边的函数是 x 的严格单调递增函数, 且当 x 从 1 单调递增趋于 $+\infty$ 时, $y(x)$ 也从 1 单调递增趋于 $+\infty$. 应用反函数定理, 就可以从 (1.29) 确定出唯一的函数 $x(t)$.

该式右边的函数在前面的第 2 点已经见过. 当 t 从 0 单调递增到 1 时, (1.29) 的右边从 $+\infty$ 严格单调递减到 e, 而刚才确定的函数 $x(t)$ 则从 $+\infty$ 严格单调递减到某一个数 x_0. 可以从 $x_0^{\frac{x_0}{x_0+1}}=\mathrm{e}$ 解出 $x_0\approx 3.591\,12$. 同样, 当 t 从 1 单调递增趋于 $+\infty$ 时, (1.29) 的右边从 e 严格单调递减趋于 1, 而 $x(t)$ 则从 x_0 严格单调递减趋于 1.

最后来证明函数 $x^{\frac{1}{x+1}}$ 在 $[1,x_0]$ 上严格单调递增, 而在 $[x_0,+\infty)$ 上严格单调递减.

设 $x_0<x_1<x_2$, 则有 $t>1$, 使得 $x_2=tx_1$. 这时 $x(t)<x_0<x_1$, 于是就有

$$\begin{aligned}x_2^{\frac{1}{x_2+1}}&=(tx_1)^{\frac{1}{tx_1+1}}=[(t^{\frac{1}{t-1}})^{t-1}\cdot x_1]^{\frac{1}{tx_1+1}}\\&=[(x(t)^{\frac{x(t)}{x(t)+1}})^{t-1}\cdot x_1]^{\frac{1}{tx_1+1}}\\&<[(x_1^{\frac{x_1}{x_1+1}})^{t-1}\cdot x_1]^{\frac{1}{tx_1+1}}=x_1^{\frac{1}{x_1+1}}.\end{aligned}$$

对于 $1<x_2<x_1<x_0$, 则有 $t\in(0,1)$, 使得 $x_2=tx_1$. 这时有 $x(t)>x_0>x_1$. 以下的推导与上面相似, 只是要利用 $t-1<0$ 而已.

这样就完成了对函数 $x^{\frac{1}{x+1}}$ 的单调性分析, 而且知道在 $x=x_0\approx 3.591\,12$ 时该函数达到最大值 (近似地为 1.321).

注 由 $x^y=y^x$ 引起的一系列问题从欧拉和哥德巴赫以来就有许多有趣的讨论. 较新的一文见美国数学月刊, 第 111 卷 (2004), 668–679 页, 其中译文见数学译林, 第 26 卷 (2007), 第 2 期, 117–125 页. 又见该刊的第 28 卷 (2009), 第 2 期, 116–124 页.

§1.5 函数的极限 (习题 381–644)

内容简介 这一节在数列极限的基础上学习函数极限, 通过 §1.2 与本节的训练, 可以在极限理论方面打下比较扎实的基础, 从而为进入微积分学做好准备. 在本节的极限计算中要突出无穷小量的阶数的概念, 同时学习应用《习题集》的下一节中的小 o、大 O、等价记号 $\sim$ 和等价量代换法.

在补注小节中对于等价量代换法作补充说明, 给出函数极限的复合运算的充分条件, 讲解一些较难的习题, 还对迭代生成的函数列作专门讨论.

1.5.1 有界性、确界和振幅 (习题 381–400)

数列的极限存在时必定有界, 这是收敛数列的重要性质 (见 §1.2.6 的习题 93). 概略地说, 当下标充分大后收敛数列的所有各项都在极限值的某邻域中, 而在邻域外至多只有数列中的有限项, 因此数列有界. 对于在某点 $x = x_0$ 存在极限的函数 $f(x)$ 而言, 当 x 进入去心邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ 后, $f(x)$ 都在极限值的某邻域中, 但在该邻域外, 在函数的定义域中仍可能有许多点, 从而 $f(x)$ 未必有界. 因此当函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 存在极限时只能得出函数在该点局部有界的结论.

习题 381 证明, 函数 $f(x) = \begin{cases} n, & x = \dfrac{m}{n},\ n, m \text{ 为互素整数, 且 } n > 0, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 在每一个点 x 上, 它的值是有限的, 但不是局部有界的 (即在该点的任一邻域内是无界的).

解 按题意只要对于任意给定的点 x_0, $\varepsilon > 0$ 和 $M > 0$, 找出一个有理点 $x = \dfrac{m}{n}$, 使得它落在邻域 $O_\varepsilon(x_0)$ 内, 且满足 $f(x) = n > M$.

取 n 是大于 $\max\{M, \dfrac{1}{\varepsilon}\}$ 的素数. 由于素数有无限多个, 这是可能的. (素数有无限多个的定理是古希腊数学家早已证明的事实.)

这时所有以该素数 n 为分母的有理分数 $\dfrac{m}{n}$ 有无限多个. 若 m 与素数 n 可约, 则 m 只能是 n 的倍数. 去掉这样的分数之后, 在留下的 $\dfrac{m}{n}$ 全体中, 相邻两个分数之间的距离不会超过 $\dfrac{2}{n}$. 由于 n 的取法, 已经有 $\dfrac{2}{n} < 2\varepsilon$, 因此至少有一个 $\dfrac{m}{n}$ 落在邻域 $O_\varepsilon(x_0)$ 之中, 而这时就有 $f(\dfrac{m}{n}) = n > M$. □

习题 382 如果在 (a) 开区间, (b) 闭区间上的函数 $f(x)$ 有定义, 而且是局部有界的, 那么这个函数在所给定的开区间或闭区间上是有界的吗? 并分别举例说明.

解 本题讨论与上题不同的另一个问题: 若 $f(x)$ 在区间上每点局部有界, $f(x)$ 是否有界?

(a) 记开区间为 (a, b). 由条件知对每一个 $x_0 \in (a, b)$, 存在 $\delta_{x_0} > 0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0})$ 上有界. 但无穷个界中未必有最大的一个可以作为 $f(x)$ 的界. 例如 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$, 即为无界的.

(b) 记闭区间为 $[a,b]$. 同 (a) 一样, 对于每一个 $x_0 \in [a,b]$, 存在 $\delta_{x_0} > 0$, 使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0}) \cap [a,b]$ 上有界. 由有限覆盖定理知道, 可从开区间集 $\{(x_0-\delta_{x_0}, x_0+\delta_{x_0}) \mid x_0 \in [a,b]\}$ 中选出有限个即可覆盖 $[a,b]$, 而对应的有限个界中的最大者可取作为 $f(x)$ 的界.

若覆盖定理尚未学到, 上法录存备用, 下面给出另一个方法.

用反证法. 若在题设条件下, 所述函数无界, 则仿 §1.2.6 的习题 126 知存在 $\{x_n\} \subset [a,b]$ 使 $|f(x_n)| \geqslant n$. 由习题 125 (即凝聚定理), 存在 $\{x_n\}$ 的收敛子列 $\{x_{p_n}\}$, 记其极限为 $x_0 \in [a,b]$, 而 $|f(x_{p_n})| \geqslant p_n \to +\infty\, (n \to \infty)$, 这与 $f(x)$ 在 x_0 局部有界矛盾. □

注 对于已经学过数学分析的读者来说, 可能会觉得本题极其"初等". 然而我们认为还是需要对于第一次见到这类习题的初学者说几句话.

首先, 本题是两个开放式的证明题 (简称为开放题), 因为对于开区间和闭区间的最后结论完全不同, 而在题意中对此没有任何提示. 这本身就是困难. 设想某位初学者以为开区间上处处局部有界的函数在整个开区间上一定有界, 然后想方设法去证明它, 会成功吗?

其次, 对于表面上完全相同的两道题, 我们的答案完全不同. 为什么?

仔细看一下该题就可以知道, 题中实际上提出的是一种猜测, 即在定义域上处处局部有界的函数在整体上有界. 将它作为一个待证的命题, 则在开区间情况它是不成立的. 因此只要举一个例子就够了. 这种用于否定一个命题 (或论断) 的例子就称为反例. 对于闭区间则情况完全不同. 这里该命题是成立的, 于是就需要给出严格的证明.

那么如何知道本题所含的两个结论恰好相反, 因而会采取完全不同的策略呢? 这里只能说我们在学习过程中必须积累一些基本的知识和结论, 它们往往可以作为思考问题的依据. 有一位数学家 (也许不无偏颇地) 说过, 在数学中只有两种内容是重要的, 一是定理, 二是反例. 可以理解, 定理告诉我们什么是正确的, 反例告诉我们什么是不正确的. 在这个意义上它们具有同等的重要性.

最后, 可以想到, 在今后还会遇到许多这样的开放题, 特别是在科学研究中遇到的许多问题, 事先不知道它们的答案, 那时怎么办? 这里的回答只能是在摸索中积累经验, 逐步增强自己对于命题和猜测的判断能力. 即使如此, 判断错误还是会经常发生的. 实际上这就是科学研究本身的特点. 科研中遇到的问题与学习中的作业题 (包括《习题集》中的习题) 相比, 最大的不同点在于: 前者没有现成的答案, 而后者则肯定有答案.

习题 383 证明, 函数 $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ 在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上是有界的.

解 1 $f(x)$ 为偶函数, 对 $x \geqslant 0$ 考虑其有界性即可.

注意到 $f(x) \to 0\ (x \to +\infty)$, 故对 $\varepsilon_0 = 1$, 存在 $X_0 > 0$, 当 $x > X_0$ 时 $|f(x)| < 1$. 当 $0 \leqslant x \leqslant X_0$ 时, $|f(x)| \leqslant 1 + X_0^2$, 故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 中以 $1 + X_0^2$ 为界. □

解 2 由 $\dfrac{1}{1+x^4} \leqslant 1$, $\dfrac{x^2}{1+x^4} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x^2}{1+x^4} \leqslant \dfrac{1}{2}$, 故 $f(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$. □

解 3 在作以上两种估计时, 或将自变量分段, 或把函数分为两个, 这些都会影响估计的精度. 下面对函数作整体考虑, 求其最“确切”的界, 即确界.

用三角函数代换, 令 $x^2=\tan t\ (0\leqslant t<\frac{\pi}{2})$ 代入 $f(x)$ 得

$$0\leqslant f(x)=\frac{1+\tan t}{\sec^2 t}=\cos^2 t+\cos t\sin t=\frac{1}{2}(1+\cos 2t+\sin 2t)$$
$$=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\sin(2t+\frac{\pi}{4}))\leqslant\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\approx 1.207.$$

注意这样估计得到的上界是可达的, 故是最小的上界, 即上确界. 下界 0 虽不可达, 但可无限接近 (即当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to 0$), 故是最大的下界, 即下确界. □

习题 384 证明, 函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 的任何邻域内是无界的, 但在 $x\to 0$ 时不是无穷大量.

解 考虑趋于 $x=0$ 的两个数列 $\{x_k\},\{x'_k\}$:

取 $x_k=\frac{1}{2k\pi}$, $k=1,2,\cdots$, 则 $f(x_k)=2k\pi\to+\infty\ (k\to\infty)$.

取 $x'_k=\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$, $k=1,2,\cdots$, 则 $f(x'_k)=0$.

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任意邻域内无界, 但当 $x\to 0$ 时不是无穷大量.

上述两个数列的取法是从图形启示下得出的. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 的图像是直角双曲线 $\frac{1}{x}$ 与 $\cos\frac{1}{x}$ 的图像的乘积, 后者与习题 299 中 $\sin\frac{1}{x}$ 的图像是类似的 (参见 §1.4.2 中该题的附图). □

下面还有不少习题要求确定某个函数在定义域上的上下确界及其振幅, 我们只给出其中的第一题的解答, 它有典型意义.

习题 386 证明, 函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$ 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内的下确界为 0, 上确界为 1.

解 由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负, 因此 $f(0)=0$ 是函数所能取到的最小值, 它就是下确界. 另一方面, $f(x)<1$ 处处成立, 因此 1 是 f 的一个上界. 下面证明它就是最小的上界.

为此任取 $0<\varepsilon<1$, 我们来看是否在定义域 $[0,+\infty)$ 内存在某个点 x, 使得 $f(x)>1-\varepsilon$.

从 $f(x)=\frac{x}{1+x}>1-\varepsilon$ 即可解出为 $x>\frac{1}{\varepsilon}-1$, 这样的 x 在 $[0,+\infty)$ 内是能取到的. 由此可见 $1-\varepsilon$ 不是 f 的上界. 因此 1 是最小上界, 即上确界. □

1.5.2 函数极限的定义 (习题 401–407)

这里除了前两个题相当于数列极限中的习题 41–43 的对应物之外, 其他都是为熟悉各种函数极限的定义而设置的.

函数极限有许多种不同的类型. 为方便起见, 我们将以下函数极限称为基本类型, 即设 a, A 为有限实数, 设函数 f 在以 a 为中心的去心邻域①上有定义, 称 f 在点 a 处存在极限 A, 记为

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

如果对任意数 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 也可记为 $f(x) \to A\ (x \to a)$.

所有其他类型的函数极限定义可以从基本类型的函数极限定义加以变更而得到. 从自变量方面来看, 基本类型的函数极限定义中所用的去心邻域 $0 < |x-a| < \delta$ 应修改如下:

对于 $x \to a+0$, 改用 $a < x < a+\delta$, 或 $0 < x-a < \delta$, 或 $x \in (a, a+\delta)$;

对于 $x \to a-0$, 改用 $a-\delta < x < a$, 或 $-\delta < x-a < 0$, 或 $x \in (a-\delta, a)$;

对于 $x \to \infty$, 改用 $|x| > E > 0$;

对于 $x \to +\infty$, 改用 $x > E > 0$;

对于 $x \to -\infty$, 改用 $x < -E < 0$.

从因变量方面来看, 基本类型的函数极限定义中的 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 应修改如下:

对于 $A = \infty$, 改为 $|f(x)| > G > 0$;

对于 $A = +\infty$, 改为 $f(x) > G > 0$;

对于 $A = -\infty$, 改为 $f(x) < -G < 0$;

对于 $A = b-0$, 改为 $b - \varepsilon < f(x) < b$;

对于 $A = b+0$, 改为 $b < f(x) < b+\varepsilon$.

本节以下的习题内容主要是函数极限的计算, 其中较常见且较困难的极限是各种类型的不定式. 在不定式中常见的有 $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ 等类型. 计算的基本方法是用代数、三角等运算或变量代换把未定因式、无穷小因式和无穷大因式析出加以比较; 还需结合等价无穷量的代换, 先算出确定因式 (非零, 非无穷) 的极限, 利用一些已知结果等.

以下根据计算极限的函数类型分成几个小节来介绍.

1.5.3 有理函数的极限计算 (习题 408–434)

本小节主要计算有理函数的极限. 常用因式分解、二项式展开等代数方法析出未定因式加以处理, 有时也引用简单的变量代换.

① 对数学分析中的函数极限来说, 函数 f 在点 a 的某个去心邻域上有定义已经足够. 在《习题集》的新版中将以 a 为中心的去心邻域改为"以 a 为聚点的集合 $X = \{x\}$", 这更一般一些. 相应地对于下面的条件"$0 < |x-a| < \delta$"需要增加"对 $f(x)$ 有意义的 x"的规定.

这里的前三个题是基础. 习题 408 解决了 $x\to\infty$ 时的多项式的极限问题, 习题 409 和 410 则分别解决了 $x\to\infty$ 和 $x\to a$ 时的有理分式函数的极限问题,

习题 408 设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 其中 $a_i\ (i=0,1,\cdots,n,n\geqslant 1,a_0\neq 0)$ 是实数, 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$.

解 $P(x)$ 的非零系数对应的项当 $x\to\infty$ 时为无穷大量, 关键在于注意 $a_0\neq 0$ 时 a_0x^n 是其中最高阶的无穷大量, 从而起主要作用.

从三点不等式 (参见习题 21(b)) 得到

$$\begin{aligned}|P(x)|&\geqslant |a_0x^n|-|a_1x^{n-1}|-\cdots-|a_n|\\&=|a_0|\cdot|x^n|\left(1-\frac{|a_1|}{|a_0|\cdot|x|}-\cdots-\frac{|a_n|}{|a_0|\cdot|x^n|}\right).\end{aligned}$$

由于上式右边括号内的表达式当 $x\to\infty$ 时的极限等于 1, 因此存在 $E>0$, 使得当 $|x|>E$ 时有

$$1-\frac{|a_1|}{|a_0|\cdot|x|}-\cdots-\frac{|a_n|}{|a_0|\cdot|x^n|}>\frac{1}{2},$$

于是就有 $|P(x)|>\dfrac{1}{2}|a_0|\cdot|x|^n$, 可见成立 $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$. □

习题 409 设 $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$, 其中 $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, 证明

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

解 从习题 408 知道本题是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式.

对于 $n>m$ 的情况, 将分子分母同除以 x^m, 则当 $x\to\infty$ 时分母趋于 $b_0\neq 0$, 分子从上一题知道趋于无穷大, 因此分式的极限为 ∞.

对于 $n=m$ 的情况, 将分子分母同除以 x^n, 则当 $x\to\infty$ 时分子和分母分别收敛于 a_0 和 b_0, 根据极限运算的除法法则就知道分式的极限为 $\dfrac{a_0}{b_0}$.

对于 $n<m$ 的情况, 将分子分母同除以 x^n, 则当 $x\to\infty$ 时分子收敛于 a_0, 而分母则趋于无穷大, 因此分式的极限为 0. □

习题 410 设 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是 x 的多项式, 且 $P(a)=Q(a)=0$, 问表达式 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 有怎样的可能值?

解 根据韦达定理, 这时多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都可以用 $x-a$ 除尽, 因此存在因式分解

$$P(x)=P_1(x)(x-a)^n,\quad Q(x)=Q_1(x)(x-a)^m.$$

其中多项式 $P_1(x)$ 和 $Q_1(x)$ 满足条件 $P_1(a)\neq 0,\ Q_1(a)\neq 0$.

由于在 $x\to a$ 的函数极限定义中始终要求 $x\neq a$, 因此可以约去分子分母中共同的 $(x-a)$ 的幂次, 然后与上题类似地得到以下结果:

$$\lim_{x\to a} R(x)=\begin{cases}0, & n>m,\\ \dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)}, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}\quad \square$$

注 1 这两个习题为以下的习题提供了有力的计算方法.

习题 409 表明对于有理分式函数的情况, 当自变量 $x\to\infty$ 时, 只要根据分子分母的最高次项系数就可以解决这时的 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式问题. 习题 410 则表明, 如果当 $x\to a$ 时出现 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式时, 则只要对分子和分母的多项式分别分离出 $(x-a)$ 的所有幂次, 然后约去它们的共有部分, 就可以解决此时的不定式问题.

注 2 在很多习题中都是 $n=m$ 的情况, 这时如何快速有效地计算出 $P_1(a)$ 和 $Q_1(a)$ 是一个问题. 若 $a=0$, 则在 $P(x)=P_1(x)x^n$ 且 $P_1(0)\neq 0$ 的条件下, 容易看出 $P_1(0)$ 就是 $P(x)$ 按 x 的幂次排列的展开式中次数最低项 x^n 项的系数. 对 $Q(x)$ 也可作同样的讨论.

由此可见, 在确定了 $n=m$ 之后, 只需要求出多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 按照 $(x-a)$ 的幂次展开式中的最低次项 $(x-a)^n$ 的系数即可. 这有许多代数方法可用, 例如二项式定理等. 这样就为许多习题的计算提供了较好的方法.

根据以上分析可见, 在今后写出 $x-a$ 的幂次的多项式时, 将经常采用升幂排列, 这对于极限计算特别方便.

习题 412 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

解 1 本题属 $\dfrac{0}{0}$ 型. 将分子按照升幂排列展开, 提出最低阶的无穷小量 x 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(6+11x+6x^2)}{x}=6.\quad\square$$

解 2 也可用递推的方式解之:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)(1+2x)-1}{x}+(1+x)(1+2x)\cdot 3\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)-1}{x}+3=\cdots=1+2+3=6.\quad\square$$

解 3 直接看出分子按照 x 的幂次作升幂排列时的第一项为 $(1+2+3)x=6x$, 即可知答案为 6. $\square$

习题 424 (a) 求 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 用代换 $t=x-1$, 即有 $x=1+t$, 则分式改写为

$$\frac{(1+t)+(1+t)^2+\cdots+(1+t)^n-n}{t}.$$

由于这时分子当 $t=0$ 时为 0, 如习题 410 的注 2 所示, 只要计算出分子多项式中的 t 的一次项的系数即可. 从二项式定理可见这就是 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

习题 426 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n 是正整数).

解 由于分子在 $x=a$ 时为 0, 因此是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 如习题 410 的注 2 所示, 只需要计算出分子按照 $(x-a)$ 的幂次写出的多项式中 $(x-a)^2$ 项的系数, 这就是所要的答案. (当然在计算中需要注意分子的一次项 $x-a$ 的系数是否为 0.)

为此只需要考虑分子的第一项. 应用二项式定理就有

$$x^n-a^n=[a+(x-a)]^n-a^n=na^{n-1}(x-a)+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(x-a)^2+\cdots,$$

其中未写出的是 $(x-a)$ 的幂次大于等于 3 的有限项. 由此可见极限就是 $\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$. 这是在 $n\geqslant 2$ 时得到的, 但它对于 $n=1$ 仍成立. 因分子恒等于 0, 极限当然等于 0. □

习题 428 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m 和 n 是正整数).

解 1 这是 $\infty-\infty$ 型的不定式. 如前面在 §1.2.9 的第 1 点中所说, 它总可以转化为 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 为此通分就得到

$$\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}=\frac{m-n+nx^m-mx^n}{(1-x^m)(1-x^n)},$$

可见分母在提出因子 $(x-1)^2$ 之后, 余下的因式在 $x=1$ 处不等于 0. 从而只要将右边分式的分子和分母分别按照 $(x-1)$ 的幂次展开并计算出其中的 $(x-1)^2$ 项系数后相除就是本题的答案.

这项计算并不复杂. 对分子可计算其中的后两项:

$$\begin{aligned}nx^m-mx^n&=n[1+(x-1)]^m-m[1+(x-1)]^n\\&=n[1+m(x-1)+\frac{m(m-1)}{2}(x-1)^2+\cdots]\\&\quad-m[1+n(x-1)+\frac{n(n-1)}{2}(x-1)^2+\cdots]\\&=n-m+\frac{mn(m-n)}{2}(x-1)^2+\cdots,\end{aligned}$$

其中未写出的是 $(x-1)$ 的幂次大于等于 3 的有限项. 又观察到分母按照 $(x-1)$ 的幂次展开的最低次项是 $(x-1)^2$, 其系数是

$$[(1+x+\cdots+x^{m-1})\cdot(1+x+\cdots+x^{n-1})]\Big|_{x=1}=mn,$$

这样就得到本题的极限为 $\dfrac{m-n}{2}$. □

解 2 利用代数恒等式

$$1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})$$

也可解决. 注意到上式的因式 $1+x+\cdots+x^{k-1}\to k\ (x\to 1)$ 在 $x\to 1$ 时既非无穷小, 也非无穷大, 故在两个分式通分后可以先求分母中这种非零因式的极限, 而不影响原式的收敛性及收敛时的结果, 最后再利用习题 424(a) 的结论, 得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\Big(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\Big)=\lim_{x\to 1}\frac{m(1-x^n)-n(1-x^m)}{(1-x^m)(1-x^n)}\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x)}\\
&=\frac{1}{mn}\lim_{x\to 1}\frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1})-n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{1-x}\\
&=-\frac{1}{mn}\lim_{x\to 1}\frac{m[x+x^2+\cdots+x^{n-1}-(n-1)]-n[x+x^2+\cdots+x^{m-1}-(m-1)]}{x-1}\\
&=-\frac{1}{mn}\Big(\frac{m(n-1)n}{2}-\frac{n(m-1)m}{2}\Big)=\frac{m-n}{2}.\quad\square
\end{aligned}$$

本小节的最后几题 (习题 429–434) 是与等幂和有关的数列极限, 类似的内容在 §1.2 的习题 50–54 已经见过. 通常有两种方法: 一种是将等幂和写成封闭式, 然后比较分子分母的最高阶无穷大; 另一种是用施托尔茨定理. 通常后者先求差, 前者先求和, 后者可能要简单一些, 特殊情形则需因地制宜处理.

习题 430 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big[\Big(x+\frac{a}{n}\Big)^2+\Big(x+\frac{2a}{n}\Big)^2+\cdots+\Big(x+\frac{(n-1)a}{n}\Big)^2\Big]$.

解 利用 §1.1.1 的习题 1 和 2 即可计算如下

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big[\Big(x+\frac{a}{n}\Big)^2+\Big(x+\frac{2a}{n}\Big)^2+\cdots+\Big(x+\frac{(n-1)a}{n}\Big)^2\Big]\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big[(n-1)x^2+\frac{2ax}{n}(1+2+\cdots+(n-1))+\frac{a^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)\Big]\\
&=x^2+\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{2ax}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}+\frac{a^2}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\Big]\\
&=x^2+ax+\frac{a^2}{3}.\quad\square
\end{aligned}$$

习题 433 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2}$.

解 记 $x_n=1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3$, $y_n=[1+4+7+\cdots+(3n-2)]^2$. 由于数列 $\{y_n\}$ 严格单调递增趋于 $+\infty$, 计算得到

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}&=\frac{(3n+1)^3}{[1+4+\cdots+(3n+1)]^2-[1+4+\cdot+(3n-2)]^2}\\
&=\frac{(3n+1)^3}{\Big(\frac{(3n+2)(n+1)}{2}\Big)^2-\Big(\frac{(3n-1)n}{2}\Big)^2}\\
&=\frac{(3n+1)^2}{\frac{(3n+2)(n+1)}{2}+\frac{(3n-1)n}{2}}\to\frac{3^2}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}}=3\ \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

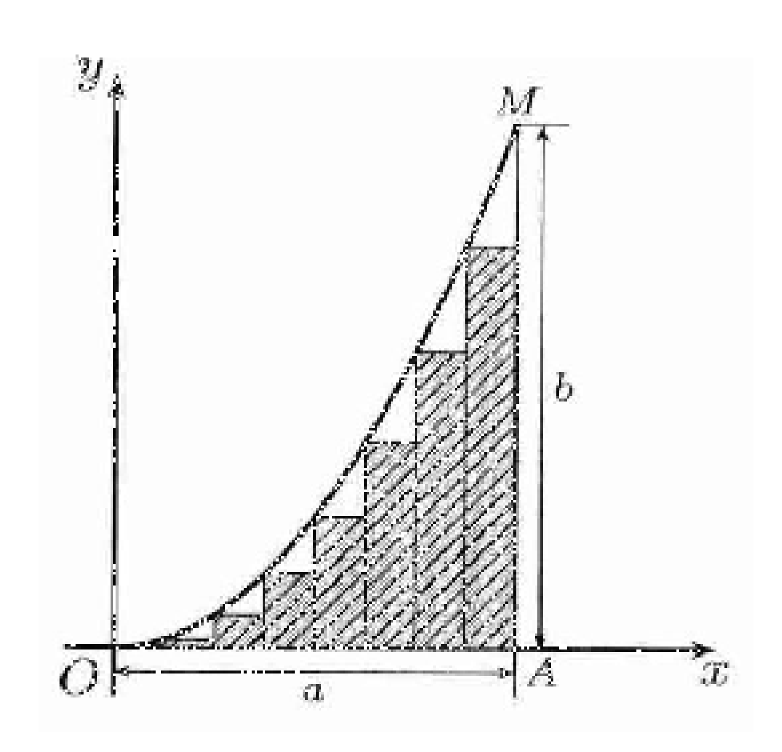
故可从施托尔茨定理知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=3$. $\square$

习题 434 求由抛物线 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, Ox 轴与直线 $x = a$ 所围成的曲边三角形 OAM 的面积, 把它看作底边长为 $\frac{a}{n}$ 的内接矩形的面积之和在 $n \to \infty$ 时的极限.

解 如附图所示, 在曲边三角形内作出以 $\frac{a}{n}$ 为底, $b\left(\frac{k}{n}\right)^2$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ 为高的 $n-1$ 个内接矩形, 其面积之和为

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{a}{n}\cdot b\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{a}{n}\cdot b\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{a}{n}\cdot b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{ab}{n^3}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \\ &= \frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2},\end{aligned}$$

故所求面积为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{ab}{3}$. □



习题 434 的附图

1.5.4 无理函数的极限计算 (习题 435–470)

这里的习题的处理原则与有理函数情况是类似的. 对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式, 可以将分子分母同除以某个无穷大量以消除不定式; 对于 $\frac{0}{0}$ 型的不定式, 则设法找出使得分子和分母当 $x = a$ 时等于 0 的因子, 约去它们共有的因子. 一条容易想到的思路就是有理化, 即将无理函数的极限计算归结为上一小节的有理函数的极限计算.

先看一道简单的例子.

习题 437 求 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解 第一步是看出这是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式, 因此不能用代入法. 然后用初等代数运算处理分子, 使得能够与分母相消, 这就是用共轭因式把分子分母都有理化:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4}\left(\frac{1+2x-9}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}\right) \\ &= \frac{4}{6}\lim_{x\to 4}\frac{2x-8}{x-4} = \frac{4}{3}. \quad \square\end{aligned}$$

就本小节的所有习题来说, 原则上用初等代数运算方法都可以解决, 只是有时会出现比有理函数情况繁复得多的计算, 从而容易出错. 那么有没有比较好的方法来计算无理函数的极限呢?

这样的方法是存在的. 学过微分学的读者都知道, 求函数极限至少有三大方法: (1) 等价量代换法, (2) 泰勒公式法, (3) 洛必达法则. 它们中间的任何一种方法都可用于解决无理函数的极限问题, 至少原则上要比初等代数方法高明得多 (后两种方法要学了导数之后才能用).

由于《习题集》要到下一节才提到等价量代换法, 然而与此有关的习题却全在这一节, 因此我们建议以习题 444 及其进一步的发展 (即下面的命题 1.7) 作为解决无理函

数极限计算的新工具.

习题 444 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n 是非零整数).

解 对 n 为正整数的情况, 令 $t=(1+x)^{\frac{1}{n}}-1$, 则 $x=(1+t)^n-1=nt+\cdots+t^n$, 且 $x\to 0 \iff t\to 0$. 于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt+\cdots+t^n}=\frac{1}{n}.$$

对于 $n<0$ 为负整数的情况, 只要利用 $-n>0$ 时已经解决并作如下计算即可:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1-(1+x)^{\frac{1}{-n}}}{x}\right)=\frac{1}{n}.\quad\square$$

为便于应用, 我们将习题 444 的结论用小 o 记号改写成为等价的如下公式:

$$\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{1}{n}x+o(x)\ \ (x\to 0).\tag{1.30}$$

其中 $o(x)$ 是 $x\to 0$ 时高于一阶的无穷小量 (见《习题集》下一节的说明). 也可以定义 $o(x)=o(1)\,x$, 其中 $o(1)$ 即是当 $x\to 0$ 时极限为 0 的无穷小量.

习题 444 (即公式 (1.30)) 已可解决本小节的大部分习题, 它的进一步发展是下面的命题.

命题 1.7 设 n 为非零整数, 则有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}x}{x^2}=\dfrac{1-n}{2n^2}$.

证 与习题 444 类似, 由于从 n 为正整数的情况推广到 n 为负整数的情况是容易的, 因此只给出 n 为正整数的证明. 这时仍然令 $t=(1+x)^{\frac{1}{n}}-1$, $x=(1+t)^n-1=nt+\cdots+t^n$, 就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1-\frac{1}{n}x}{x^2}&=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{1}{n}[(1+t)^n-1]}{[(1+t)^n-1]^2}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{t-\frac{1}{n}\left(nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2+\cdots+t^n\right)}{(nt+\cdots+t^n)^2}=\frac{1-n}{2n^2}.\quad\square\end{aligned}$$

注 命题 1.7 的结论也可仿照 (1.30) 写为如下的等价形式:

$$\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{1}{n}x+\frac{1-n}{2n^2}x^2+o(x^2)\ \ (x\to 0),\tag{1.30$'$}$$

同时又可以用它将公式 (1.30) 改进为更强一些的结论:

$$(1+x)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}x+O(x^2)\ \ (x\to 0),$$

其中 $O(x^2)$ 的意义是指它与 x^2 的比值在 $x=0$ 的邻近有界 (见《习题集》下一节的说明).

以下简写方式也是常用的, 即若从上下文知道所讨论的极限过程是 $x\to a$ 时, 则可以将 $O((x-a)^2)$ $(x\to a)$ 简记为 O_2. 类似地将 $O((x-a)^3)$ $(x\to a)$ 记为 O_3 等等.

学过微分学的读者都知道, 公式 (1.30), (1.30$'$) 等就是泰勒公式的特例.

下面我们先看习题 444 的应用方法.

习题 437 的解 2 这时 $x-4$ 是 $x\to 4$ 时的无穷小量. 令 $x-4=t$, 则有

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{9+2(x-4)}-3}{\sqrt{4+(x-4)}-2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{9+2t}-3}{\sqrt{4+t}-2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{2t}{9}}-1\right)}{2\left(\sqrt{1+\frac{t}{4}}-1\right)}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{4}}=\frac{4}{3}.\quad\square$$

然后再看公式 (1.30) 的用法.

习题 437 的解 3 将分子分母的各自第一项的根式函数用公式 (1.30) 得到

$$\sqrt{1+2x}=\sqrt{9+2(x-4)}=3\sqrt{1+\frac{2}{9}(x-4)}=3[1+\frac{1}{9}(x-4)]+o(x-4)\ \ (x\to 4),$$

$$\sqrt{x}=\sqrt{4+(x-4)}=2\sqrt{1+\frac{x-4}{4}}=2[1+\frac{1}{8}(x-4)]+o(x-4)\ \ (x\to 4),$$

其中 $o(x-4)$ 即是当 $x\to 4$ 时比 $(x-4)$ 更高阶的无穷小量. 然后将上式代入题中的分式就有

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{3}(x-4)+o(x-4)}{\frac{1}{4}(x-4)+o(x-4)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{3}+o(1)}{\frac{1}{4}+o(1)}=\frac{4}{3}.\quad\square$$

再看几个例子, 其中采用上述习题 437 的解 3 中的方法.

习题 447 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

解 分母 $x+2\sqrt[3]{x^4}$ 当 x $(x\to 0)$ 时等价于 x, 因此可换为 x (这就是等价量代换法), 分子则可以用公式 (1.30), 这样就可如下计算:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{x}{27}}-\sqrt[3]{1-\frac{x}{27}}\right)$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{x}{81}+o(x)\right)-\left(1-\frac{x}{81}+o(x)\right)}{x}$$

$$=\frac{2}{27}.\quad\square$$

习题 449 求 $\displaystyle\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

解 对于题中的三个根式函数分别用公式 (1.30), 得到在 $x\to 7$ 的渐近展开式:

$$\sqrt{x+2}=\sqrt{9+(x-7)}=3\sqrt{1+\frac{x-7}{9}}=3\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-7}{9}\right)+o(x-7)\ \ (x\to 7);$$

$$\sqrt[3]{x+20}=\sqrt[3]{27+(x-7)}=3\sqrt[3]{1+\frac{x-7}{27}}=3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{x-7}{27}\right)+o(x-7)\ \ (x\to 7);$$

$$\sqrt[4]{x+9}=\sqrt[4]{16+(x-7)}=2\sqrt[4]{1+\frac{x-7}{16}}=2\left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{x-7}{16}\right)+o(x-7)\ \ (x\to 7),$$

其中 $o(x-7)$ 是当 $x\to 7$ 时比 $x-7$ 更高阶的无穷小量. 然后将它们代入题中, 并约去分子分母的共有因子 $(x-7)$, 即可有:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{27}+o(1)}{\frac{1}{32}+o(1)}=\frac{7\cdot 16}{27}=\frac{112}{27}.\quad\square$$

习题 451 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解 1 用代换把无理函数有理化. 令 $t=\sqrt[5]{1+5x}-1$, 得 $x=\frac{1}{5}((1+t)^5-1)=t+2t^2+\cdots+\frac{t^5}{5}$. 于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2(1+2t+\cdots+\frac{t^4}{5})^2}{t-(t+2t^2+\cdots+\frac{t^5}{5})}=-\frac{1}{2}.\quad\square$$

解 2 直接用命题 1.7 得到

$$\frac{1}{25}\lim_{x\to 0}\frac{(5x)^2}{(1+5x)^{\frac{1}{5}}-1-\frac{1}{5}(5x)}=\frac{1}{25}\cdot\frac{2\cdot 5^2}{1-5}=-\frac{1}{2}.\quad\square$$

解 3 用 (1.30′) 即有

$$(1+5x)^{\frac{1}{5}}=1+\frac{1}{5}(5x)+\frac{1-5}{2\cdot 5^2}(5x)^2+o(x^2)=1+x-2x^2+o(x^2)\ \ (x\to 0),$$

将它代入就可见所求极限为 $-\frac{1}{2}$. $\square$

注 从无穷小量 $x\to 0$ 的角度来看, 可见问题在于求出分母的二阶无穷小量 x^2 项的系数. 这也就是命题 1.7 与公式 (1.30′) 的作用. 从习题 451 的解 1 可见它与命题 1.7 的证明完全相同.

习题 453 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m 和 n 是非零整数).

解 1 用习题 444 再配合递推法 (参见 §1.5.3 的习题 412 的解 2) 就可计算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,(\sqrt[n]{1+\beta x}-1)}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}\right)=\frac{\beta}{n}+\frac{\alpha}{m}.\quad\square$$

解 2 用公式 (1.30) 可计算如下:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+\frac{\alpha}{m}x+o(x)\right)\left(1+\frac{\beta}{n}x+o(x)\right)-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}\right)x+o(x)}{x}=\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.\quad\square$$

习题 455.2 求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

解 1 取 $t=\sqrt[6]{x}$ 就可以将本题转化为习题 428 中的有理函数的极限来解决:

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{t\to1}\left(\frac{3}{1-t^3}-\frac{2}{1-t^2}\right)=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}.\quad\square$$

解 2 这是 $\infty-\infty$ 的不定式. 将两个分式通分后就成为 $\frac{0}{0}$ 的不定式:

$$\lim_{x\to1}\frac{3(1-\sqrt[3]{x})-2(1-\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})}.$$

先分析分母, 用公式 (1.30) 得到

$$(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})=(1-\sqrt{1+(x-1)})(1-\sqrt[3]{1+(x-1)})$$
$$=[-\frac{1}{2}(x-1)+o(x-1)][-\frac{1}{3}(x-1)+o(x-1)]$$
$$=\frac{1}{6}(x-1)^2+o((x-1)^2)\ \ (x\to1),$$

这表明分母是二阶无穷小量, 从而提示我们需要用命题 1.7 或公式 (1.30′) 于分子.

用公式 (1.30′) 于分子, 即有

$$3(1-\sqrt[3]{x})-2(1-\sqrt{x})=-3[\sqrt[3]{1+(x-1)}-1]+2[\sqrt{1+(x-1)}-1]$$
$$=-3[\frac{1}{3}(x-1)-\frac{1}{9}(x-1)^2+o((x-1)^2)]+2[\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2)]$$
$$=(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})(x-1)^2+o((x-1)^2)=\frac{1}{12}(x-1)^2+o((x-1)^2)\ \ (x\to1),$$

这样就得到极限为

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{12}(x-1)^2+o((x-1)^2)}{\frac{1}{6}(x-1)^2+o((x-1)^2)}=\frac{1}{2}.\quad\square$$

习题 456 $\lim\limits_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

解 作 $t=1-x$ 并直接用习题 444 的结论就可得到

$$\lim_{x\to1}\frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{1-\sqrt{1-t}}{t}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{t}\cdot\cdots\cdot\frac{1-\sqrt[n]{1-t}}{t}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n!}.\quad\square$$

小结 从上面的介绍可见, 在函数极限的计算中引入无穷小量的阶数的概念是非常有用的. 我们经常将 $x\to a$ 的极限过程中的 $x-a$ 称为 (标准的) 一阶无穷小量, 然

后将 $(x-a)^n$ 称为 n 阶无穷小量. 同样可以在 $x\to\infty$ 的极限问题中将 $\frac{1}{x}$ 称为一阶无穷小量, 而将 $\frac{1}{x^n}$ 称为 n 阶无穷小量. 公式 (1.30) 和命题 1.7 的意义就在于此. 虽然本小节的习题原则上都可以只用初等代数运算解决, 然而我们还是建议初学者除了学习将无理函数有理化的方法之外, 还是应当"向前看", 尽早培养起用无穷小量的阶数的观点, 这样来理解和解决有关函数极限的计算问题对今后的微分学学习是非常有益的.

习题 457–470 大都是 $x\to\infty$ 的极限过程和 $\infty-\infty$ 型的不定式问题. 原则上可以用 $t=1/x$ 将它们转化为 $t\to 0$, 并用有理化或通分等代数运算转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 类型的不定式来解决. 前面提出的各种方法在这里同样有效.

最后再举几个简单例子, 说明如何将代数运算与无穷小分析相结合.

习题 466 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n 是正整数).

解 令 $t=1/x$ 并改写如下:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}\\&=\lim_{t\to0}[(1-\sqrt{1-t^2})^n+(1+\sqrt{1-t^2})^n],\end{aligned}$$

就可以看出当 $t\to0$ 时方括号内的两项都只要分别用 $t=0$ 代入就可以得到极限, 因此答案为 2^n. □

习题 467 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n 是正整数).

解 从无穷小量的角度可以看出只要求出分子的一阶无穷小量 x 项的系数.

对分子用恒等式 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$, 就有

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n=2x\cdot\Big[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1}\\&\qquad+\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\cdots+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{n-1}\Big],\end{aligned}$$

于是可以看出在 $2x$ 后的方括号内的表达式当 $x\to0$ 时的极限为 n, 为此只要用 $x=0$ 代入即可, 因此本题的答案就是 $2n$. □

习题 470 根据条件

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0,$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2\right)=0,$$

求常数 a_i 和 b_i $(i=1,2)$.

解 1 只给出后半题的解答. 从条件可见有

$$\begin{aligned}0&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2}{x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a_2-\frac{b_2}{x}\right)\\&=1-a_2,\end{aligned}$$

于是 $a_2 = 1$.

然后从题设条件就有

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

解 2 仍只解答后半题. 这时视 $\frac{1}{x}$ 为 $x\to+\infty$ 时的标准无穷小量, 则从 (1.30) 就有

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-x+1} &= x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\\ &= x\Big(1+\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\big)+o\big(\frac{1}{x}\big)\Big)\\ &= x-\frac{1}{2}+o(1)\ \ (x\to+\infty),\end{aligned}$$

可见 $a_2 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2}$. $\square$

1.5.5 初等超越函数的极限计算 (习题 471–591, 602, 604–605)

1. 三角函数的极限计算 (习题 471–505, 602, 604–605)

这里与前面的极限计算题不同之处是: 在一般教科书中列为最基本的两个函数极限之一, 即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \tag{1.31}$$

起重要作用. 它是比较三角函数与标准无穷小量的基础. 此外, 在本小节的许多习题的计算中, 等价量代换法也是基本的. 关于它的简单介绍见 §1.5.7 之 1.

下面先看几个简单例子, 其中的第一个例子也是今后许多极限计算中的基本工具.

习题 474 (a) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 首先要看出这是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 然后用三角公式如下进行:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}. \quad \square$$

注 为便于今后的引用, 重记为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{1.32}$$

利用极限理论中的等价量记号 (见 §1.5.7 之 1), 我们就得到了两个重要的等价无穷小量的公式:

$$\sin x \sim x\ (x\to 0), \quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2\ (x\to 0). \tag{1.33}$$

习题 476 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

解 1 第一步是看出这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式，然后按照等价量代换法，分母可以用 x 代替，然后分式的极限可以分成两项分别处理. 由于这是第一次用等价量代换法，我们将上述过程详细写出如下，其中三次使用了极限 (1.31):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x-\sin 3x}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5-\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3\right)=5-3=2.\quad\square$$

解 2 用三角函数的和差化积公式也可以如下求解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 4x\sin x}{\sin x}=2\lim_{x\to 0}\cos 4x=2.\quad\square$$

习题 477 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 利用极限 (1.32) 即可计算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1-\cos 3x}{9x^2}\cdot 9\right)=\frac{1}{2}\cdot(-1+9)=4.\quad\square$$

习题 478 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 分子分母同除以 x 后再利用等价关系 (1.33) 可计算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot x}{\dfrac{\sin px}{x}+\dfrac{1-\cos px}{x^2}\cdot x}=\frac{1}{p}.\quad\square$$

学过连续性和导数的读者不难看出，习题 481 就是证明 $\sin x, \cos x, \tan x$ 的连续性，而习题 482–487 就是计算 6 个三角函数的导数. 下面举其中的两个例子.

习题 482 求 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

解 1 三角公式 (和) 差化积也可看作因式分解. 用此法可把函数值之差转化为自变量之差，以便比较. 如下所示，本题将从分子中析出的 $\sin\dfrac{x-a}{2}$ 与分母 $x-a$ 的比归结为基本极限 $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$，从而解答本题. 具体计算如下:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a.\quad\square$$

解 2 用三角函数的和角公式同样可以达到目的:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin(a+(x-a))-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin a\,[\cos(x-a)-1]+\cos a\sin(x-a)}{x-a}=\cos a,$$

其中同时使用了 (1.31) 和 (1.32). $\square$

习题 484 求 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$.

解 1 若将正切函数化为正弦和余弦函数来做, 则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin a}{\cos a}}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\sin x\cos a-\sin a\cos x}{(x-a)\cos x\cos a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x\cos a}=\frac{1}{\cos^2 a}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 为了处理分子可以利用恒等式 $\tan(x-a)=\dfrac{\tan x-\tan a}{1+\tan x\tan a}$, 于是得到

$$\tan x-\tan a=\tan(x-a)(1+\tan x\tan a),$$

它可看作正切的差化积, 其所起作用与习题 482 相同. 以下计算已经不难:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{x-a}(1+\tan x\tan a)\\&=1+\tan^2 a=\sec^2 a.\quad\square\end{aligned}$$

注 在微分学中将习题 482–487 中的 $\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$, $\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$, $\cdots$ 分别称为正弦, 余弦 $\cdots$ 从 a 到 x 的 (一阶) 差商. 它们的极限 $(x\to a)$ 分别是正弦, 余弦 $\cdots$ 的导数.

可以看到, 有些题用合适的三角函数公式来演化确实很方便 (例如习题 476 的解 2). 问题在于对于较复杂的题, 演化的结果有时会出现大量的三角函数, 这时继续做下去就可能会有困难, 甚至陷入繁复的计算中而“不能自拔”. 例如, 学过高阶导数的读者一定会发现, 后面的习题 488–492 涉及前 4 个三角函数的二阶导数问题. 这时直接用三角函数变换来计算就可能比较复杂.

与上两个小节一样, 我们还是建议在函数极限计算中以无穷小量的阶数分析和等价量代换法为主要思路 (例如 (1.33), 习题 476 的解 1 和习题 477–478 的解等). 在这里我们提出下列命题, 它可以解决本小节中较复杂习题的极限计算. 虽然它不可能对每一个题提供最好的解法, 但至少可以提供相当有效的解法.

命题 1.8 设 a 为给定常数, 则有

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin a-x\cos a}{x^2}=-\frac{\sin a}{2}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos a+x\sin a}{x^2}=-\frac{\cos a}{2}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x)-\tan a-x\sec^2 a}{x^2}=\sec^2 a\tan a=\frac{\sin a}{\cos^3 a}$;

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cot(a+x)-\cot a+x\csc^2 a}{x^2}=\csc^2 a\cot a=\frac{\cos a}{\sin^3 a}$.

证 (1) 由于分子为奇函数, 只要对 $x>0$ 作出证明即可. 利用导出 (1.31) 时大多数教科书都已经证明的不等式

$$\sin x < x < \tan x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

也就是 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$, 即可得到

$$0 < \frac{x-\sin x}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right) < \frac{1}{x}(1-\cos x) = \frac{1}{x}\cdot 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x}{2},$$

令 $x \to 0$ 就知道 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2} = 0$. (实际上已经得到 $\sin x = x + O(x^3)\ (x \to 0)$.)

(2) 中令 $a = 0$ 就得到 (1), 因此是它的推广. 利用 (1) 可作如下推导得到 (2):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin a - x\cos a}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin a\cos x + \cos a\sin x - \sin a - x\cos a}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin a(\cos x-1)}{x^2} + \frac{\cos a(\sin x - x)}{x^2}\right) = -\frac{\sin a}{2}.$$

由于 (3) 的证明与 (2) 几乎相同, 下面证明 (4). 同理也不写出 (5) 的证明.

(4) 利用 (1) 可推导如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x)-\tan a - x\sec^2 a}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin(a+x)}{\cos(a+x)} - \dfrac{\sin a}{\cos a} - \dfrac{x}{\cos^2 a}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{\cos(a+x)\cos a} - \dfrac{x}{\cos^2 a}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos a\sin x - x\cos(a+x)}{\cos(a+x)\cos^2 a\cdot x^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^3 a}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos a(\sin x - x)}{x^2} + \frac{\cos a - \cos(a+x)}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\cos^3 a}\lim_{x\to 0}\frac{\cos a - \cos(a+x)}{x}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos^3 a}. \quad \square$$

注 1 上述证明的最后一步即是《习题集》中的习题 483, 它的求解与习题 482 的解 2 相同, 当然也可用和差化积公式来做. 建议读者自行完成上述命题中 (3) 和 (5) 的证明, 它们比不少习题还容易一些. 此外, (4) 的证明也可以仿照习题 484 的解 2 进行.

注 2 利用大 O 和小 o 记号, 命题 1.8 的结论可改写为以下形式:

$$\sin x = x + O(x^3)\ \ (x \to 0);$$

$$\sin(a+x) = \sin a + x\cos a - \frac{\sin a}{2}x^2 + o(x^2)\ \ (x \to 0);$$

$$\cos(a+x) = \cos a - x\sin a - \frac{\cos a}{2}x^2 + o(x^2)\ \ (x \to 0);$$

$$\tan(a+x) = \tan a + x\sec^2 a + (\sec^2 a\tan a)x^2 + o(x^2)\ \ (x \to 0);$$

$$\cot(a+x) = \cot x - x\csc^2 a + (\csc^2 a\cot a)x^2 + o(x^2)\ \ (x \to 0).$$

其中 $o(x^2)$ 是当 $x \to 0$ 时高于二阶的无穷小量. (已学过微分学的读者当然会看出, 这 4 个公式就是写出到二阶项的带佩亚诺余项的泰勒公式, 也称为局部泰勒公式.)

用命题 1.8 可方便地解决习题 488–491 的极限计算. 以下举出其中的两个例子.

习题 488 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$.

3. 双曲函数与反三角函数的极限计算 (习题 576–589)

《习题集》中关于前三个双曲函数的定义和图像见习题 340(a),(b),(c), 关于前四个反三角函数的图像见习题 311–314 (参见附录一).

《习题集》中收入的关于这两类函数的极限计算题一般比较容易, 下面各举一例[1].

习题 577(b) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}$.

解 分子是 $\infty-\infty$ 型的不定式. 按照定义将双曲函数用指数函数表示, 并将分子分母同除以适当的无穷大量即可计算如下:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}-e^{-\sqrt{x^2+x}}}{2}-\dfrac{e^{\sqrt{x^2-x}}-e^{-\sqrt{x^2-x}}}{2}}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+x}-x}-e^{\sqrt{x^2-x}-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}}-e^{\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}}\right)=e^{\frac12}-e^{-\frac12}=2\sinh\frac12.\quad\square$$

习题 585 求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$.

解 这里的困难在于如何处理分子. 计算分子的正切函数值就有

$$\tan[\arctan(x+h)-\arctan x]=\frac{h}{1+(x+h)x}.$$

可见当 h 充分小时分子的绝对值也很小, 因此得到

$$\arctan(x+h)-\arctan x=\arctan\frac{h}{1+(x+h)x}.$$

从等价关系 $\tan x\sim x\ (x\to0)$ (即习题 474(b)), 可见也有 $\arctan x\sim x\ (x\to0)$.

综合以上两点可见本题的极限为 $1/(1+x^2)$. $\square$

1.5.6　杂题 (习题 592–601, 603, 613–636, 641–644)

这里的习题数量不多, 但有多种类型, 下面先浏览一下其内容.

习题 592–601 都是 (广义) 单侧极限的计算题, 其中包括 $x\to a\pm0$ 和 $x\to\pm\infty$ 在内, 其中的计算没有特殊困难.

习题 613–625 是函数序列研究中需要用到的内容. 假设在某个区间上定义有函数序列 $\{f_n(x)\}$, 且在区间的每个点上存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 这样就得到了函数序列的极限函数. 这些习题就是要求计算出极限函数, 并作出其图像 (其中习题 624 是含有连续参数 t 的对应问题). 这里的计算和作图也都比较容易.

习题 626–627 是关于斜渐近线的定义和训练. 这在一般教科书中都有, 相应的计算题和作图都不难 (在 §1.4 中已经有大量的这类习题).

---

[1] 从复数域可以说明双曲函数与三角函数有特殊的关系, 因而在实数域中存在与三角函数公式对应的大量的双曲函数公式. 就《习题集》中的这些习题而言这些公式是可以不用的.

解 本题并非常见的不定式, 但 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 是不定式 (见 §1.2.1 的习题 47), 且有

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to 0\,(x\to+\infty).$$

作正弦的差化积, 得

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0.\quad\square$$

2. 幂指函数和对数函数的极限计算 (习题 506–575, 590–591)

这里的最基本工具是继 (1.31) 之后的第二个最基本的函数极限

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.\tag{1.34}$$

与前面从 (1.31) 推出 (1.32) 一样, 从 (1.34) 可以推出下列几个重要的极限, 它们在今后都是不可或缺的基本公式.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\tag{1.35}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\ \ (a>0),\ \text{特别是有}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1,\tag{1.36}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.\tag{1.37}$$

其中 (1.35) 即习题 529, (1.36) 即习题 541, 它在 $x=\frac{1}{n}$ 时就是习题 76, (1.37) 中当 $\alpha=\frac{1}{n}$ 时就是习题 444 (也就是公式 (1.30)).

用等价记号 $\sim$ 就可以将上述三个公式改写成为在 $x\to 0$ 时的等价关系:

$$\ln(1+x)\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad (1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x.$$

它们对于使用等价量代换法是非常方便的.

证 为证明 (1.35), 只要用 (1.34) 和对数函数的连续性:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln[(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln\mathrm{e}=1.$$

对于 (1.36) 可以先用 (1.35) 于 $a=\mathrm{e}$, 这样就可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\ln[1+(\mathrm{e}^x-1)]}=1,$$

然后对于一般的 $a>0$ 就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a.$$

最后对于 (1.37) 可以用相同的方法推导如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\alpha=\alpha.\quad\square$$

注 以上的许多推导都涉及复合函数的极限以及若干基本初等函数的连续性.

关于前者, 请参看 §1.5.7 的第 2 点, 其中结合对习题 607 的解答所列出的若干充分条件.

关于后者, 则只要用 §1.2.9 中的命题 1.4, 并利用沟通数列极限和函数极限之间联系的海涅归结原理, 就可以推出幂函数、对数函数、指数函数等的连续性. 此外, 还可以

注意本书没有讲解的几个题. 习题 481 即是求证正弦函数、余弦函数和正切函数的连续性; 习题 529 即是求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; 习题 531 和 548 即是分别计算对数函数和指数函数的导数, 这比建立它们的连续性要求更高了.

由此可见, 命题 1.4 的代入法对于函数极限同样成立.

举一个具体例子. 在 (1.35) 的证明中, 设 $f(y)=\ln y$, $y=g(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 则一方面有 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\mathrm{e}$, 另一方面又利用 $f(y)=\ln y$ 于点 $y=\mathrm{e}$ 处连续, 这样就可以推出有 $\lim\limits_{x\to 0}f(g(x))=\ln\mathrm{e}=1$.

在 (1.34) 的基础上可以用下列方法解决许多 1^∞ 型的不定式问题. 这就是对于 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ 的情况, 有

$$\lim_{x\to a}(1+f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}\left[(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}}\right]^{(f(x)g(x))}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))}, \tag{1.38}$$

于是只要计算 $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x))$ 即可.

下面来看一些习题. 注意第一步是搞清楚它是否是不定式. 如果不是不定式, 则一般用代入法即可; 如果是不定式, 则要根据其类型来采取对策.

习题 506 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

解 在 (1) 中有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{2+x}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=1$, 因此只要用代入法就得到极限为 $\dfrac{1}{2}$.

在 (2) 中有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x}{2+x}=\dfrac{2}{3}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$, 因此只要用代入法就得到极限为 $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

在 (3) 中有 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+x}{2+x}=1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=0$, 因此只要用代入法就得到极限为 $1^0=1$. □

习题 512 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解 1 这是 1^∞ 型的不定式. 用 (1.38) 的方法就得到

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}=\mathrm{e}^2. \quad \square$$

解 2 换一个写法, 可以如下求解:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{2x^2}{x^2-1}}=\mathrm{e}^2. \quad \square$$

解 3 另一种写法是先对于函数取对数, 然后用等价量代换法计算极限如下:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} = 2,$$

可知极限为 e^2. 其中利用了等价关系 $\ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right) \sim \frac{2}{x^2-1}\ (x\to\infty)$. □

注 以上三个解法本质上完全相同, 但对于先取对数的方法还是需要说明一下, 因为与幂指函数有关的三个类型的不定式 (即 1^∞, ∞^0 和 0^0) 容易从这种方法得到解释.

考虑幂指函数的极限 $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$, 其中设 $u(x)>0$, $x\to a$ 也可换为其他类型的函数极限. 我们要问: 这里会遇到什么样的不定式. 或者反过来, 假设已知存在极限 $\lim\limits_{x\to a} u(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=B$, 其中 A, B 允许为非正常极限 ∞, 问上述幂指函数的极限是否可以简单地用代入法得到为 A^B.

用取对数的方法, 且同时利用指数函数和对数函数的连续性, 就有

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln u(x)},$$

其中假设所写出的极限存在.

于是问题已经归结为乘积 $v(x)\ln u(x)$ 当 $x\to a$ 时是否是不定式. 由于乘积形式的不定式只可能是 $0\cdot\infty$ 型, 从而就只可能出现三种可能性, 即 (1) $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} u(x)=1$; (2) $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$; (3) $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$. 回复到幂指函数的极限 $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$, 这就是 $1^\infty, \infty^0, 0^0$ 三种不定式.

需要注意, 若 $A=\lim\limits_{x\to a} u(x)$ 为小于 1 的非负数, 而 $B=\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, 则极限 $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$ 并不是不定式, 其中包括容易误认为是不定式的 0^∞. 注意: 当指数趋于正无穷大时有 $0^{+\infty}=0$; 而当指数趋于负无穷大时有 $0^{-\infty}=+\infty$.

习题 516 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^x$ $(a_1>0, a_2>0)$.

解 若 $a_1>a_2$, 则有 $\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\to\frac{a_1}{a_2}>1\ (x\to+\infty)$, 可见极限为 $+\infty$. 若 $a_1<a_2$, 则同样可见极限为 0.

在 $a_1=a_2\ (=a)$ 时为 1^∞ 型的不定式. 用 (1.38) 的方法就有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{b_1-b_2}{ax+b_2}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(b_1-b_2)x}{ax+b_2}} = e^{\frac{b_1-b_2}{a}}. \quad □$$

下面是综合利用等价量代换法与其他方法的例子.

习题 540 (b) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

解 先看出是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 利用 (1.35) 的 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$, 可见只要将分子换为 $nx-1+\sqrt{1-n^2x^2}$, 将分母换为 $x-1+\sqrt{1-x^2}$ 后, 即可按照求无理函数的极限来做. 由于当 $x\to0$ 时有

$$nx-1+\sqrt{1-n^2x^2} = nx+\frac{(1-n^2x^2)-1}{\sqrt{1-n^2x^2}+1} = nx+O_2\ \ (x\to0),$$

$$x-1+\sqrt{1-x^2} = x+\frac{(1-x^2)-1}{\sqrt{1-x^2}+1} = x+O_2\ \ (x\to0),$$

因此极限为 n. □

习题 543 求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}\ (a>0)$.

解 改写分子的两项为 e 的幂, 然后利用 (1.35),(1.36) 得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-\mathrm{e}^{a\ln a}}{x-a}&=a^a\cdot\lim_{x\to a}\left(\frac{\mathrm{e}^{x\ln x-a\ln a}-1}{x\ln x-a\ln a}\cdot\frac{x\ln x-a\ln a}{x-a}\right)\\&=a^a\cdot\lim_{x\to a}\frac{x\ln x-a\ln x+a\ln x-a\ln a}{x-a}\\&=a^a\left(\lim_{x\to a}\ln x+\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)}{\dfrac{x-a}{a}}\right)\\&=a^a(\ln a+1).\quad\square\end{aligned}$$

下面是新版增加的综合性较强的几个题.

习题 545 (b) 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3x}$.

解 这是 1^∞ 型不定式. 将括号内写成 $1+o(1)$ 后用 (1.38) 的方法, 只要计算下列极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x(\cos\alpha x-\cos\beta x)}{1+\sin x\cos\beta x}\cdot\frac{\cos^3x}{\sin^3x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\cos\alpha x-1+1-\cos\beta x}{x^2}\\&=\frac{1}{2}(-\alpha^2+\beta^2),\end{aligned}$$

就可知答案为 $\mathrm{e}^{\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}}$. □

习题 545 (c) 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 令 $t=x-1$, 并改写分子分母, 就可以如下求解 (其中两次利用了 $\sin x\sim x\ (x\to0)$ 和 (1.37)) :

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{\sin[\pi((t+1)^\alpha-1)]}{\sin[\pi((t+1)^\beta-1)]}&=\lim_{t\to0}\frac{\pi((t+1)^\alpha-1)}{\pi((t+1)^\beta-1)}\\&=\lim_{t\to0}\left(\frac{(t+1)^\alpha-1}{t}\cdot\frac{t}{(t+1)^\beta-1}\right)=\frac{\alpha}{\beta}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 545 (d) 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(\pi\cdot2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot2^x)]}$.

解 这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 令 $t=x-1$, 并将两个三角函数的自变量改写为 $2\pi\cdot(2^t-1)$, 然后利用 $x\to0$ 时的等价关系 $\sin x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ 和 $\ln(1+x)\sim x$, 即可计算得到:

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin^2(2\pi\cdot(2^t-1))}{\cos(2\pi\cdot(2^t-1))-1}=-2.\quad\square$$

3. 双曲函数与反三角函数的极限计算 (习题 576–589)

《习题集》中关于前三个双曲函数的定义和图像见习题 340(a),(b),(c), 关于前四个反三角函数的图像见习题 311–314 (参见附录一).

《习题集》中收入的关于这两类函数的极限计算题一般比较容易, 下面各举一例[①].

习题 577(b) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sinh\sqrt{x^2+x}-\sinh\sqrt{x^2-x}}{\cosh x}$.

解 分子是 $\infty-\infty$ 型的不定式. 按照定义将双曲函数用指数函数表示, 并将分子分母同除以适当的无穷大量即可计算如下:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}-e^{-\sqrt{x^2+x}}}{2}-\dfrac{e^{\sqrt{x^2-x}}-e^{-\sqrt{x^2-x}}}{2}}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\sqrt{x^2+x}-x}-e^{\sqrt{x^2-x}-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}}-e^{\frac{-x}{\sqrt{x^2-x}+x}}\right)=e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}=2\sinh\frac{1}{2}.\quad\Box$$

习题 585 求 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$.

解 这里的困难在于如何处理分子. 计算分子的正切函数值就有

$$\tan[\arctan(x+h)-\arctan x]=\frac{h}{1+(x+h)x}.$$

可见当 h 充分小时分子的绝对值也很小, 因此得到

$$\arctan(x+h)-\arctan x=\arctan\frac{h}{1+(x+h)x}.$$

从等价关系 $\tan x\sim x\ (x\to0)$ (即习题 474(b)), 可见也有 $\arctan x\sim x\ (x\to0)$.

综合以上两点可见本题的极限为 $1/(1+x^2)$. $\Box$

1.5.6 杂题 (习题 592–601, 603, 613–636, 641–644)

这里的习题数量不多, 但有多种类型, 下面先浏览一下其内容.

习题 592–601 都是 (广义) 单侧极限的计算题, 其中包括 $x\to a\pm0$ 和 $x\to\pm\infty$ 在内, 其中的计算没有特殊困难.

习题 613–625 是函数序列研究中需要用到的内容. 假设在某个区间上定义有函数序列 $\{f_n(x)\}$, 且在区间的每个点上存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$, 这样就得到了函数序列的极限函数. 这些习题就是要求计算出极限函数, 并作出其图像 (其中习题 624 是含有连续参数 t 的对应问题). 这里的计算和作图也都比较容易.

习题 626–627 是关于斜渐近线的定义和训练. 这在一般教科书中都有, 相应的计算题和作图都不难 (在 §1.4 中已经有大量的这类习题).

---

① 从复数域可以说明双曲函数与三角函数有特殊的关系, 因而在实数域中存在与三角函数公式对应的大量的双曲函数公式. 就《习题集》中的这些习题而言这些公式是可以不用的.

习题 641–644 是涉及函数的点振幅和函数的上下极限的题, 计算均较容易.

下面只对于习题 628–636 作讲解, 其中含有与无穷级数、无穷乘积有关以及更广泛的一些极限计算题, 对于后者还专门介绍了一个有用的定理.

这里的问题是计算如下形式的数列极限:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{nn})=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}x_{mn}, \tag{1.39}$$

其中 $\{x_{mn}\}$ 是具有双下标的数列, n 取所有正整数, 而在下标 n 给定之后的下标 m 则只需要取 $1,2,\cdots,n$. 问题 (1.39) 的一个变型是用相乘代替相加, 即求如下数列极限:

$$\lim_{n\to\infty}(x_{1n}\cdot x_{2n}\cdot\cdots\cdot x_{nn})=\lim_{n\to\infty}\prod_{m=1}^{n}x_{mn}, \tag{1.40}$$

其中双下标的意义与 (1.39) 相同.

在每一个 $x_{mn}>0$ 的前提下, 可以取对数将问题 (1.40) 转化为问题 (1.39).

事实上这样的数列极限问题早在 §1.2 就已经遇到, 例如习题 51–57, 68, 72, 77–80, 82–85 等等都是如此.

若 x_{mn} 与 n 无关, 即只有一个下标 m 时, n 只以求和或求乘积的项数出现. 这就是今后要遇到的无穷级数和无穷乘积的计算题 (见《习题集》第五章). 例如 §1.2 中的习题 56, 57, 68, 72, 77–80, 82–85, 以及本节的习题 628–630, 都属于这个子类. 由于这类问题将在第五章作专门研究, 因此从略.

下面主要介绍习题 631–636, 即 x_{mn} 确实为双下标的情况.

习题 631 提出了计算这类问题的一种方法, 其中的 $x_{mn}=\varphi(\alpha_{mn})$, φ 为某个具有一定性质的函数, $\{\alpha_{mn}\}$ 为具有双下标的数列, $\rightrightarrows$ 是一致收敛的记号.

习题 631 (用于计算 (1.39) 的定理) 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, 其中 $\psi(x)>0$, 又设 $\{\alpha_{mn}\}$ 为非零的双下标数列, 且当 $n\to\infty$ 时有 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1,2,\cdots)$, 即对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在正整数 $N(\varepsilon)$, 当 $n>N$ 时有 $0<|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ 成立[①].

证明

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})]=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})],$$

其中假设等式右端的极限存在.

解 根据 $\varphi(x)\sim\psi(x)$ $(x\to0)$, 对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta(\varepsilon)>0$, 当 $0<|x|<\delta$ 时成立

$$\left|\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}-1\right|<\varepsilon\Longleftrightarrow(1-\varepsilon)\psi(x)<\varphi(x)<(1+\varepsilon)\psi(x).$$

其中利用了 $\psi(x)>0$ 的条件.

对于上述 δ, 根据 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(n\to\infty)$ 关于 $m=1,2,\cdots$ 一致收敛的条件, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 对一切 $m=1,2,\cdots$ 同时成立 $0<|\alpha_{mn}|<\delta$, 因此也就成立

$$(1-\varepsilon)\psi(\alpha_{mn})<\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\psi(\alpha_{mn}).$$

① 由于成立 $m\leqslant n$, 因此关于所有 m 的一致性和关于 $1\leqslant m\leqslant n$ 的一致性是相同的. 对于具体问题来说可以统一规定在 $m>n$ 时取 $\alpha_{mn}=0$.

将上述不等式对于 $m=1,2,\cdots,n$ 求和, 得到

$$(1-\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})<\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})<(1+\varepsilon)\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}).$$

改写为

$$1-\varepsilon<\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}<1+\varepsilon.$$

这样就已经证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}=1.$$

最后, 利用已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})$ 存在的条件和极限的乘积法则就得到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(\alpha_{mn})}{\sum\limits_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})}\cdot\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn})\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\psi(\alpha_{mn}).\quad\square$$

下面的习题 632–636 都是上述定理的应用. 我们只讲一个例子. 看如何确定该定理中的两个函数和 (有双下标的) 数列, 以及如何验证定理的条件满足.

习题 636 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$.

解 这是 (1.40) 型的问题. 不妨假设所出现的余弦值都大于 0, 取对数后变为 (1.39), 令 $\varphi(x)=\ln\cos(ax)$, 则有

$$\ln\cos(ax)=\ln[1+\cos(ax)-1]\sim\cos(ax)-1\sim-\frac{a^2}{2}x^2\ \ (x\to0),$$

于是可取 $\psi(x)=-\dfrac{a^2}{2}x^2$, 它比函数 $\varphi(x)$ 要简单得多了.

令 $\alpha_{kn}=\dfrac{k}{n\sqrt{n}}$, 其中 $k=1,2,\cdots,n$, 而当 $k>n$ 时令 $\alpha_{kn}=0$, 则就有 $0<\alpha_{kn}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, 因此当 $n\to\infty$ 时有 $\alpha_{kn}\rightrightarrows0$, 即关于 $k=1,2,\cdots$ 一致收敛于 0 的条件满足. 这样就有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=-\frac{a^2}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}=-\frac{a^2}{6},$$

其中利用了习题 2 和 53 的结果. 由此可见原题的答案为 $\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{6}}$. $\square$

注 习题 631 的定理提供了求 (1.39) 和 (1.40) 类型的极限的一个很有用的工具. 在 $\varphi(x) \sim \psi(x)$ $(x \to 0)$ 中, 一般来说是寻找比 $\varphi(x)$ 更为简单的 $\psi(x)$, 但也可能发生相反的情况. 这里的关键是用 ψ 代替 φ 之后, 相应的极限是否求得出.

例如回顾 §1.2.3 的最后一题, 即习题 147, 要求

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right),$$

这时在 (1.39) 中的 $x_{mn}=\dfrac{1}{n+m}$, 利用 $x \sim \ln(1+x)$ $(x \to 0)$, 取 $\varphi(x)=x$, $\psi(x)=\ln(1+x)$, $\alpha_{kn}=\dfrac{1}{n+k}$, $k=1,2,\cdots,n$, 则上述极限就可用习题 631 的定理计算如下:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+1}=\ln 2.\end{aligned}$$

学过积分学的读者都知道, 还可以用定积分方法求出包括习题 147 在内的许多极限计算问题. 见《习题集》后面 §4.2 的习题 2219–2230 等, 其中的习题 2219 就是习题 147. 此外, 还可以补充一点, 即有时还需要将习题 631 中的定理和定积分方法联合使用来解决某些稍难一点的问题. 所有这些内容都将在《指引》的第二册中学习.

1.5.7 补注 (习题 606–612, 637–640)

在这个补注中有以下内容:

1. 对于等价量代换法作补充说明;
2. 结合习题 607 给出复合函数极限计算的充分条件;
3. 推广的柯西命题 (习题 608–610);
4. 函数 e^x 的两种表示 (习题 611–612);
5. 迭代生成的函数列 (习题 606, 637–640).

1. 关于等价量代换法的补充说明

如前面的大量习题所表明, 等价概念和等价量代换法在本节的函数极限计算中起重要作用. 下面是几点补充说明.

为简明起见, 用 lim 表示某个极限过程, 其中包括数列极限在内, u 和 v 是两个函数, 其中 $v \neq 0$. 若有

$$\lim\frac{u}{v}=1,$$

则称 u 和 v 对于 lim 所指的极限过程为等价, 简记为 $u \sim v$.

上述等式可改写为

$$\lim\frac{u-v}{v}=0,$$

从而也可以用小 o 记号写为

$$u = v(1 + o(v)).$$

由于这个记法中不需要 $v \neq 0$ 的条件, 因此往往作为 $u \sim v$ 的更广一些的定义.

对于具体的等价关系, 由于存在多种函数极限, 因此必须写明该等价关系是对什么样的函数极限而说的, 即在后面添上 $(x \to a)$. 只有在数列极限的情况, 习惯上往往可以省去 $(n \to \infty)$.

例如对于函数 $\ln x$, 以下两个等价关系都是正确的, 这时后面括号内的说明是不可缺少的:

$$\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0), \quad \ln x \sim x - 1 \ (x \to 1).$$

又如对于函数 $x^3 + x$ 有以下等价关系:

$$x^3 + x \sim x^3 \ (x \to +\infty), \quad x^3 + x \sim x \ (x \to 0),$$

两者的意义完全不同.

这里要说明, 虽然在本节中 $u \sim v$ 一般都用于无穷小量之间的等价, 但从等价记号的定义来看, $u \sim v$ 中并没有说在指定的极限过程中 u 和 v 是否是无穷小量或无穷大量, 或是其他情况. 如上面 $x^3 + x$ 的第一个等价关系就是指两个无穷大量之间的等价.

下面说一下等价量代换法. 这就是在 $u \sim \tilde{u}$ 时, 就可推出有

$$uv \sim \tilde{u}v, \ \frac{u}{v} \sim \frac{\tilde{u}}{v} \ (v \neq 0), \ \frac{v}{u} \sim \frac{v}{\tilde{u}} \ (u \neq 0).$$

因此在求乘除形式的极限时, 可以将其中的因子换为等价量来计算, 本节的许多题中都是如此. 举个简单例子. 由于 $\sin x \sim x \ (x \to 0)$, $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$, 因此就有

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{-x} = -3.$$

显然这只不过是将

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1-x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{-x}{\ln(1-x)} \cdot \frac{3x}{-x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{-x} = -3$$

写得更简单一点而已.

最后要指出, 对等价量代换法使用不当是初学者容易犯的一种错误. 举个最简单的例子. 例如前面已经有 $x^3 + x \sim x \ (x \to 0)$, 如果在极限计算

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^3 + x) - x}{x^3} = 1$$

中将分子的 $(x^3 + x)$ 用等价量 x 来代替, 则得到的结果就是 0 了. 当然读者会认为谁也不会犯这样的“低级”错误. 但实际上发生的错误与这个简单例子在本质上是一样的. 从无穷小量的阶数很容易理解这类错误的原因. 在上面的例子中分母对于 $x \to 0$ 而言是三阶无穷小量, 而分子的两项, 即 $(x^3 + x)$ 和 x 都是一阶无穷小量, 关键在于它们的差是三阶无穷小量. 上面的错误做法就是用 x 代替 $x^3 + x$, 抛弃了将要起关键作用的 x^3 项. 打个比方, 这与计算

$$\frac{1.001 - 1}{0.001} = 1$$

时不能将左边分子的第一项用 1 代替是一个道理.

下面举一个在一次考试中出现的错误, 即要求极限

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}.$$

当时的学生已经学过泰勒公式和洛必达法则, 但还是有不少学生用等价量代换法做.

第一种错误是对于分子的两项分别利用 $\frac{x}{1+x} \sim x\ (x \to 0)$ 和 $\ln(1+x) \sim x\ (x \to 0)$ 换为等价量 x, 于是分子成为 $x - x = 0$, 所以 $I = 0$.

第二种错误是利用 $\frac{x}{1+x} \sim x\ (x \to 0)$, 将分子的第一项换为它的等价量 x, 对第二项则用泰勒公式, 于是有

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

第三种错误是在分子中用 $\ln(1+x) \sim x\ (x \to 0)$ 将第二项换为 x, 于是

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x} - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x - x(1+x)}{x^2(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2+x^3} = -1.$$

以上三个答案都是错的, 正确的答案是 $-\frac{1}{2}$. 错误的根源相同, 都是不恰当地应用等价量代换法. 其实只要从无穷小量的阶数来观察问题就很容易明白这里的困难. 将 $x \to 0$ 时的 x 作为一阶无穷小量, 则本题中的分母就是二阶无穷小量. 由于分子中的两项的一阶项都是 x, 恰好抵消, 因此应当将分子的每一项都写出到 x^2 项才行.

虽然本书目前还没有进入到微分学, 但还是可以得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x} - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)x}{x^2(1+x)} = -1,$$

若利用习题 611(b) 则还可以得到[①]

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

合并这两个结果就得到

$$\lim_{x\to o}\frac{\left(\dfrac{x}{1+x} - x\right) + \Big(x - \ln(1+x)\Big)}{x^2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

小结 等价量代换法就是在乘除形式的极限计算中将其中的因子用等价量代替以简化计算. 但是在求和的表达式中, 不能随意将其中的一项或几项用等价量来代替[②].

2. 关于复合函数的极限问题 (习题 607)

在本节的函数极限计算中广泛利用了复合函数运算来计算一些比较复杂的极限问题. 习题 607 指出这种做法不是无条件成立的. 这里我们先回答该习题提出的问题, 然后对于习题 607 中的正面结论给出一些充分性条件.

① 先证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$, 再作代换 $t = e^x - 1$ 即可. 由于这些结果在将来都会成为非常简单的结果, 这里的细节从略.

② 回顾习题 631 中的定理, 可见在满足该定理的条件时, 在其中求和的表达式中可以用等价量代换来计算. 注意到其中的项数 n 趋于无穷大, 因此这与上面所举的例子是完全不一样的.

习题 607 如果 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$, 那么由此能否得出

$$\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B?$$

考察例子:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\ (\text{其中 } p \text{ 和 } q \text{ 为互素整数},\ q>0),\\ 0, & x \text{ 为无理数};\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

并且 $x\to 0$.

解 本题已经对于所提的问题给出反例, 因此只要验证即可.

函数 $\varphi(x)$ 即是著名的黎曼函数. 对于它的较详细的讨论见 §1.7.3 的习题 736. 其中包含了本题中需要的 $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, 这里不另行证明.

这时 $a=0$, $A=0$. 此外, 由 $A=0$ 就得到 $B=\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=1$.

然而复合函数 $\psi(\varphi(x))$ 当 $x\neq 0$ 时有两种可能性. 若 x 为无理数, 则 $\varphi(x)=0$, 因此 $\psi(\varphi(x))=\psi(0)=0$; 若 x 为有理数, 则 $\varphi(x)\neq 0$, 因此 $\psi(\varphi(x))=1$. 这表明复合函数 $\psi(\varphi(x))$ 在点 $x=0$ 的任意邻近既可以取到 0, 也可以取到 1, 因此当 $x\to 0$ 时函数 $\psi(\varphi(x))$ 的极限不存在.

在前面已经遇到过许多例子, 它们表明在习题的条件下结论 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B$ 经常成立, 但目前却有一个例子表明这个结论也可以不成立, 因此答案是: 不一定成立. □

下面讲两个问题. 第一, 为什么会发生上述现象? 第二, 什么条件下习题中的 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))=\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$ 能够成立?

第一个问题从函数极限定义就可以得到解释.

考察习题 607 中给出的那个例子, 并为了清楚起见将外层函数 ψ 的自变量改记为 y. 对于极限 $\lim\limits_{y\to A}\psi(y)=B$ 来说, 按照极限定义不必考虑函数 $\psi(y)$ 在点 $y=A$ 是否有定义. 若 $\psi(A)$ 有定义, 这个值也不起任何作用.

例如习题 607 的例子中 $\psi(0)=0$, 而这与 $\lim\limits_{y\to 0}\psi(y)=1$ 毫无关系.

然而在考虑复合函数 $\psi(\varphi(x))$ 在 $x\to a$ 的极限时, 其中的 $\varphi(x)$ 完全可能取到 A, 甚至会在 $x\to a$ 的过程中无限多次取到 A. 这就是问题所在. 若 $\psi(y)$ 于 $y=A$ 处无定义, 则 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))$ 无意义; 若 $\psi(y)$ 于 $y=A$ 处有定义, 则习题 607 的例子告诉我们 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))$ 未必等于 $B=\lim\limits_{y\to A}\psi(y)$ ①.

下面讲第二个问题, 即在什么条件下会成立以下关系:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A,\ \lim_{x\to A}\psi(x)=B\Longrightarrow\lim_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B. \tag{1.41}$$

从前面对于第一个问题的分析可以知道, 在以下几个条件下 (1.41) 都能够成立.

① 这里可介绍美国数学月刊的第 82 卷 (1975), 63–64 页上与此有关的一个定理: 若 $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 和 $\lim\limits_{y\to A}\psi(y)=B$, 那么 $\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))$ 只有三种可能性: (1) 等于 B; (2) 等于 $\psi(A)$; (3) 无意义. 证明是容易的.

(1) $\psi(A) = B$, 即函数 ψ 在点 A 处连续;

(2) 存在某个 $\delta_0 > 0$, 使得在 $0 < |x - a| < \delta_0$ 时 $\varphi(x) \neq A$;

(3) $A = \pm\infty$, 而 $\lim\limits_{x \to A} \psi(x)$ 有意义.

解释　条件 (1) 使得在 $\lim\limits_{x \to A} \psi(x) = B$ 中允许 x 取到 A; 条件 (2) 使得在 $x \to a$ 时复合函数 $\psi(\varphi(x))$ 中的内层 $\varphi(x)$ 不会取到 A; 条件 (3) 与 (2) 类似, 因为 $\varphi(x)$ 一定是有限实数, 因此不可能取到 $\pm\infty$.

读者如果有兴趣, 可以检查前面用到复合函数极限的一些实际例子, 看看是否满足以上的某个条件. (典型的例子就是从 (1.34) 推出 (1.35)–(1.37).)

3. 柯西命题的推广 (习题 608–610)

这是将数列极限中的柯西命题和施托尔茨定理 (即习题 138–141, 143 等) 从离散推广到连续. 在学习上述数列极限习题的基础上, 就不难解决这里的习题. 下面给出前两题的解答供参考, 其中的方法与习题 138–139 相同.

习题 608　证明柯西定理: 如果函数 $f(x)$ 定义在区间 $(a, +\infty)$ 上, 而且在每一个有限区间 (a, b) 上是有界的, 那么

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)]$;

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$　$(f(x) \geqslant C > 0)$,

其中假定两个等式右端的极限存在.

解　(a) 设 $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$, 则容易发现只要对 $A = 0$ 的情况作出证明就足够了, 因为当 $A \neq 0$ 时可以用辅助函数 $f(x) - Ax$ 来代替 $f(x)$. 此外又不妨设已有 $a > 0$.

对给定的任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $M_1 > a$, 当 $x \geqslant M_1$ 时成立 $|f(x+1) - f(x)| < \dfrac{1}{2}\varepsilon$.

对 $x > M_1$, 取正整数 $n = [x - M_1 + 1]$, 则有 $n \leqslant x - M_1 + 1 < n + 1$, 也就是

$$M_1 \leqslant x - n + 1 < M_1 + 1.$$

现在对于 $x > M_1$ 时的分式 $\dfrac{f(x)}{x}$ 的分子做分拆并估计如下:

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &\leqslant \frac{|f(x) - f(x-1)| + \cdots + |f(x-n+2) - f(x-n+1)| + |f(x-n+1)|}{x} \\ &\leqslant \frac{n-1}{x} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(x-n+1)|}{x} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(x-n+1)|}{x}.\end{aligned}$$

由于最后一项的分子中的自变量 $x - n + 1 \in [M_1, M_1 + 1)$, 而 f 在任意有限区间上有界, 因此存在 $M > M_1$, 使得当 $x > M$ 时有 $\dfrac{|f(x-n+1)|}{x} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 于是也同时成立了 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon$.

(b) 由已经证明的 (a) 和指数函数与对数函数的连续性就有

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln f(x)}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x}}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln f(x+1)-\ln f(x))}=\mathrm{e}^{\ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}.\quad\Box$$

习题 609 证明, 如果 (a) 函数 $f(x)$ 在区间 $(a,+\infty)$ 上定义; (b) f 在每一个有限区间 $a<x<b$ 上有界; (c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=+\infty$ (或 $-\infty$), 那么

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty\ (\text{或}\ -\infty)\ .$$

解 不妨设有 $a>0$.

对给定的任意 $K>0$, 存在 $M_1>a$, 当 $x\geqslant M_1$ 时成立 $|f(x+1)-f(x)|>2K$. 对 $x>M_1$, 取正整数 $n=[x-M_1+1]$, 则有 $n\leqslant x-M_1+1<n+1$, 也就是

$$M_1\leqslant x-n+1<M_1+1.$$

现在对于 $x>M_1$ 时的分式 $\dfrac{f(x)}{x}$ 的分子做分拆并估计如下:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{[f(x)-f(x-1)]+\cdots+[f(x-n+2)-f(x-n+1)]+f(x-n+1)}{x}$$
$$\geqslant\frac{n-1}{x}\cdot 2K-\frac{|f(x-n+1)|}{x}.$$

这时有 $\dfrac{n-1}{x}>1-\dfrac{M_1+1}{x}$, 又由于上式的最后一项的分子中的自变量 $x-n+1\in[M_1,M_1+1)$, 而 f 在任意有限区间上有界, 因此存在 $M>M_1$, 使得当 $x>M$ 时有 $\dfrac{|f(x-n+1)|}{x}<\dfrac{K}{3}$, 且同时成立 $\dfrac{n-1}{x}>\dfrac{2}{3}$, 于是当 $x>M$ 时就得到

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{2}{3}\cdot 2K-\frac{K}{3}=K,$$

这样就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ 的情况, 或者模仿上面的方法, 或者令 $g(x)=-f(x)$, 就可以归结为已经证明的结论. 从略. $\Box$

习题 610 及其证明都没有新的内容, 从略. 读者可以试试看, 能否证明它, 用以测试自己是否已经掌握了前面的方法.

4. 函数 e^x 的两种表示 (习题 611, 612)

习题 611 将习题 69 和 72 的内容从数列推广到函数序列.

习题 611 证明

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n=\mathrm{e}^x$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)=\mathrm{e}^x$.

解 (a) 用习题 71 和代入法即有

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=\mathrm{e}^x.$$

(b) 仿照习题 72 的解, 引入记号: $y_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $z_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, $n=1,2,\cdots$, 它们是两个函数序列.

首先证明 $\{z_n(x)\}$ 对任何 x 值都是收敛的.

用柯西收敛准则, 对于任何正整数 n 和 p, 有

$$\begin{aligned}|z_{n+p}(x)-z_n(x)|&=\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{x^{n+p}}{(n+p)!}\right|\\&\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots+\frac{|x|^{n+p}}{(n+p)!}\\&=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{|x|}{(n+2)}+\cdots+\frac{|x|^{p-1}}{(n+2)\cdots(n+p)}\right)\\&\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{|x|}{(n+2)}+\cdots+\frac{|x|^{p-1}}{(n+2)^{p-1}}\right)\\&\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{|x|}{n+2}}\\&=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n+2-|x|},\end{aligned}$$

其中假设已取 n 充分大, 使得 $n+2>|x|$.

由于当 $n\to\infty$ 时上述最后一式极限为 0 (即习题 61 的 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$), 因此对给定的任意正数 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 且 p 为任意正整数时, 上述最后一式小于 ε. 这就证明了对每一个 x, 存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n(x)=E(x)$.

下面将证明 $E(x)=\mathrm{e}^x$, 其中的方法与 §1.2.3 的习题 72 中的方法几乎完全相同.

直接估计函数序列 $\{y_n(x)\}$ 和 $\{z_n(x)\}$ 之差. 将 $y_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 用二项式定理展开, 其中前两项 $1+x$ 与 $z_n(x)$ 的前两项相同, 因而抵销, 然后与习题 72 类似地利用习题 6 的伯努利不等式, 就有

$$\begin{aligned}|z_n(x)-y_n(x)|&=\left|\sum_{k=2}^n\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=2}^n\frac{x^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right|\\&\leqslant\sum_{k=2}^n\frac{|x|^k}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]\\&\leqslant\sum_{k=2}^n\frac{|x|^k}{k!}\left[1-\left(1-\frac{(k-1)k}{2n}\right)\right]\\&=\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^n\frac{|x|^k}{(k-2)!}\leqslant\frac{x^2}{2n}\cdot E(|x|),\end{aligned}$$

可见有 $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n(x)-y_n(x)|=0$. 这就证明了函数序列 $\{y_n(x)\}$ 和 $\{z_n(x)\}$ 具有相同的极限, 即 $E(x)=\mathrm{e}^x$. □

习题 612 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(2\pi n!\mathrm{e}) = 2\pi$.

解 (本题也可放在 §1.2 中.) 利用习题 72 中的结论, 就有

$$\frac{1}{(n+1)!} < \mathrm{e} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{1}{n!n}.$$

将上式乘以 $n!$ 后, 中间是 $n!\mathrm{e}$ 减去一个正整数, 而左边为 $\frac{1}{n+1}$, 右边为 $\frac{1}{n}$, 由此可见, 中间就是 $n!\mathrm{e} - [n!\mathrm{e}]$, 即 $n!\mathrm{e}$ 的小数部分. 再乘以 2π 就得到

$$\frac{2\pi}{n+1} < 2\pi\big(n!\mathrm{e} - [n!\mathrm{e}]\big) < \frac{2\pi}{n}.$$

当 $n \geqslant 4$ 时利用 $\sin x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增, 就有

$$\sin\frac{2\pi}{n+1} < \sin(2\pi n!\mathrm{e}) < \sin\frac{2\pi}{n}.$$

最后两边乘以 n 并令 $n \to \infty$ 就得到所求的极限为 2π. □

5. 迭代生成的函数列 (习题 606, 637–640)

这是 §1.2 中有关迭代数列的习题 81, 148–149 的继续. 其中的规律性需要专门介绍. 先讲其中与众不同的一道题, 所用的方法是柯西命题 (即习题 138) 的进一步发展.

习题 637.3 设数列 y_n 由数列 x_n 的下列关系式确定:

$$y_0 = x_0,\ y_n = x_n - \alpha x_{n-1}\ \ (n = 1, 2, \cdots),$$

其中 $|\alpha| < 1$. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 设 $\alpha \neq 0$, 否则不必再讨论. 由于 $\{y_n\}$ 的极限已知, 我们可以用 $\{y_n\}$ 去研究 $\{x_n\}$. 认为 $\{y_n\}$ 已经给定, 然后从 $x_0 = y_0$ 和

$$x_n = \alpha x_{n-1} + y_n\ \ (n = 1, 2, \cdots)$$

来确定数列 $\{x_n\}$. 用差分方程的语言来说, 这就是一个一阶线性非齐次差分方程. (在 §1.2.8 的习题 148 的解 3 中已经出现了线性差分方程.) 另一方面也可以将上述方程看成为线性迭代, 只是每次的 y_n 与 n 有关.

于是就有 $x_0 = y_0$, $x_1 = \alpha y_0 + y_1$, $x_2 = \alpha^2 y_0 + \alpha y_1 + y_2, \cdots$, 一般地用数学归纳法可以证明有

$$x_n = \alpha^n y_0 + \alpha^{n-1} y_1 + \cdots + \alpha y_{n-1} + y_n.$$

为从此式证明 $\{x_n\}$ 收敛, 可以用柯西收敛准则 (参见习题 81 的解 2).

下面将采取类似于 §1.2.4 的习题 81 的解 3 中的方法. 首先, 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在的话, 它等于什么? 从 $y_n = x_n - \alpha x_{n-1}$ 中令 $n \to \infty$ 就得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-\alpha}.$$

第二步, 我们直接证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{b}{1-\alpha}\right) = 0$. 由于

$$\begin{aligned} x_n - \frac{b}{1-\alpha} &= x_n - b\left(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n + \frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right) \\ &= \alpha^n(y_0 - b) + \alpha^{n-1}(y_1 - b) + \cdots + \alpha(y_{n-1} - b) + (y_n - b) - \frac{b\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \end{aligned}$$

而 $|\alpha|<1$, 上式右边的最后一项极限为 0, 因此只要证明以下极限等式即可:

$$\lim_{n\to\infty}[\alpha^n(y_0-b)+\alpha^{n-1}(y_1-b)+\cdots+\alpha(y_{n-1}-b)+(y_n-b)]=0. \tag{1.42}$$

下面的方法就是在 §1.2.7 中证明柯西命题 (即习题 138) 的方法.

对于给定的任意 $\varepsilon>0$, 存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时有 $|y_n-b|<\varepsilon$. 固定这个 N_1, 将 (1.42) 左边的方括号内的表达式记为 Δ_n, 然后进行分拆处理如下:

$$\begin{aligned}|\Delta_n|&=|\alpha^n(y_0-b)+\alpha^{n-1}(y_1-b)+\cdots+\alpha(y_{n-1}-b)+(y_n-b)|\\&\leqslant|\alpha^n(y_0-b)+\alpha^{n-1}(y_1-b)+\cdots+\alpha^{n-N_1}(y_{N_1}-b)|\\&\qquad+|\alpha^{n-N_1-1}(y_{N_1+1}-b)+\cdots+\alpha(y_{n-1}-b)+(y_n-b)|\\&\leqslant|\alpha^n|\cdot|(y_0-b)+\alpha^{-1}(y_1-b)+\cdots+\alpha^{-N_1}(y_{N_1}-b)|\\&\qquad+\varepsilon(1+|\alpha|+\cdots+|\alpha|^{n-N_1-1}).\end{aligned}$$

由于 N_1 已经固定, 记 $M=|(y_0-b)+\alpha^{-1}(y_1-b)+\cdots+\alpha^{-N_1}(y_{N_1}-b)|$, 则就得到当 $n>N_1$ 时有

$$|\Delta_n|\leqslant M\cdot|\alpha|^n+\varepsilon\cdot\frac{1}{1-|\alpha|}.$$

由于 $|\alpha|<1$, 存在 $N>N_1$, 使得当 $n>N$ 时 $M\cdot|\alpha|^n<\varepsilon$. 于是当 $n>N$ 时就有

$$|\Delta_n|\leqslant\varepsilon\cdot\frac{2-|\alpha|}{1-|\alpha|}.$$

由于右边的 ε 的系数与 ε 和 n 无关, 因此这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta_n=0$. □

下面我们指出, 除了上一题和 (与习题 148 雷同的) 习题 637.2 之外, 其余的几个习题存在统一的规律和解法. (当然它不一定是对每个题的最佳解法.)

为简明起见, 称 $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$ 为迭代数列, 称其中的函数 f 为迭代函数, 以下均假设 f 与 n 无关.

首先有一个简单但很基本的如下规律.

命题 1.9 设数列 $\{x_n\}$ 满足迭代公式 $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$, 且已知有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$, 若又已知有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi),$$

则极限 ξ 是方程 $f(x)=x$ 的根 (即 f 的不动点).

注 条件 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\xi)$ 在 f 于点 ξ 处连续时就成立. 证明是直截了当的, 但命题提供了一种方法, 即在研究迭代数列时, 经常先假设它收敛, 看极限会是什么, 然后再做下去. 如前面的习题 637.3 的解法就是如此. 该题中的迭代数列的迭代数与 n 有关, 因此比上述命题中的问题要复杂一点.

值得指出, 若迭代函数 f 没有不动点, 则从命题 1.9 就推出数列 $\{x_n\}$ 发散.

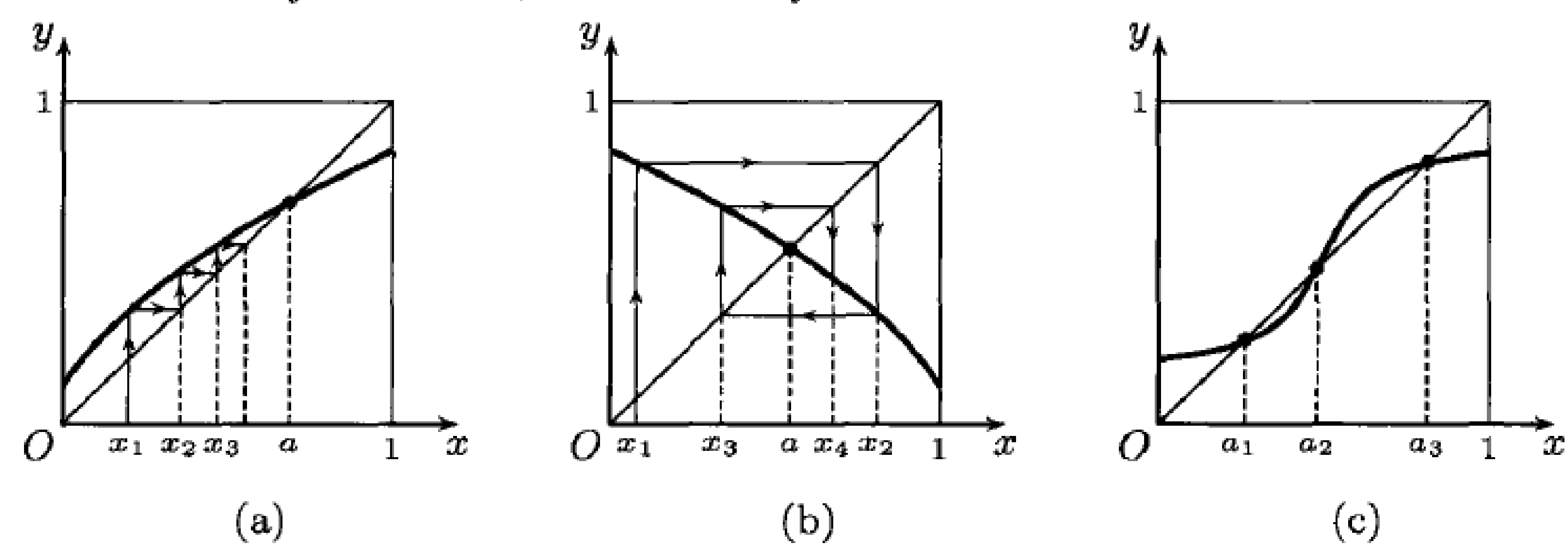
在迭代函数为单调时迭代数列的性态很简单, 这就是下一个命题, 它给出了迭代数列的单调性规律的理论依据.

命题 1.10 设函数 f 在区间 I 上单调, 数列 $\{x_n\}$ 满足迭代公式 $x_{n+1}=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$, 且 $x_n\in I$, $n=1,2,\cdots$, 则只有两种可能性:

(a) 当 f 为单调递增时, $\{x_n\}$ 为单调数列;

(b) 当 f 为单调递减时, $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{2n-1}\}$ 和 $\{x_{2n}\}$ 是具有相反单调性的两个单调子列.

这里我们只用图示来解释命题 1.10 的意义, 其简单证明可以在 [23] 的 §2.6.2 中找到. 附图中的分图 (a) 和 (b) 分别对应于命题 1.10 的情况 (a) 和情况 (b). 分图 (c) 则表明命题 1.9 中的极限 ξ 不一定唯一. 随着初始条件的不同, 收敛的迭代数列可能有不同的极限. 这只是对 f 单调递增作出的图. 对 f 单调递减也有类似的结论.



命题 1.10 的附图: 迭代函数为单调时的迭代数列的单调性示意图

下面用以上两个命题对 7 个习题作出统一的分析. 我们的方法是先作出 $f(x)$ 的草图, 求出它与 $y=x$ 的交点, 即得出 f 的不动点. 然后从 f 的图像的单调性来判断迭代数列的单调性. 这就是将结果猜到之后 (与命题无关地) 再写出证明.

习题 606 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n\text{ 次}}x$.

分析 这个题与 §1.2.4 的习题 81 和下面的习题 637.1 等类似, 可以改写为迭代数列来处理. 定义 $x_0=x$, $x_n=\sin x_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$, 于是迭代函数是 $f(x)=\sin x$. 无论 $x_0=x$ 如何, 从 $n=1$ 起总有 $x_n\in[-1,1]$, 而 $f(x)=\sin x$ 在该区间上单调递增, 因此可以从命题 1.10(a) 肯定 $\{x_n\}$ 单调且有界, 从而一定收敛. 细节留给读者. □

习题 637.1 设数列 $\{x_n\}$ 由

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\cdots\quad(a>0)$$

给出, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 如取 $a=2$ 则就是前面的习题 81, 只是那里只要证明数列收敛.

这里的迭代函数是 $f(x)=\sqrt{a+x}$, $x\geqslant 0$. 命题 1.9 可以用于事先确定极限值, 命题 1.10 则可以确定数列 $\{x_n\}$ 为单调递增. 具体求解的写法可参考习题 81 的解 3. □

习题 637.4 设数列 $\{x_n\}$ 由下列方式确定:

$$x_0=1,\ x_n=\frac{1}{1+x_{n-1}}\ (n=1,2,\cdots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析　由于数列每项大于 0, 因此迭代函数为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}\ (x>0)$. 由 $x=f(x)$ 求出不动点, 记为 $\xi=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5})\ (\approx 0.618)$. 从命题 1.10 知道本题属于情况 (b) (参看附图 (b)), 即需证 $\{x_n\}$ 的奇数项子列和偶数项子列分别单调, 且收敛于同一极限 ξ.

但本题可以如前面的习题 637.3 那样, 在求出 ξ 之后直接证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-\xi)=0$. 这是因为下面的估计比较容易:

$$|x_n-\xi|=\left|\frac{1}{1+x_{n-1}}-\frac{1}{1+\xi}\right|=\frac{|x_{n-1}-\xi|}{(1+x_{n-1})(1+\xi)}\leqslant\frac{1}{1+\xi}\cdot|x_{n-1}-\xi|.\quad\square$$

习题 638 (a) 函数序列 $\{y_n(x)\}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 由如下方式确定:

$$y_1=\frac{x}{2},\ y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2}\ (n=2,3,\cdots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

分析　本题中的自变量 x 只不过是一个参数, 因此前面的两个命题和方法都适用. 这时的迭代函数是 $f(y)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y^2}{2}$.

由初值 $y_1=\dfrac{x}{2}$ 和参数范围 $0\leqslant x\leqslant 1$ 可以确定 $y_n(x)\in[0,\frac{x}{2}]$ 始终成立, 而在此区间上迭代函数 f 单调递减, 因此属于命题 1.10 的情况 (b). 但是这里用上一题的方法更容易一些. 这就是从 $y=f(y)$ 直接解出 $y(x)=-1+\sqrt{1+x}$. 然后证明对于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的每个 x 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n(x)-y(x))=0$. 以下请读者写出细节. $\square$

习题 638 (b) 函数序列 $\{y_n(x)\}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 由如下方式确定:

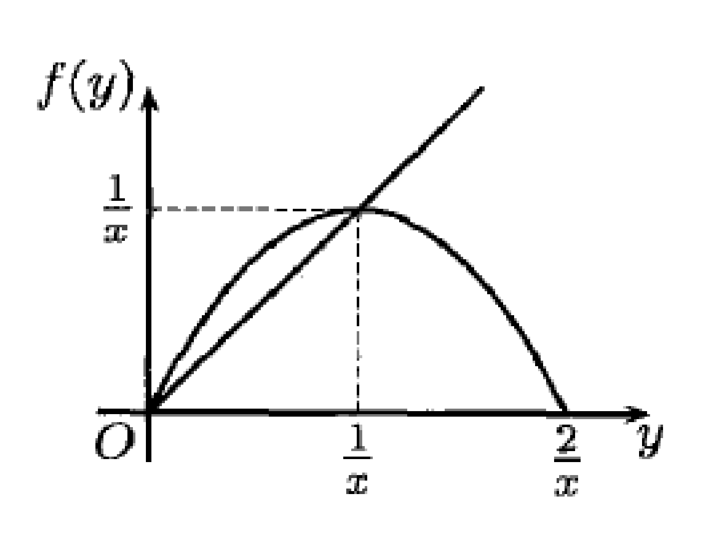
$$y_1=\frac{x}{2},\ y_n=\frac{x}{2}+\frac{y_{n-1}^2}{2}\ (n=2,3,\cdots),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

分析　此题中迭代函数 $f(y)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y^2}{2}$ 为单调递增函数, 属于命题 1.10 的情况 (a), 因此只要证明对每个 $x\in[0,1]$ 的 $\{y_n\}$ 关于 n 为单调有界就解决了收敛性问题, 再从命题 1.9 得到极限函数为 $y(x)=1+\sqrt{1-x}$. 当然用上一题的方法也可以成功. $\square$

习题 639.1 设 $x>0$, $y_n=y_{n-1}(2-xy_{n-1})\ (n=1,2,\cdots)$. 证明, 如果 $y_i>0\ (i=0,1)$, 那么序列 y_n 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{x}$.

分析　这里 x 同样只起着正参数的作用. 迭代函数为 $f(y)=y(2-xy)$. 它的不动点就是 $\dfrac{1}{x}$. 如附图所示, 这个不动点恰好也是迭代函数 f 的极大值点.



习题 639.1 的附图

于是从条件 $y_1 > 0$ 可推出只能取 $y_0 \in (0, \frac{2}{x})$. 若 $y_0 = \frac{1}{x}$, 则当然就"不动"了. 若 $0 < y_0 < \frac{1}{x}$, 则就是命题 1.10 的情况 (a). 最后, 若 $\frac{1}{x} < y_0 < \frac{2}{x}$, 则 $y_1 \in (0, \frac{1}{x})$, 因此与上面的情况相同. □

习题 639.2 为了求 $y = \sqrt{x}\ (x > 0)$, 可用 $y_n = \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{x}{y_{n-1}}\right)\ (n = 1, 2, \cdots)$ ($y_0 > 0$ 为任意数), 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{x}$.

分析 若取 $x = 1$ 则就是习题 149. 请参看 §1.2.8 中该题的解法以及后面的两个注. 注意本题中的不动点也恰好是迭代函数的极值点, 因此与上一题有类似的分析. □

与上述 7 个题不同, 在下面一题中起主要作用的是关于正弦函数 $\sin x$ 的不等式 $0 < |\sin x| < |x|\ (x \neq 0)$.

习题 640 为了求开普勒方程 $x - \varepsilon\sin x = m\ (0 < \varepsilon < 1)$ 的近似解, 假设 $x_0 = m,\ x_1 = m + \varepsilon\sin x_0, \cdots, x_n = m + \varepsilon\sin x_{n-1}, \cdots$ (逐步逼近法), 证明存在 $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, 且数 ξ 是该方程的唯一解.

解 这里的迭代函数为 $f(x) = m + \varepsilon\sin x$, 一次迭代之后就只需要在 $[m-\varepsilon, m+\varepsilon]$ 上研究 f 了, 但其单调性分析不是非常方便. 因此下面改用其他方法来做.

首先看方程解的唯一性. 若有 x_1, x_2 都满足方程 $x - \varepsilon\sin x = m$, 则将 x_1, x_2 分别代入, 然后将两式相减就得到

$$|x_1 - x_2| = \varepsilon \cdot |\sin x_1 - \sin x_2| = \varepsilon \cdot \left|2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant \varepsilon \cdot |x_1 - x_2|,$$

由条件 $\varepsilon \in (0, 1)$ 可见只能有 $x_1 = x_2$.

用相同的方法可以导出最近两次迭代之差满足以下不等式:

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon \cdot |x_n - x_{n-1}|\ \ (n = 1, 2, \cdots),$$

于是就可以用柯西收敛准则来证明数列 $\{x_n\}$ 收敛 (参见 §1.2.5 的习题 82 等). 具体来说, 对于任何正整数 p 有

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \varepsilon|x_{n+p-1} - x_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon^n|x_p - x_0| \leqslant \varepsilon^{n+1}.$$

其中最后一步利用了 $x_0 = m$ 和 $|x_p - m| = |\varepsilon\sin x_{p-1}| \leqslant \varepsilon$.

由于 $0 < \varepsilon < 1$ 保证了 $\varepsilon^n \to 0$, 因此对于任意的 $\delta > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 对任意的正整数 p, 都成立 $|x_{n+p} - x_n| < \delta$, 于是从柯西准则知道迭代数列 $\{x_n\}$ 收敛. □

注 以上方法就是压缩映射原理, 可参见 [23] 的 §3.4.4 中的介绍.

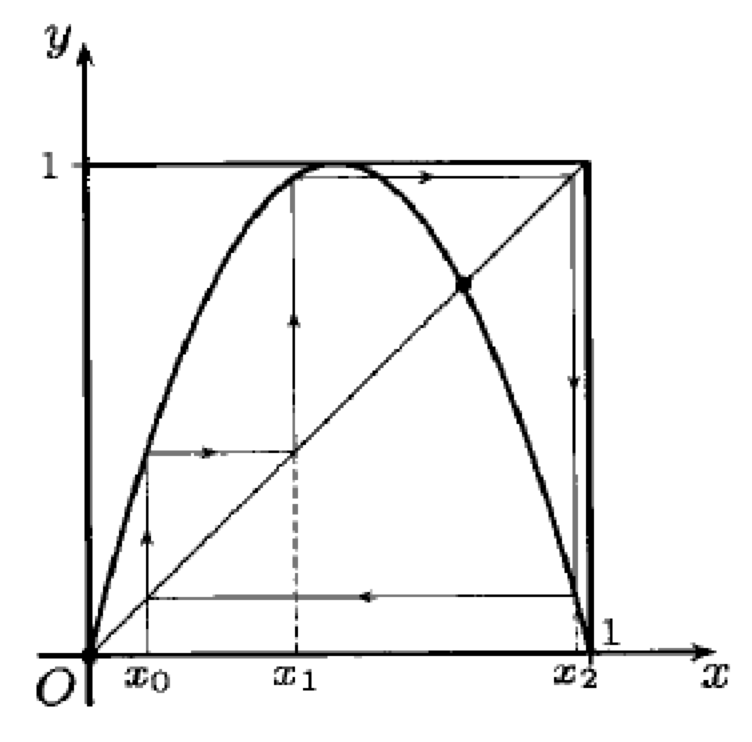
这里要指出, 命题 1.10 中总结的迭代数列的单调性规律只是迭代数列理论中最为初等的部分. 其中的主要条件是该数列落在迭代函数的某个单调区间内. 如果该条件不成立, 则情况完全不同. 这时的迭代数列会有极其复杂的性态, 它就是二十世纪七十年代出现的新科学——混沌学——的源头之一. 对此有兴趣的读者可以阅读 [23] 中的 §5.6, 也可以直接阅读这方面的科普读物 [8] 和入门读物 [9].

为了让有兴趣的读者能够产生在这方面的一点感觉，不妨举一个在混沌学中最简单的例子，看其中会发生些什么，而将它们的证明略去.

如右图所示，取迭代函数 $y = f(x) = 4x(1-x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

初看起来这个迭代函数只不过是开口向下的一条抛物线. 它只有两个单调区间：$[0, 0.5]$ 和 $[0.5, 1]$. 这样的情况在前面的习题 639.1 (参见其附图) 和其他习题中都出现过，似乎是平淡无奇的.

然而这里的迭代数列则完全不同. 若取初值 $x_0 \in [0,1]$, 然后用 $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \cdots$, 生成迭代数列，则除了 $x_0 = 0$ 和 $x_0 = 0.75$ (即图中由 $y = f(x)$ 和 $y = x$ 的交点所确定的两个不动点) 之外，其他迭代数列不可能完全落在 f 的某个单调区间内.



$y = 4x(1-x)$ ($x \in [0,1]$) 的图像

下面列出由这个迭代函数生成的迭代数列会具有的一些性态：

(1) 存在周期为 3 的迭代数列. 这在图上已经画出，即从 $x_0 = \sin^2 20° \approx 0.0117$ 出发，就可以计算得到 $x_1 = \sin^2 40°$, $x_2 = \sin^2 80°$, $x_3 = x_0$, 于是以后就以周期 3 重复了. 这当然是发散数列，并有三个聚点.

(2) 引用著名论文① 中的第一定理，就知道只要选取适当的初值，就可以生成最小周期等于每一个正整数 n 的周期迭代数列. (不动点就是周期 1 的迭代数列.)

(3) 再引用同一论文的第二定理，就知道存在一个不可列数集 $S \subset [0,1]$. 在 S 中任何两个不相等的初值 $x_0 \neq y_0$ 所生成的迭代数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 之间都具有以下性质：

$$\varliminf_{n\to\infty} |y_n - x_n| = 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} |y_n - x_n| > 0,$$

也就是说它们既会无限接近，又总是会分开. 这样的性态可称复杂了. 在混沌学中的第一个可操作的混沌定义即是以此为主要依据而产生的.

(4) 只要在取初值 x_0 时避开 $[0,1]$ 中的一个可列集 (包括 $0, 0.75$ 等)，则所生成的每一个数列 $\{x_n\}$ 就会在区间 $[0,1]$ 内处处稠密，于是其聚点全体就是区间 $[0,1]$. 这种“遍历性”是与收敛性截然相反的性态.

最后应当指出，就迭代函数为 $f(x) = 4x(1-x)$ 来说，对以上各点作出严格证明还是比较容易的，然而如果讨论更为一般的抛物线映射

$$f(x) = bx(1-x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 < b \leqslant 4,$$

即带有参数 $b \in (0,4]$ 时，则问题就要复杂得多. 对于它的研究已经包含着离散动力系统的许多基本内容. 这也就是参考文献 [9]《从抛物线谈起》的书名的由来.

① T. Y. Li (李天岩), J. A. Yorke, Period three implies chaos, 美国数学月刊, 第 82 卷 (1975), 985–992 页. (中译文: 周期 3 蕴含浑沌, 数学译林, 第 8 卷 (1989), 第 3 期, 211–218 页.)

§1.6 符号 O (习题 645–661)

内容简介 在这一节中对大 O, 小 o, 等价记号 $\sim$ 等给出定义, 并提出了等价量代换法. 如前所说, 这种方法的大量应用实例就是上一节的极限计算题. 本节的习题数量很少, 其中也只有最后一题 (习题 661) 有一点困难, 因此下面只举少量的例子来说明其中的问题.

在新版中增加了一个符号 O^*, 即当 $x \in U_a$ $(x \neq a)$ 时 $\psi(x) \neq 0$, 且存在有限的 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$ 时, 记为

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x)) \ \ (x \to a).$$

与大 O 记号相比, 在 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为关于 $x \to a$ 的无穷小量 (或无穷大量) 时, $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$ 表明二者为真正的同阶无穷小量 (或无穷大量), 而 $\varphi(x) = O(\psi(x))$ 只表明 $\varphi(x)$ 的阶数不低于 (不高于) $\psi(x)$ 的阶数. 例如

$$x^3 = O(x^2) \ \ (x \to 0)$$

是正确的, 但 $x^3 = O^*(x^2)$ $(x \to 0)$ 是错误的. 同样,

$$x = O(x^2) \ \ (x \to +\infty)$$

是正确的, 但 $x = O^*(x^2)$ $(x \to +\infty)$ 是错误的.

对于以下习题中将大 O 称为同阶都应当作以上理解.

此外, 我们还经常用 $O(1)$ 代表 (关于某种极限过程的) 有界量, 用 $o(1)$ 代表无穷小量. 这些记号中的大 O 和小 o 与一般的定义完全一致.

第一个习题用具体的几何图形给出了非常具体的无穷小量的例子, 而且具有从一阶到三阶的不同阶数, 这对于理解抽象的数学概念很有帮助.

习题 645 如附图所示, 设中心角 $AOB = x$ 是一阶无穷小量, 确定下列各个量的无穷小的阶数:

(a) 弦 AB;

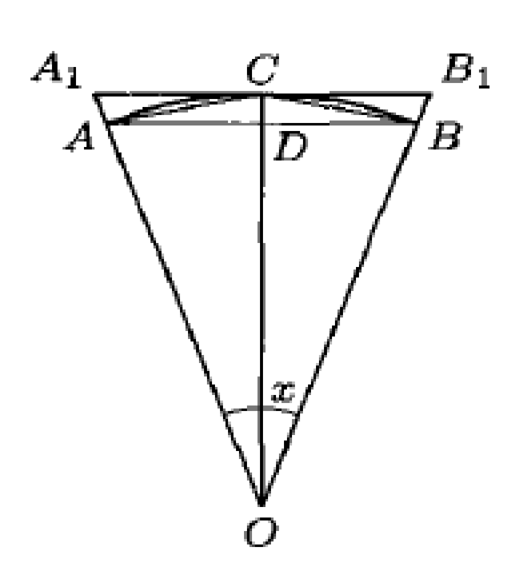
(b) 矢 CD;

(c) 扇形 AOB 的面积;

(d) 三角形 ABC 的面积;

(e) 梯形 ABB_1A_1 的面积;

(f) 弓形 ABC 的面积.



习题 645 的附图

解 本题只要写出有关量的表达式后即可求出阶数, 答案如下. (其中 $R = OA = OC = OB$.)

(a) 弦 $AB = 2R\sin\dfrac{x}{2} \sim Rx$ $(x \to 0)$, 为一阶无穷小量.

(b) 矢 $CD = R - R\cos\dfrac{x}{2} \sim R\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2}{4} = \dfrac{R}{8}x^2$ $(x \to 0)$, 为二阶无穷小量.

(c) 扇形 AOB 的面积是 $\dfrac{1}{2}R^2x$, 为一阶无穷小量.

(d) 三角形 ABC 的面积等于三角形 OAC 和 OBC 的面积之和减去三角形 OAB 的面积, 也等于弦 AB 乘矢 CD 除 2:

$$\begin{aligned} 2\cdot\frac{1}{2}R^2\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}R^2\sin x &= R^2\sin\frac{x}{2}-R^2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} \\ &= R^2\sin\frac{x}{2}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right) \\ &\sim \frac{R^2}{16}x^3\ (x\to 0), \end{aligned}$$

为三阶无穷小量.

(e) 梯形 ABB_1A_1 的面积等于 $\frac{1}{2}(AB+A_1B_1)\times CD$, 即是

$$\frac{R}{2}(2\sin\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2})\cdot R(1-\cos\frac{x}{2})\sim\frac{R^2}{8}x^3\ \ (x\to 0),$$

为三阶无穷小量.

(f) 弓形 ABC 的面积是 $\frac{1}{2}R^2x-\frac{1}{2}R^2\sin x$, 为三阶无穷小量.

这里可以利用在 §1.5 的命题 1.8(1) 中已经证明的不等式

$$0<\frac{x-\sin x}{x^3}<\frac{1}{2}\ \ (0<x<\frac{\pi}{2}).$$

这样就已经有 $x-\sin x=O(x^3)\ (x\to 0)$, 即至少是不低于三阶的无穷小量. 在今后我们将会证明有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6},$$

从而就可以说, 当 $x\to 0$ 时 $x-\sin x=O^*(x^3)\ (x\to 0)$, 即恰好是三阶无穷小量. □

下面对于等号两边出现大 O 和小 o 记号的等式作一点说明. 这里要注意, 它们不是普通的等式, 而经常称为渐近等式, 又将导出这类等式的分析称为渐近分析, 因为它们反映的是在极限意义上的关系式. 在一般情况下这类等式只能从左往右读, 而不能反方向读. 例如等式

$$o(1)=O(1)$$

的意思是: 关于某个极限过程的无穷小量一定是有界量. 这确实成立. 关于数列这是收敛数列的有界性定理的特例, 关于 $x\to a$ (设 a 为有限数) 的极限过程, 这就是函数于点 a 有极限则一定在该点的某个去心邻域上有界的特例. 然而上述等式不能从右往左读, 因为有界量当然不一定是无穷小量.

下面给出习题 646 中两个小题的解答. 其中设 $o(f(x))$ 是当 $x\to a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大量, 而 $O(f(x))$ 是当 $x\to a$ 时与函数 $f(x)$ $(f(x)>0)$ 同阶的无穷大量. 此外为简明起见, 总是假设分母上的函数非零.

习题 646 (b) 证明: $O(o(f(x)))=o(f(x))$.

解 设 $g(x)=o(f(x))$, 即有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$, 又设 $h(x)=O(g(x))$, 即存在 $M>0$, $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时成立 $\left|\dfrac{h(x)}{g(x)}\right|<M$. 不妨设 $\delta>0$ 已经充分小, 使得 f 在 $0<|x-a|<\delta$ 时有定义.

于是在 $0<|x-a|<\delta$ 时就可以如下估计

$$\left|\frac{h(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leqslant M\cdot\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\to 0\ \ (x\to a),$$

这就表明 $h(x)=o(f(x))\ (x\to a)$. □

习题 646 (c) 证明: $o(O(f(x)))=o(f(x))$.

解 设 $g(x)=O(f(x))$ 关于 $x\to a$ 成立, 即有 $M>0$ 和 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时有 $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)}\right|<M$, 又设有 $h(x)=o(g(x))\ (x\to a)$, 即有 $\dfrac{h(x)}{g(x)}\to 0\ (x\to a)$.

于是在 $0<|x-a|<\delta$ 时可以估计如下:

$$\left|\frac{h(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|\cdot\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|\leqslant M\cdot\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|\to 0\ \ (x\to a),$$

这就是 $h(x)=o(f(x))\ (x\to a)$. □

注 虽然在习题 646 的题意中说明它是对无穷大量来讨论的, 但从上面的证明可见这些等式对于无穷小量也同样成立. 此外, 这两个题最后都转化为有界量与无穷小量的乘积仍为无穷小量, 即 $O(1)\cdot o(1)=o(1)$.

下面是关于一些具体函数的渐近分析, 我们只对其中涉及对数函数的习题给出解答.

习题 650 (d) 设 $x\to +0$, 证明: $\ln x=o\Big(\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}\Big)\ (\varepsilon>0)$.

解 当 $x\to +0$ 时 $\ln x$ 和 $\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}$ 都是无穷大量. 如果取这时的 $\dfrac{1}{x}$ 为 (标准的) 一阶无穷大量, 而称 $\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}=\Big(\dfrac{1}{x}\Big)^{\varepsilon}$ 为 ε 阶的无穷大量, 则本题表明这时的 $\ln x$ 的无穷大量的阶数一定低于任何正数 ε. (但并不能对于 $x\to +0$ 时的无穷大量 $\ln x$ 确定其阶数.)

令 $t=-\ln x$, 即有 $x=\mathrm{e}^{-t}$. 于是有 $x\to +0 \Longleftrightarrow t\to +\infty$. 于是就有

$$\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}}=x^{\varepsilon}\ln x=-\frac{t}{(\mathrm{e}^{\varepsilon})^t}=-\frac{t}{a^t},$$

其中 $a=\mathrm{e}^{\varepsilon}>1$. 下面只要用 §1.2.2 的习题 60 即可证明 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{a^t}=0$.

为此取 t 的整数部分 $[t]$, 则 $[t]\leqslant t<[t]+1$, 因此有

$$0<\frac{t}{a^t}\leqslant\frac{[t]+1}{a^{[t]}}.$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{a^n}=0\ (a>1)$, 可见对任意的 $\delta>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时有 $0<\dfrac{n+1}{a^n}<\delta$. 于是当 $t\geqslant N$ 时也就有 $0<\dfrac{t}{a^t}<\delta$. 这就证明了 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{a^t}=0$, 也就是 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=0$. □

注 1 类似的习题在 §1.5 中有习题 591(b), 其中取 $\varepsilon=1$.

注 2 若观察这时的无穷小量 $\dfrac{1}{\ln x}$ 与 $x^{\varepsilon}\ (\varepsilon>0)$ 的比较, 则就得到习题 654 中的结论, 即 $\dfrac{1}{\ln x}$ 是比任何 $x^{\varepsilon}\ (\varepsilon>0)$ 还要低阶的无穷小量.

习题 651 (e) 设 $x \to +\infty$, 证明: $\ln x = o(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

解 当 $x \to +\infty$ 时 $\ln x$ 和 x^ε 都是正无穷大量. 如果取这时的 x 为 (标准的) 一阶无穷大量, 而称 x^ε 为 ε 阶的无穷大量, 则本题表明, 这时的 $\ln x$ 的无穷大量的阶数一定低于任何正数 ε. (但并不能对 $x \to +\infty$ 时的无穷大量 $\ln x$ 确定其阶数.)

令 $\ln x = t$, 则 $x = \mathrm{e}^t$, 以下证明可模仿上题来做. 或者也可以令 $y = \dfrac{1}{x}$, 于是有

$$\frac{\ln x}{x^\varepsilon} = -\frac{\ln y}{\dfrac{1}{y^\varepsilon}},$$

且 $x \to +\infty \iff y \to +0$, 因此问题已经归结为上题. □

习题 653, 655–658 是一系列确定无穷小量和无穷大量的阶数及其主项的计算, 它们完全依赖于 §1.5 中的极限计算. 下面只举一个例子以说明如何解此类问题, 它同时也是对于 §1.5 中有关极限计算的复习.

习题 653 (c) 设 $x \to 0$, 将函数 $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ 分出形如 Cx^n 的主项 (C 是常数), 并确定其相对于变量 x 的无穷小的阶.

解 利用 §1.5 中的命题 1.7, 即公式 (1.30′), 就得到

$$(1-2x)^{\frac{1}{2}} = 1 - x - \frac{1}{8}(2x)^2 + o(x^2) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \ \ (x \to 0),$$

$$(1-3x)^{\frac{1}{3}} = 1 - x - \frac{1}{9}(3x)^2 + o(x^2) = 1 - x - x^2 + o(x^2) \ \ (x \to 0),$$

于是就得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{[1 - x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)] - [1 - x - x^2 + o(x^2)]}{x^2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

即得到 $f(x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$ $(x \to 0)$, 它在 $x \to 0$ 时是二阶无穷小量. □

注 从无穷小量的阶数分析就可以知道关键在于应用命题 1.7 写出二阶项, 并由此知道 $f(x)$ 为二阶无穷小量, 从而只要计算 $f(x)$ 除以 x^2 的极限即可求得主项.

当然如 §1.5.4 中关于无理函数的极限计算所说, 这里也完全可以用初等代数来做, 读者不妨一试.

下面是本节的最后一题. 它表明, 不存在增长速度最快的无穷大量.

习题 661 证明, 对于任意给定的函数序列

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots \quad (x_0 < x < +\infty),$$

总可以构造一个函数 $f(x)$, 当 $x \to +\infty$ 时, 它比函数 $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 中的每一个都增加得快.

解 (分析法) 本题的目的是根据给定的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 构造一个函数 $f(x)$, 使得对于每一个 n 成立

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right|=0.$$

可以设想, 如果给定的是有限个函数 $f_1,\cdots,f_k$, 那么只要简单地令

$$f(x)=x\cdot(\max\{|f_1(x)|,\cdots,|f_k(x)|\}+1),$$

问题已经解决. (当然这时的方法很多, 读者不妨自己考虑其他合乎要求的 f.)

现在作一个跳跃, 即对于给定的无限多个函数 $\{f_n\}$, 采用分段构造方法来定义合乎要求的 f. 为简明起见, 不妨将题中的定义域改取为 $[1,+\infty)$, 然后定义

$$f(x)=n\cdot\big(\max\{|f_1(x)|,\cdots,|f_n(x)|\}+1\big),\ n\leqslant x<n+1\ \ (n=1,2,\cdots).$$

于是其中的 $n=[x]$, 即自变量 x 的整数部分.

这时对于每一个 $f_n(x)$, 可以如下计算 f_n 与 f 之比的绝对值当 $x\to+\infty$ 的极限. 由于当 $x>n$ 时有 $[x]\geqslant n$, 因此有 $|f_n(x)|\leqslant\max\{|f_1(x)|,\cdots,|f_{[x]}(x)|\}$, 又利用 $x-1<[x]\leqslant x$, 于是有

$$\left|\frac{f_n(x)}{f(x)}\right|=\frac{|f_n(x)|}{[x]\cdot(\max\{|f_1(x)|,\cdots,|f_{[x]}(x)|\}+1)}<\frac{1}{[x]}<\frac{1}{x-1},$$

可见满足要求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f_n(x)}{f(x)}\right|=0$. □

注 在 f 的定义中对于 $\max\{|f_1(x)|,\cdots,|f_{[x]}(x)|\}$ 还要加上 1, 这样可以保证对于任何 $\{f_n(x)\}$, 所构造的 $f(x)$ 都满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

§1.7 函数的连续性 (习题 662–758)

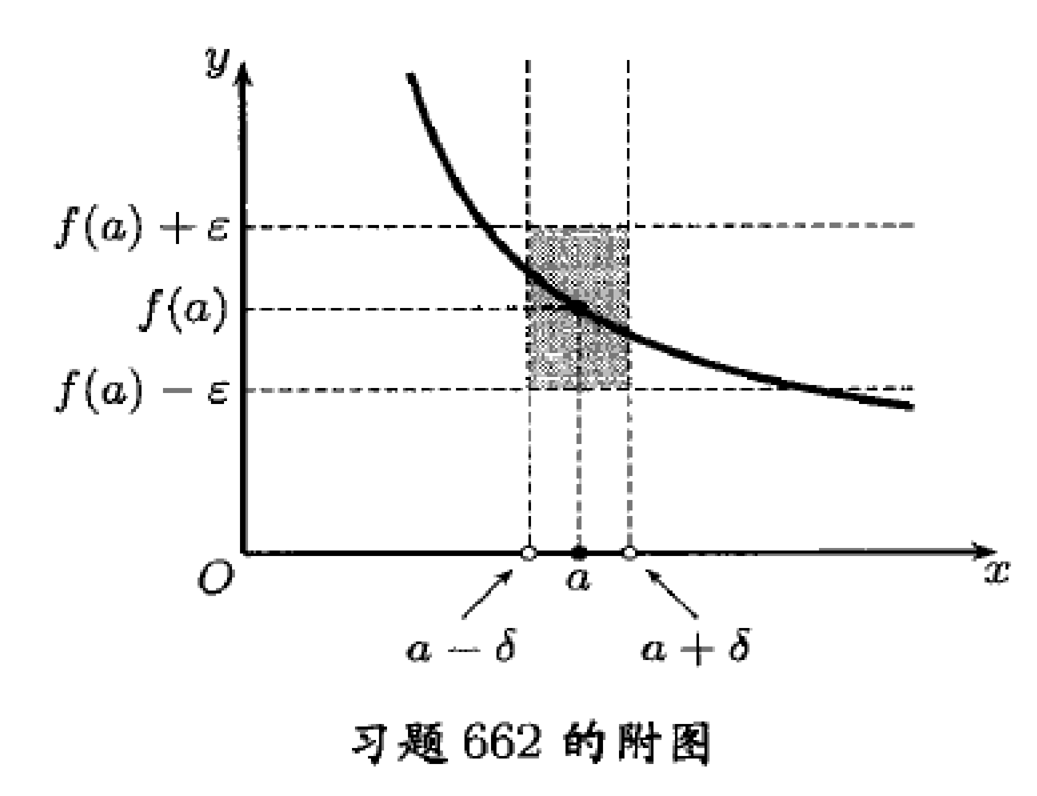
内容简介 连续函数是数学分析中最重要的函数类. 本节在函数极限的基础上为连续性概念、不连续点 (即间断点) 分析直到连续函数的局部性质和整体性质提供了大量的习题. 本节与后面的 §1.9 一起构成学习连续函数的主要模块.

有几个较难的习题放在最后的补注小节中讨论.

1.7.1 连续性的定义 (习题 662–674)

连续性可以说是在数学分析中最为直观和最容易接受的数学概念之一. 本节的第一个习题就从几何直观开始.

习题 662 给定连续函数 $y = f(x)$ 的图像, 对给定的点 a 和数 $\varepsilon > 0$, 用几何方式指出存在数 $\delta > 0$, 使得当 $|x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.



习题 662 的附图

解 如附图所示, 在其定义域上处处连续的函数的图像是一条 (在通俗意义上) 连续而不间断的曲线. 下面观察函数 f 在点 $x = a$ 处的连续性的几何意义.

为此先解释连续性定义中的两个不等式的几何意义. 不等式 $|x - a| < \delta$ 即 $a - \delta < x < a + \delta$, 几何上就是要求点 $(x, f(x))$ 落在两条平行的垂直线 $x = a - \delta$ 和 $x = a + \delta$ 之间.

同样不等式 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 就是要求点 $(x, f(x))$ 落在两条平行的水平直线 $y = f(a) - \varepsilon$ 和 $y = f(a) + \varepsilon$ 之间.

于是 f 在点 a 的连续性的几何意义就如附图所示, 即在给定了上述两条水平直线 $y = f(a) \pm \varepsilon$ 之后, 是否存在以点 $(a, f(a))$ 为中心的一个矩形 (在图中的灰色长方块), 使得曲线 $y = f(x)$ 从左右两侧穿过这个矩形. 这个矩形的左右两边的方程就是 $x = a \pm \delta$.

从几何上看这样的矩形显然存在, 至少只要取 δ 充分小时总能满足条件. 还可以看出, 如果曲线在点 $(a, f(a))$ 邻近比较“平坦”, 则 δ 可以取得大些; 而当曲线在该点邻近很“陡峭”时, 则 δ 可能要取得相当小才能使得曲线穿过矩形的左右两边, 而不是穿过矩形的上下两边.

用数学语言来说, 即当 $a - \delta < x < a + \delta$ 时, 要求点 $(x, f(x))$ 属于集合

$$\{(x, y) \mid |x - a| < \delta, |y - f(a)| < \varepsilon\}. \quad \square$$

注 仅仅看以上一张图是不够的. 建议初学者用 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在点 $x = a \neq 0$ 的各种情况自己作图以观察对于不同的 $\varepsilon > 0$ 如何 (从几何上) 寻找合乎要求的 $\delta > 0$. 此外还

需要对于不连续点的情况 (例如符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 在点 $a=0$ 处) 作图, 以观察为什么这时对于充分小的 ε 来说, 满足上述几何要求的 $\delta>0$ 是不存在的.

下一题我们从分析上来解答, 但实际上其中的每一步也有几何背景.

习题 667 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $\varepsilon=0.001$, 对点 $x_0=0.1, 0.01, 0.001, \cdots$, 分别求最大的正数 $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立.

是否可以对 $\varepsilon=0.001$, 取这样的 $\delta>0$, 使得对区间 $(0,1)$ 上所有的 x_0 都合适, 也就是, 对任意的 $x_0\in(0,1)$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$?

解　从 $x_0=0.1$ 开始. 将绝对值不等式改写为等价的两个不等式:

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{0.1}\right|<0.001 \iff 10-0.001<\frac{1}{x}<10+0.001,$$

就可以解出

$$\frac{1}{10.001}\approx 0.099\,99<x<\frac{1}{9.999}\approx 0.100\,01.$$

由于左右两点到 $x_0=0.1$ 的距离分别为

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{10.001}=\frac{1}{100\,010},\quad \frac{1}{9.999}-\frac{1}{10}=\frac{1}{99\,990},$$

因此对于 $x_0=0.1$ 和 $\varepsilon=0.001$ 的最大可能的 δ 是上述两个数中较小的那一个, 即有

$$\delta(0.001, 0.1)=\frac{1}{100\,010}\ (\approx 10^{-5}).$$

代替对于 $x_0=0.01, 0.001$ 等的讨论, 我们考虑对于任意点 $x_0>0$ 的答案, 它不仅可以解决 x_0 为上述两个点的情况, 还可以复核一下一般答案在 $x_0=0.1$ 时与上面的答案是否相同. 其中 $\varepsilon=0.001$ 不变.

这时只要求解以下两个不等式

$$\frac{1}{x_0}-0.001<\frac{1}{x}<\frac{1}{x_0}+0.001,$$

于是可解出

$$\frac{1\,000x_0}{1\,000+x_0}<x<\frac{1\,000x_0}{1\,000-x_0}.$$

最后得到

$$\delta=\min\left\{x_0-\frac{1\,000x_0}{1\,000+x_0}, \frac{1\,000x_0}{1\,000-x_0}-x_0\right\}=\frac{x_0^2}{1\,000+x_0}.$$

对于 $x_0=0.1$ 就得到上面已有的结果. 对于 $x_0=0.01$ 和 0.001 则有

$$\delta(0.001, 0.01)=\frac{0.000\,1}{1\,000.01}=\frac{1}{10\,000\,100}\approx 10^{-7},$$

$$\delta(0.001, 0.001)=\frac{0.000\,001}{1\,000.001}=\frac{1}{1\,000\,001\,000}\approx 10^{-9}.$$

最后, 从上述 (对于 $x_0>0$ 得到的) δ 的表达式可以看出, 在 $\varepsilon=0.001$ 时, 要求同时对所有点 x_0 适用的正数 δ 是不存在的. 实际上这时有

$$\delta=\frac{x_0^2}{1000+x_0}\sim 0.001x_0^2\ \ (x_0\to+0),$$

它是二阶无穷小量. 当 x_0 充分小时, δ 将小于事先给定的任何正数.

当然也可以用反证法独立回答本题的后半题. 读者可以试试看. 这里从略. □

习题 668 用 ε–δ 语言, 正面论述下面的结论:

函数 $f(x)$ 在点 x_0 上有定义, 但在这一点处不连续.

解 不连续就是连续的否定. 因此本题就是要求对一个否定性的结论作出正面论述, 也就是在论述否定性的结论中不使用含有任何有否定意义的词汇.

这类问题在 §1.2 已经遇到, 这就是习题 87. 请读者参考本书中对此题的解答和该题后的注, 特别是其中提出的对偶法则. 有兴趣的读者可以参考 [23] 中专门为此而写的 §1.4.

利用对偶法则, 我们将连续和不连续分别正面表达如下:

$f(x)$ 在点 x_0 连续:

$\iff$ 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 x 满足 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

$f(x)$ 在点 x_0 不连续 (假定 f 在点 x_0 有定义):

$\iff$ 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对任意 $\delta > 0$, 存在 x 满足 $|x - x_0| < \delta$, 但却有 $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$.

由于对偶法则在反证法中往往会用到, 希望读者重视. □

接下来的一组题完全是概念性的题, 它们对于真正理解连续性概念很有帮助. 读者可以将它们作为测试题来使用, 即看自己是否明白了连续性概念的真正意义. 下面主要是用普通语言对问题进行分析, 供读者参考.

习题 669 设对某一些数 $\varepsilon > 0$ 可以找到相应的数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

如果

(a) 数 ε 组成一个有限集合;

(b) 数 ε 组成二进制分数 $\varepsilon = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 的无限集合,

那么是否可以判断函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是连续的?

解 (概要) (a) 不能. 因为在连续性定义中的 $\varepsilon > 0$ 必须要能够取到任意小, 仅仅有限个 $\varepsilon > 0$ 是不够的.

(b) 可以. 因为任意给定一个 $\varepsilon > 0$ 之后, 只要取充分大的正整数 n, 就能够满足 $0 < \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$. □

习题 670 已知函数

$$f(x) = x + 0.001[x].$$

证明, 对每一个 $\varepsilon > 0.001$, 可以选取一个 $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, 使得当 $|x' - x| < \delta$ 时有 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, 而当 $0 < \varepsilon \leqslant 0.001$ 时则不能对一切 x 作如此选取.

在哪些点上这个函数的连续性被破坏了?

分析 由于给定的函数很容易从几何上观察, 因此还是先回答最后一个问题为好.

从取最大整数函数 $[x]$ 的定义知道，其图像是在每个长度为 1 的区间 $[n, n+1)$ (其中 n 取所有整数) 上等于 n 的分段常值函数 (见 §1.7.2 中的习题 685 的附图). 于是每个整数点 $x=n$ 都是函数 $y=[x]$ 的不连续点，其跳跃度 (即该点的右极限减去左极限) 为 1. 将它乘以 0.001 再加到直线 $y=x$ 上去 (参见附录一的习题 330(a) 的图像叠加运算)，显然原有的不连续点仍然是不连续点，只是跳跃度减小为 0.001.

于是就容易理解当 $\varepsilon > 0.001$ 时，对于每个点 x，只要 $\delta > 0$ 充分小，就可以使得当 $|x'-x| < \delta$ 时满足 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.

反之，若 $0 < \varepsilon \leqslant 0.001$，则对于 x 为整数的点来说，这样的 $\delta > 0$ 是不存在的. 但是对于所有其他的点 x，由于 f 在该处连续，因此仍然存在这样的 δ. □

习题 671 设对每一个足够小的数 $\delta > 0$，都存在 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$，当 $|x - x_0| < \delta$ 时便有不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 由此能否推出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是连续的? 用上述不等式可以描述函数 $f(x)$ 的什么性质?

分析 这就是说将连续性定义中的前两句话中的 ε 和 δ 的地位对换，即由 δ 来确定 ε，其余不变，判断它是否还是连续性的定义.

只要注意到原来给定的任意 $\varepsilon > 0$ 的关键之处是它可以取到任意小 (见前面的习题 669)，而目前这样修改之后，只要存在即可，由此可见这与连续性定义毫无关系.

例如，对于前面提到的跳跃度为 1 的取最大整数函数 $y = [x]$，只要取 $\varepsilon = 2$，就适用于一切 $\delta > 0$ 和 x_0 了. 特别是对于满足 $|f(x)| < M$ 的任意有界函数，只要取 $\varepsilon = 2M$，则 $|f(x) - f(x_0)| < 2M$ 对任何 x, x_0 都一定成立，连 $\delta > 0$ 是否足够小和 $|x - x_0| < \delta$ 也无需考虑.

因此这样改动之后根本不是连续性的定义.

那么这样修改后的定义描述了函数的什么性质呢? 从前面的 $f(x) = [x]$ 可见不是有界性. 可以看出，这个定义表明，对于点 x_0，存在一个邻域，使得该函数在这个邻域上有界，也就是函数在点 x_0 处局部有界. □

习题 672 设对每一个数 $\varepsilon > 0$，都存在这样的数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$，只要 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，便有 $|x - x_0| < \delta$. 由此能否推出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是连续的? 这些不等式描述了函数 $f(x)$ 的什么性质?

分析 这是从对于函数值的限制来导出对自变量的限制. 它当然不是什么连续性的定义. 例如前面的函数 $y = [x]$，若 $0 < \varepsilon < 1$，则统一取 $\delta = 1$ 就满足要求了. 对更大的 ε 也能够取到相应的 δ (请读者验证).

那么这究竟描述了 f 的什么性质呢? 首先可以看出，这表明在 f 的值域中的点 $f(x_0)$ 的每个邻域的原像是有界集. 这在 f 的定义域有界时是多余的话. 若 f 的定义域无界，则当 $|x - x_0| \geqslant \delta$ 时有 $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. 由于 $\varepsilon > 0$ 可取为任意大的正数，可见这就是 $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$. □

习题 673 设对每一个 $\delta > 0$, 存在数 $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得只要 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 便有 $|x - x_0| < \delta$. 由此能否推出 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是连续的? 这些不等式描述了函数 $f(x)$ 的什么性质?

考察例子:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x, & x \text{ 为有理数}; \\ \pi - \arctan x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

分析 容易看出, 在 f 的值域中 $f(x_0)$ 的原像是唯一的. 否则, 如有 $x_1 \neq x_0$, 使得 $f(x_1) = f(x_0)$, 则只要取 $0 < \delta < |x_1 - x_0|$ 就找不到合乎要求的 ε.

但这不是函数 f 在点 x_0 处连续的条件. 例如, 符号函数 $\operatorname{sgn}(x)$ 在其不连续点 $x_0 = 0$ 处就满足这样的条件. 无论对什么 $\delta > 0$, 只要取 $0 < \varepsilon < 1$, 就使得当 $|\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)| < \varepsilon$ 时, 只可能有 $x = 0$, 因此当然满足要求.

那么这样修改后的条件有什么意义呢?

如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内存在反函数 $x = f^{-1}(y)$, 则上述修改后的条件就表明这个反函数在点 $y_0 = f(x_0)$ 处连续.

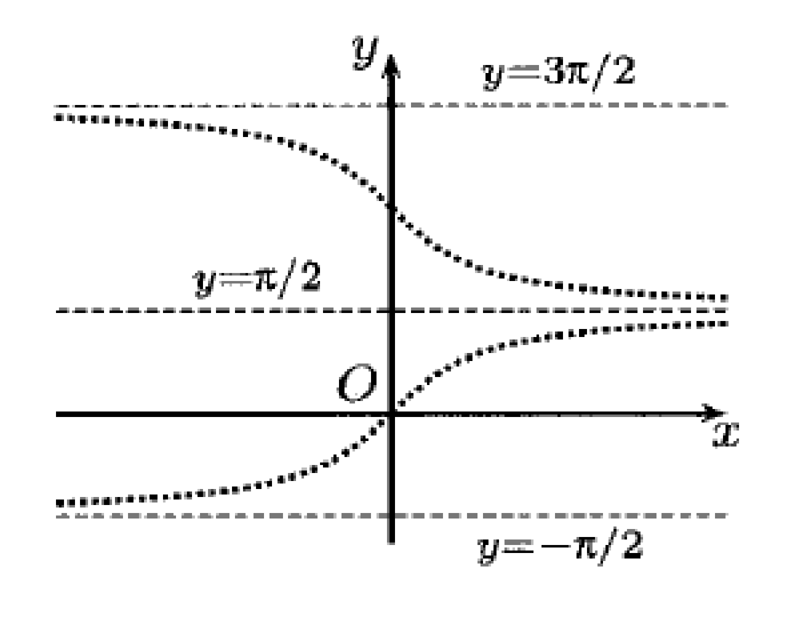
然而这样的反函数未必存在. 举个例子. 将习题 302 中的函数 (参见附录一中该题的图像) 改造一下, 定义

$$f(x) = \begin{cases} x\left(2 + \sin \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

则在点 $x = 0$ 处就满足上述修改后的条件. 但可以 (用微分学很容易) 证明, 这个 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的每一侧的任意邻近都不是单调函数, 反函数不存在.

若允许考虑多值的反函数, 又将连续性定义推广, 则上述修改后的条件就表明多值反函数在点 $y = f(x_0)$ 处连续. (这个多值反函数 f^{-1} 在 $y_0 = f(x_0)$ 处是单值的.)

在习题 673 中作为例子提出的一个函数则说明了不同的问题. 从其定义可见, 该函数的定义域是整个实数轴, 然而其值域就相当复杂. 从 f 的定义来说, 它由两个不交的集合组成. 第一个集合是 $\arctan x$, 其中 x 取所有有理数. 第二个集合是 $\pi - \arctan x$, 其中 x 取所有无理数. 在右边的附图中作出了该函数的图像, 其中的两条曲线只是示意图. 它们都不是“连续”曲线, 而是由处处稠密的无限多个离散的点组成的.



习题 673 中一个例子的附图

由于 f 实现了定义域到值域的一一对应, 因此存在反函数, 从而满足本题中修改后的条件, 这就是说这个反函数处处连续. 只不过由于这个反函数的定义域是在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 内的处处稠密却不含有任何一个区间的集合, 因此这样的连续性与我们的直观概念是完全不同的. □

习题 674 含有 8 个小题, 内容是证明一些简单函数的连续性. 下面只给出其中最后一题的解答.

习题 674 (h) 用 ε–δ 语言证明函数 $\arctan x$ 的连续性.

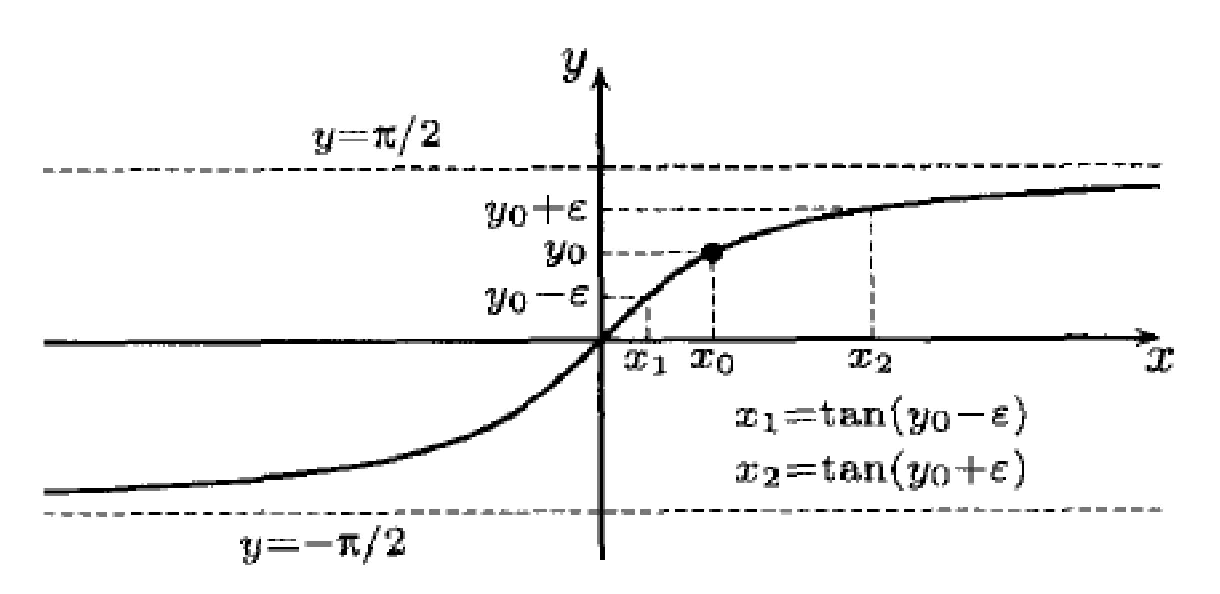
解 1 利用 $y = \arctan x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上为严格单调递增函数, 且有 $y(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$, 则可证明如下 (参看附图).

任取 x_0, 记 $y_0 = \arctan x_0$. 不妨取 $\varepsilon > 0$ 已充分小, 使得邻域 $O_\varepsilon(y_0) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 也就是有

$$-\frac{\pi}{2} < y_0 - \varepsilon < y_0 < y_0 + \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

由于 $y = \arctan x$ 严格单调递增, 因此是 (x_1, x_2) 到 $O_\varepsilon(y_0)$ 的双射, 其中

$$x_1 = \tan(y_0 - \varepsilon), \quad x_2 = \tan(y_0 + \varepsilon).$$



习题 674(h) 的附图

于是只要取 $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$, 就保证当 $|x - x_0| < \delta$ 时有 $|\arctan x - \arctan x_0| < \varepsilon$. □

解 2 利用三角函数知识可以写出更为具体的结果. 首先, 从 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时成立 $|x| \leqslant |\tan x|$, 因此有 $|\arctan x| \leqslant |x|$. 这已经保证了 $y = \arctan x$ 在点 $x = 0$ 处连续, 按照定义只要对于 ε 取 $\delta = \varepsilon$ 即可.

现在考虑 $x_0 \neq 0$. 不妨先限制 x 满足 $|x - x_0| < |x_0|$, 于是 x 与 x_0 同号.

利用正切函数的差角公式, 就有

$$\tan(\arctan x - \arctan x_0) = \frac{x - x_0}{1 + xx_0}.$$

根据反正切函数的定义, 若 $|x - x_0| < \frac{\pi}{2}$, 则上式右边也小于 $\frac{\pi}{2}$, 因此就可得到

$$y - y_0 = \arctan x - \arctan x_0 = \arctan \frac{x - x_0}{1 + xx_0}.$$

记 $y_0 = \arctan x_0$, 于是对 $y = \arctan x$ 就有

$$|y - y_0| = \left|\arctan \frac{x - x_0}{1 + xx_0}\right| \leqslant \left|\frac{x - x_0}{1 + xx_0}\right| \leqslant |x - x_0|.$$

因此对于 $\varepsilon > 0$ 只要取 $\delta = \min\{|x_0|, \frac{\pi}{2}, \varepsilon\}$ 即可, 这样就证明了反正切函数处处连续. □

注 在一般的教科书中, 反正切函数的连续性可以用反函数的连续性定理推出. 这个定理是说, 在区间上有定义的严格单调连续函数的反函数存在且连续. 于是反正切函数的连续性归结为正切函数在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上的严格单调和连续性.

1.7.2 连续性分析与作图 (习题 675–733)

这里的习题是求出函数的不连续点并判定其类型, 然后再结合 §1.4 中的作图知识作出函数的图像.

下面只对部分习题给出答案供参考, 其中有常见的函数 $x\sin\dfrac{1}{x}$, $\operatorname{sgn} x$, $[x]$ 等.

习题 678 研究下列函数的连续性并画出它们的几何图形:

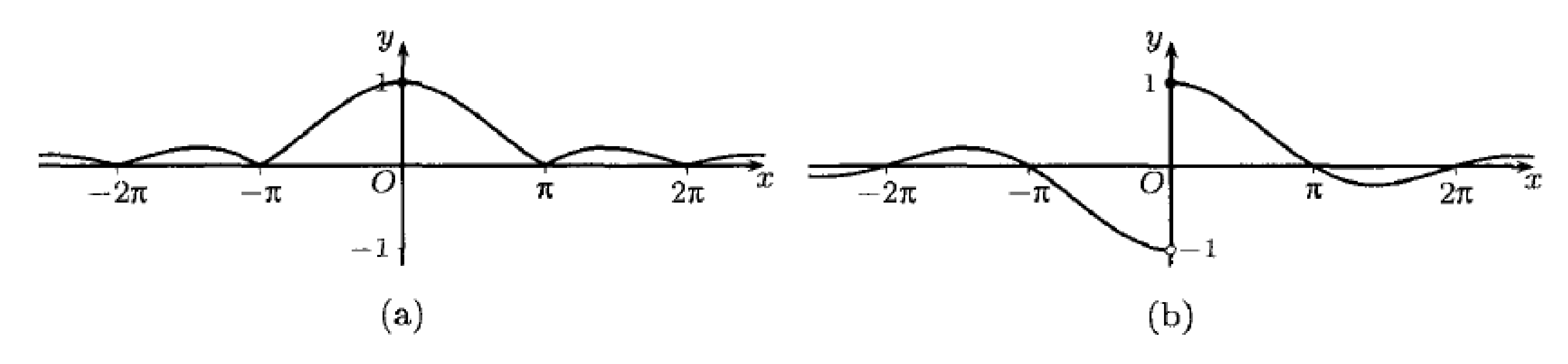
(a) 当 $x\neq 0$ 时 $f_1(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$, $f_1(0)=1$;

(b) 当 $x\neq 0$ 时 $f_2(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, $f_2(0)=1$.

解 参考 §1.4.2 中习题 304 的附图, 并利用极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 即可解答并作图如下.

(a) 利用 §1.7.3 的习题 746 (即从 f 连续推出 $|f|$ 连续) 就知道函数 f_1 处处连续.

(b) 同样可知在 $x\neq 0$ 时处处连续. 由于有 $f_2(+0)=1$, $f_2(0-)=-1$, 因此 $x=0$ 是第一类不连续点, 跳跃度为 2. □



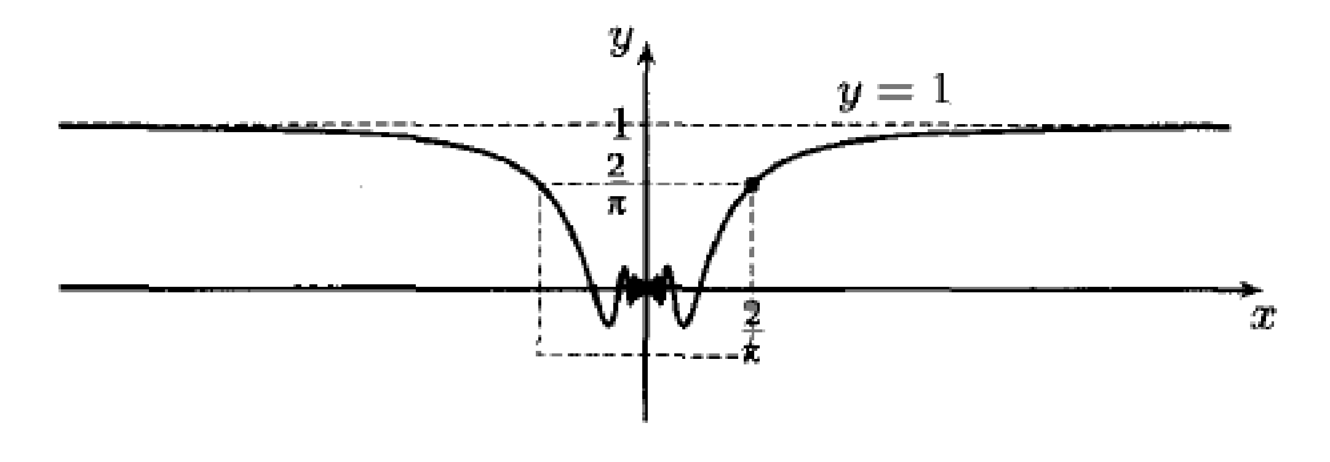
习题 678 的附图

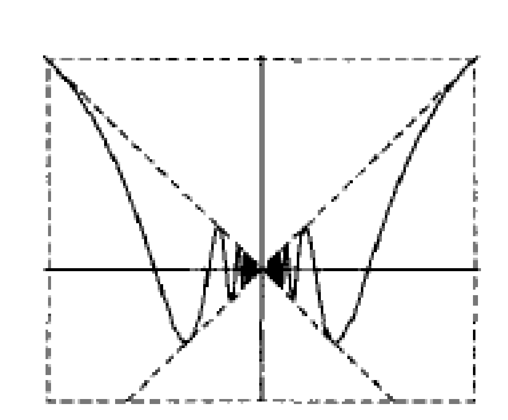
习题 680 研究下列函数的连续性并画出它的几何图形: 当 $x\neq 0$ 时 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $f(0)=0$.

解 这是在数学分析中的常用函数. 从定义可见 f 处处连续. 又从

$$\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$

可见有水平渐近线 $y=1$. □

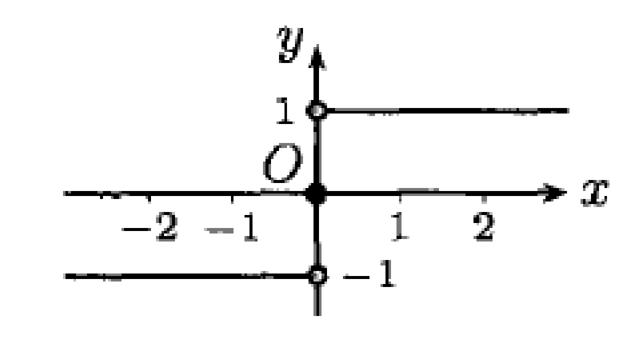




习题 680 的附图 (右分图是左边的图像在原点附近的放大)

习题 684 研究符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x$ 的连续性并画出它的几何图形:

解 根据定义 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 可见 $x=0$ 为第一类不连续点, 跳跃度为 2. □



习题 684 的附图

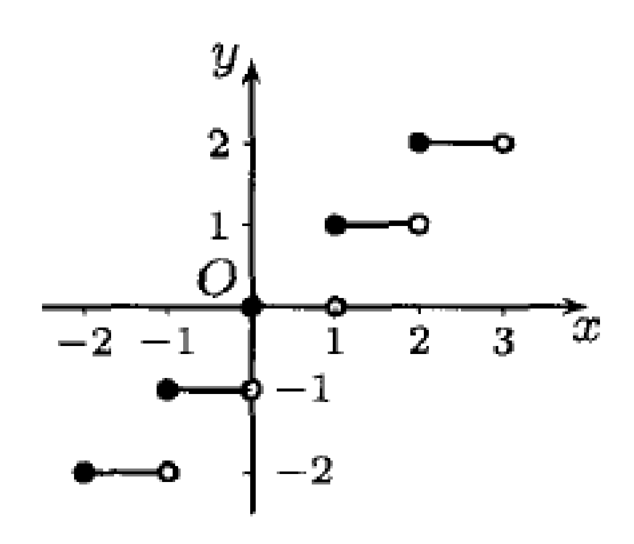
习题 685 研究取最大整数函数 $f(x)=[x]$ 的连续性并画出它的几何图形.

解 根据定义, $f(x)=[x]$ 是分段常值函数. 对于每一个整数 $n\in\mathbb{Z}$, 当 $x\in[n,n+1)$ 时, 有

$$f(x)=[x]=n.$$

由此可见 $f(x)=[x]$ 在任何非整数点上总是连续的.

对于 $x_0=n\in\mathbb{Z}$, 有 $f(n+0)=f(n)=n$, $f(n-0)=n-1$, 因此每一个整数点都是第一类不连续点, 右连续, 跳跃度为 1. □



习题 685 的附图

习题 690 求函数 $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$ 的不连续点, 并指出这些点的类型.

解 从定义可见, 除了 $x=0,1,-1$ 之外, 函数 $y(x)$ 都是连续的.

根据函数极限定义, 在讨论 $\lim\limits_{x\to a}y(x)$ 时自变量 $x\neq a$, 因此可以将函数的表达式简化为

$$y=\frac{\dfrac{1}{x(x+1)}}{\dfrac{1}{(x-1)x}}=\frac{x-1}{x+1}.$$

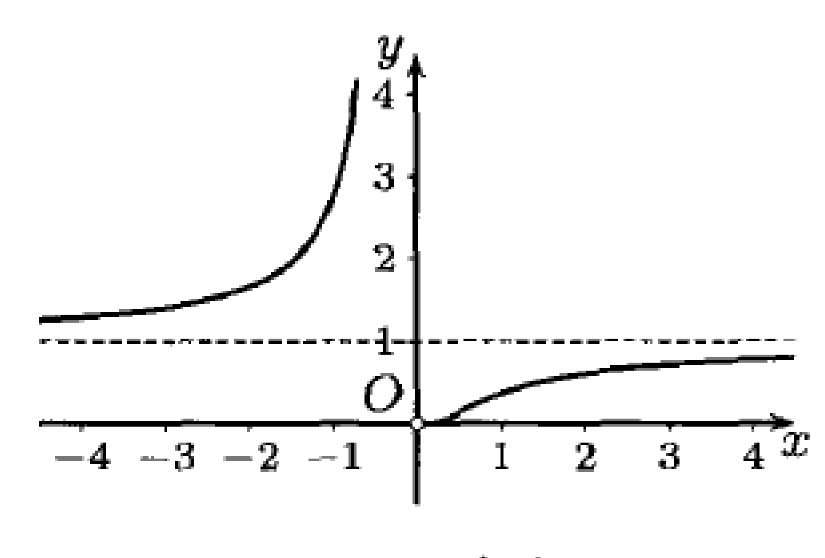
这样就可以得到

$$\lim_{x\to0}y=-1,\quad \lim_{x\to1}y=0,\quad \lim_{x\to-1}y=\infty.$$

这表明 $x=0,1$ 是第一类不连续点中的可去不连续点, 而 $x=-1$ 是第二类不连续点中的无穷大型不连续点. □

习题 717 研究函数 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ 的连续性并画出它的草图.

解 函数在 $x=0$ 没有定义. 由于 $\lim\limits_{x\to0-}y=+\infty$, 因此 $x=0$ 是第二类不连续点中的无穷型不连续点. 又求出 $\lim\limits_{x\to+0}y=0$, 以及 $\lim\limits_{x\to\infty}y=1$, 然后再考虑到函数 $y(x)$ 的单调性, 就可作出草图.



习题 717 的附图

若补充定义 $y(0)=0$, 则 $y(x)$ 在点 $x=0$ 处右连续. 如附图所示, $y=1$ 是水平渐近线. 函数在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别都是严格单调递增的. □

注 实际上, 本题的图像与附录一的习题 279(c) 的图像只差一个关于 y 轴的反射, 即只要将 x 换为 $-x$ 就可以得到. 此外, 在本题图像的 $x>0$ 部分还有一个不易察觉的拐点 $(\frac{1}{2}, \mathrm{e}^{-2}) \approx (0.5, 0.1353)$, 这在 §2.8 学习了函数的凹凸性后是容易计算的.

1.7.3 连续函数的局部性质 (习题 734–747, 749–750)

函数 f 在点 x_0 连续是函数的一种局部性质, 即只与函数在点 x_0 的任意小的邻域中的性态有关. 本小节收入 (除了上一小节中的不连续点分析之外) 只与连续函数的局部性质有关的一些习题.

下一个习题表明, 在习题 234 中引入的狄利克雷函数 (即在有理点处取 1 而在无理点处取 0 的函数) 虽然不是初等函数, 但只要利用极限运算就可以有分析表达式.

习题 734 证明, 对于狄利克雷函数

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} \{ \lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x) \},$$

每一个 x 值都是不连续点.

解 首先证明这里的狄利克雷函数定义与 §1.3.5 的习题 234 中的定义是一致的.

为清楚起见, 引入函数列 $u_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x)$, $m = 1, 2, \cdots$, 则就有 $\chi(x) = \lim\limits_{m\to\infty} u_m(x)$.

若 x 是无理数, 则对每一个正整数 m, 余弦函数的自变量 $\pi m! x$ 不可能是 π 的整数倍, 因此 $|\cos(\pi m! x)| < 1$. 于是只能得到 $u_m(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x) = 0$. 既然 $u_m(x) = 0$ 对每个 m 成立, 因此 $\chi(x) = \lim\limits_{m\to\infty} u_m(x) = 0$.

若 x 是有理数, 设 $x = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 都是整数, 且 $q > 0$. 这时考虑函数列 $\{u_m(x)\}$ 中下标 $m > q$ 的所有项. 由于这时的余弦函数的自变量 $\pi m! \cdot \frac{p}{q}$ 一定是 2π 的整数倍, 因此 $\cos(\pi m! \frac{p}{q}) = 1$. 于是有 $u_m(x) = 1$. 既然当 $m > q$ 时都有 $u_m(x) = 1$, 可见 $\chi(x) = 1$.

于是已经证明了本题的狄利克雷函数与习题 234 完全相同.

现在任取点 x_0. 由于在 x_0 的每一个邻域中一定同时存在有理数和无理数, 因此狄利克雷函数 $\chi(x)$ 在这个邻域中同时取到 0 和 1. 于是无论 x_0 是有理数还是无理数, 在它的任何邻域中一定有 x 使得 $|\chi(x) - \chi(x_0)| = 1$.

由此可见, 如果取 $\varepsilon < 1$, 就不可能存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时成立 $|\chi(x) - \chi(x_0)| < \varepsilon$. 因此 $\chi(x)$ 于点 x_0 不连续. 由于 x_0 可以是任何一个点, 因此已经证明了狄利克雷函数处处不连续. □

习题 735 研究函数 $f(x) = x\chi(x)$ 的连续性, 其中 $\chi(x)$ 是狄利克雷函数 (见上题), 并作出这个函数的草图.

注 这里只给出答案, 即函数 f 只在点 $x=0$ 处连续, 而在所有其他点处都不连续. 请读者完成其证明并作出草图.

重要的是这个习题给出了仅仅在一个点处连续的函数. 请读者考虑如何构造出恰好在有限个指定点处连续而在所有其他点都不连续的函数. 如果你能够作出这样的函数, 那么学习习题 735 的目的就达到了.

习题 736 证明, 黎曼函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},\ n,m \text{ 为互素整数, 且 } n>0,\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

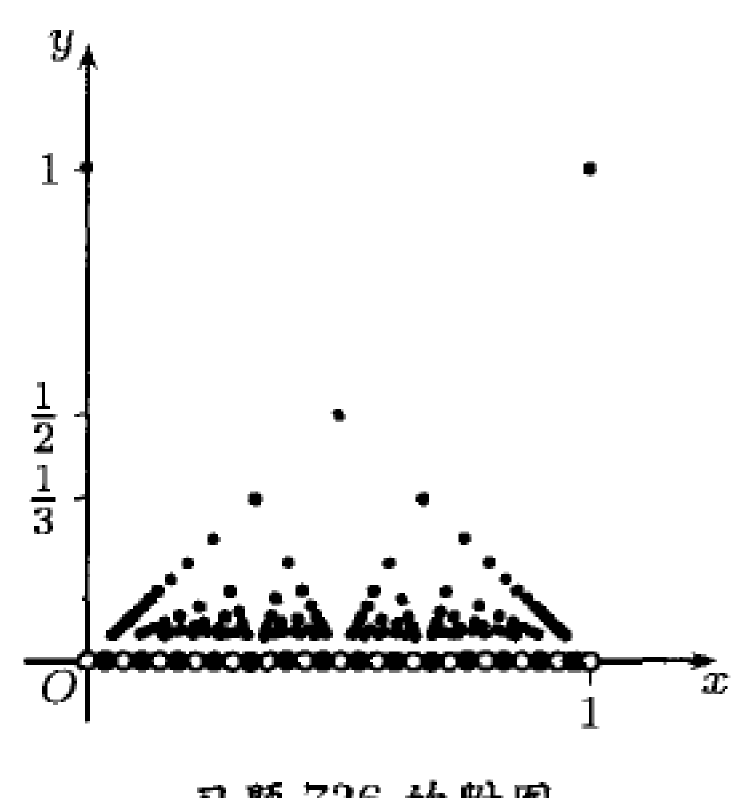
在每一个有理点 x 处都是不连续的, 而在每一个无理点 x 处都是连续的. 作出这个函数的草图.

注 黎曼函数与狄利克雷函数一样都是在数学分析教科书中的重要例题, 它们可以用来说明很多问题. 黎曼函数在西文文献中还有许多其他名称, 例如 Thomae 函数, popcorn 函数, raindrop 函数和 ruler 函数等. 它已经出现在 §1.5.7 的习题 607 的例子中. 此外, 它与 §1.5 的第一个习题 381 从内容到证明都有相似之处.

分析 取定一个有理点 $x_0=\dfrac{m}{n}$, 其中 m,n 为互素的整数, $n>0$, 这时有 $f(x_0)=\dfrac{1}{n}$. 由于在点 x_0 的任何一个邻域中有无理点 x 使得 $f(x)=0$, 因此 $|f(x)-f(x_0)|=\dfrac{1}{n}$. 于是对于满足条件 $0<\varepsilon<\dfrac{1}{n}$ 的 ε 就不可能存在连续性定义中所要求的 $\delta>0$. 由此可见黎曼函数在有理点处一定不连续. 但为了知道这些不连续点的类型, 又为了讨论 $f(x)$ 在无理点处是否连续, 则还需研究在每个 x_0 处的 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

如附图所示作出了区间 $[0,1]$ 上的黎曼函数的示意图 (黎曼函数是周期为 1 的周期函数).

由于不可能作出精确的图像, 这里采用两种示意方式: (1) 在 x 轴上用黑点表示无理点, 这时 $f(x)=0$, 又用白点表示有理点, 这时 $f(x)>0$; (2) 对于 $[0,1]$ 中的有理点 $x=\dfrac{m}{n}$, 作出了 $1\leqslant n\leqslant 20$ 的所有点 $(x,f(x))$ (分母 n 更大的情况已经超出了该图允许的分辨率).



习题 736 的附图

不难看出, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 图像中满足 $f(x)\geqslant\varepsilon$ 的点 x 在 $[0,1]$ 中是不多的. 对于它们的准确分析就可以证明对每一个点 x_0 都有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. 由于在无理点 x_0 处 $f(x_0)=0$, 因此 f 于无理点处连续.

解 只要证明对每个点 x_0, 无论它是有理点还是无理点, 都有极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, 从而就知道黎曼函数的所有不连续点恰好就是有理点全体, 而且都是可去不连续点.

在点 x_0 的半径为 1 的去心邻域

$$O_1(x_0)-\{x_0\}=(x_0-1,x_0)\cup(x_0,x_0+1)$$

中, 对于给定的 $0<\varepsilon<1$, 考虑不满足 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 的那些 n. 由于 $\frac{1}{n}\geqslant\varepsilon$ 等价于

$$0<n\leqslant\frac{1}{\varepsilon},$$

于是这样的正整数 n 只能是 $1,2,\cdots,[\frac{1}{\varepsilon}]$ 中之一. 而在上述去心邻域中具有这样的分母的既约分数 $\frac{m}{n}$ 只可能是有限多个. 将它们全体记为

$$x_1,x_2,\cdots,x_l,$$

然后取

$$\delta=\min\{1,|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\cdots,|x_l-x_0|\}>0,$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 若 $x\in\mathbb{Q}$, 则 $x=\frac{m}{n}$ 中的分母 n 满足

$$n\geqslant[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon},$$

从而成立

$$|f(x)-0|=f(x)=\frac{1}{n}<\varepsilon;$$

若 $x\notin\mathbb{Q}$, 因 $f(x)=0$, 上述不等式当然也成立. 因此得到 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$. □

习题 737 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx}{n+1}, & x=\dfrac{m}{n},\ n,m\ \text{为互素整数, 且}\ n\geqslant 1,\\ |x|, & x\ \text{为无理数}\end{cases}$$

的连续性, 并作出这个函数的草图.

解 这里可以模仿上一题的证明 (模仿法), 也可以将本题归结为上一题来做 (归结法). 下面采取第二个方法.

对于 $x_0<0$ 的情况, 由于在它的任意小邻域中的有理点处的函数值小于 0, 而无理点处的函数值大于 0, 且接近 $|x_0|$, 因此 f 在点 x_0 处不连续 (这里请读者补充细节).

又可以从 f 的定义直接看出有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, 因此以下只需要讨论 $x>0$ 时是否连续.

在区间 $(0,+\infty)$ 上定义与前面的黎曼函数非常相似的一个辅助函数如下:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & x=\dfrac{m}{n},\ n,m\ \text{为互素的正整数},\\ 0, & x\ \text{为正无理数},\end{cases}$$

则在 $x>0$ 的范围内就可以将本题的函数 f 用 g 表出如下:

$$f(x)=x\,(1-g(x))=x-xg(x).$$

由于 g 与黎曼函数非常相似, 不难用模仿法证明 g 在每个点 $x_0>0$ 处存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ ①. 然后从 f 的上述表达式就知道对每一个 $x_0>0$ 存在极限

① 也可以用归结法, 记黎曼函数为 $R(x)$, 则在 $x>0$ 时处处成立夹逼关系 $0\leqslant g(x)\leqslant R(x)$, 对 $x_0>0$ 令 $x\to x_0$ 即得到 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0.$$

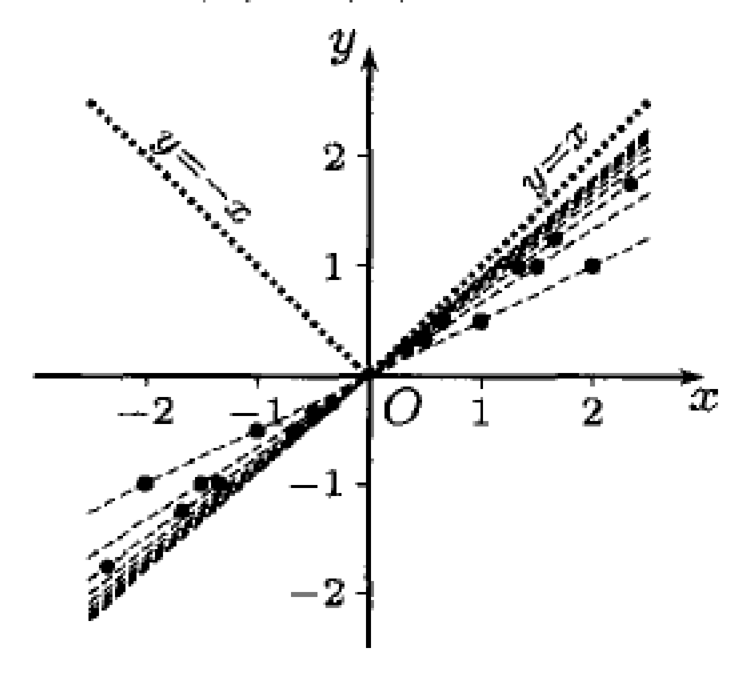
这样就推出 f 在每个正有理点处有可去不连续点, 而在每个无理点处连续.

下面结合 f 的图像作进一步说明.

如附图所示, 占据 $y=|x|$ 位置的点线代表 x 为无理点时的 $f(x)=|x|$.

在一、三象限的一系列虚线是 $y=\dfrac{n}{n+1}x$, 其中只画出 n 从 1 取到 10 的虚线. 当 x 为有理点 $x=\dfrac{m}{n}$ 时, f 的图像上的点 $(x, f(x))$ 就落在这些虚线上, 并用小黑圆点表示. 为了清楚起见, 只作出了分母 $n=1,2,3$ 的几个点.

参考黎曼函数的讨论及其附图, 可见随着 $x=\dfrac{m}{n}$ 中的分母 n 的增大, 与有理点 x 对应的点 $(x, f(x))$ 越来越密集地聚集到直线 $y=x$ $(x>0)$ 的一侧.



习题 737 的附图

从附图容易理解在 $x_0<0$ 时 f 在该点不连续. 实际上, 在 x_0 的充分小的邻域中, $f(x)$ 的图像既能够取到第二象限中 $y=-x$ 上的点, 同时又能够取到第三象限中的点. 因此 f 在 $(-\infty, 0)$ 上处处不连续. 同理还可以看出, 这时在每一个点 x_0 处的两个单侧极限都不存在, 因此是第二类不连续点.

在 $x_0=0$ 处如前所说已知 f 连续.

在 $x_0>0$ 时, 无论它是有理点还是无理点, 都有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=x$, 因此 f 在正无理点处连续, 而在正有理点处为可去不连续点. □

下面两个习题是对于连续性的四则运算法则的很好的练习题, 也与 §1.2 中关于数列的习题 127–130 相对应. 在上一个习题 737 中引入辅助函数 g 之后讨论 f 时, 实际上就利用了这样的联系.

习题 741 在下列情形下, 两个函数的和 $f(x)+g(x)$ 在给定的点 x_0 处是否一定是不连续的?

(a) 在 $x=x_0$ 处函数 $f(x)$ 连续, 而函数 $g(x)$ 不连续;

(b) 在 $x=x_0$ 处函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是不连续的.

分别举例加以说明.

解 (a) 这时 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处一定不连续. 实际上, 只要用反证法. 若 $f(x)+g(x)$ 于 x_0 处连续, 则从

$$g(x) = [f(x)+g(x)] - f(x)$$

可见, 由于右边两个函数于点 x_0 处连续, 因此它们的差 $g(x)$ 也于 x_0 处连续, 引出矛盾.

(b) 不一定. 例如设 $f(x)$ 于点 x_0 处不连续, 取 $g(x)=-f(x)$, 则它也在 x_0 处不连续, 但是 $f(x)+[-f(x)]\equiv 0$, 当然在 x_0 处连续.

另一方面, 若 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 令 $g(x)=f(x)$, 则 $f(x)+g(x)=2f(x)$, 它与 $f(x)$ 同样在 x_0 处不连续. □

注 在 (b) 的讨论中两次利用了同一个命题, 即对于不等于 0 的常数 C, $f(x)$ 和 $Cf(x)$ 在任何点同时连续或不连续.

习题 742 在下列情形下, 两个函数的积 $f(x)\cdot g(x)$ 在给定的点 x_0 处是否一定是不连续的?

(a) 在 $x=x_0$ 处函数 $f(x)$ 连续, 而函数 $g(x)$ 不连续;

(b) 在 $x=x_0$ 处函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是不连续的.

分别举例加以说明.

解 (a) 若 $f(x_0)\neq 0$, 则 $f(x)g(x)$ 于 x_0 处一定不连续. 用反证法. 若 $f(x)g(x)$ 于 x_0 连续, 则这时下列等式至少在点 x_0 的一个邻域上成立:

$$g(x)=\frac{f(x)g(x)}{f(x)}.$$

然后利用连续性的除法法则可见左边的函数 $g(x)$ 在 x_0 处也连续, 引出矛盾[①].

但是与习题 741(a) 不一样, 若 $f(x_0)=0$, 则 $f(x)\cdot g(x)$ 在 x_0 处不一定是不连续的.

例如, 若 $f(x)\equiv 0$, 则 $f(x)g(x)\equiv 0$, 当然在 x_0 处连续.

又如, 设 $f(x)=x$, $x_0=0$, $g(x)$ 在 $x\neq 0$ 时为 $\frac{1}{x}$, 而 $g(0)=0$, 则 $f(x)g(x)$ 在 $x\neq 0$ 时恒等于 1, 但却有 $f(0)g(0)=0$, 因此在 $x=0$ 处不连续.

注 利用 $o(1)O(1)=o(1)$ $(x\to x_0)$ 可见, 最后一种情况只能是 $g(x)$ 于点 x_0 处局部无界时才会发生.

(b) 不一定.

例如取 $f(x)=g(x)=\operatorname{sgn}(x)$, 则在 $x=0$ 处不连续, 同时 $f(x)g(x)$ 也是如此.

又如取 $f(x)$ 在 $x>0$ 时等于 1, 在 $x\leqslant 0$ 时为 0, 而 $g(x)=f(-x)$, 则它们都在 $x=0$ 处不连续, 但是 $f(x)g(x)\equiv 0$, 当然在 $x=0$ 处连续. □

下一个简单习题中的结论也是经常使用的基本事实, 我们只作一些分析, 将正式写出解答的任务留给读者.

习题 746 证明, 如果 $f(x)$ 是连续函数, 那么 $F(x)=|f(x)|$ 也是连续函数.

分析 只要对于 f 的定义域中的每一点 x_0 证明

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\Longrightarrow \lim_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|,$$

这与 §1.2 的习题 91 相同, 只要利用习题 21(a) 中的不等式 $|x-y|\geqslant \big||x|-|y|\big|$ 即可.

此外, 要注意本题的逆命题不成立. 例如将狄利克雷函数稍加改造得到的下列函数

$$f(x)=\chi(x)-\frac{1}{2},$$

它仍是处处不连续的函数, 但 $|f(x)|$ 却是恒等于 $\frac{1}{2}$ 的常值函数, 当然处处连续. □

① 在习题 737 的讨论中当 $x>0$ 时, 也可以由此推出 $g(x)$ 的不连续点一定也是 $f(x)=x(1+g(x))$ 的不连续点.

习题 747 证明, 如果函数 $f(x)$ 是连续的, 那么函数 $f_c(x)=\begin{cases}-c, & f(x)<-c,\\ f(x), & |f(x)|\leqslant c,\\ c, & f(x)>c\end{cases}$ 也是连续的, 其中 c 为任意正数.

f_c 的图像与 f 的图像有明显的几何关系, 也就是将 f 的图像中处于 $y=c$ 以上的部分用 $y=c$ 代替, 同时将其处于 $y=-c$ 以下的部分用 $y=-c$ 代替.

附录一中的习题 356 的图像为此提供了一个实例, 其中 $c=1$, $f(x)=2\sin x$.

解 1 只需要对每一个点 x_0 来证明. 这可以分成几种情况来讨论.

若 $f(x_0)>c$, 则利用 f 在点 x_0 处连续, 存在 $\delta>0$, 使得在邻域 $O_\delta(x_0)$ 上仍然成立 $f(x)>c$. 于是在这个邻域上 $f_c(x)\equiv c$, 可见 f_c 在点 x_0 处连续. 对于 $f(x_0)<-c$ 的讨论是类似的, 从略.

若 $|f(x_0)|<c$, 则利用 f 在点 x_0 处连续, 存在 $\delta>0$, 使得在邻域 $O_\delta(x_0)$ 上仍然成立 $|f(x)|<c$. 于是在这个邻域上 $f_c(x)\equiv f(x)$, 可见 f_c 也在点 x_0 处连续.

若 $f(x_0)=c$, 则对 $0<\varepsilon<c$ 存在 $\delta>0$, 使得在邻域 $O_\delta(x_0)$ 上成立不等式

$$0<c-\varepsilon=f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon<c+\varepsilon.$$

考虑在 $O_\delta(x_0)$ 上的 f_c. 这时有 $f_c(x_0)=c$, 且按照定义知道其中的 $f_c(x)$ 或者等于 $f(x)$, 或者等于 c, 因此成立不等式

$$0<f_c(x_0)-\varepsilon=c-\varepsilon<f_c(x)<c+\varepsilon=f_c(x_0)+\varepsilon.$$

也就是 $|f_c(x)-f_c(x_0)|<\varepsilon$. 因此 f_c 于点 x_0 处连续. 同样可以证明当 $f(x_0)=-c$ 时 f_c 也在点 x_0 处连续. 从略. □

根据 f_c 与 f 图像的几何关系, 可以从 $c,-c,f(x)$ 通过取最大最小运算来得到 f_c. 这样就提供了第二种解法.

解 2 先验证从 f 到 f_c 可以如下实现:

$$f_c(x)=\max\{\min\{c,f(x)\},-c\},$$

于是本题的结论可以从下面的习题 749 得到. □

更不容易想到的是从 f 到 f_c 的运算可以用绝对值运算和四则运算的组合来实现. 这就是以下第三种解法.

解 3 先验证习题中的函数 f_c 可以如下表达[①]:

$$f_c(x)=\frac{1}{2}\big[\,|f(x)-(-c)|-|f(x)-c|\,\big],$$

于是本题的结论可以从前面的习题 746 得到. □

注 本题还有如下推广.

① 取定 $x=x_0$, 在坐标平面上观察在直线 $x=x_0$ 上的三个点 $f(x_0),-c,c$, 则就可以看出这个公式的几何意义是 $f(x_0)$ 到 $-c$ 的距离减去 $f(x_0)$ 到 c 的距离后除以 2.

设在同一定义域 I 上给定三个连续函数 f_1, f_2, f_3, 然后对每个 $x \in I$, 定义一个新的函数 f, 它的值 $f(x)$ 取为 3 个数值 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 中处于中间的那个值, 在其中有相等时就取这个相等的值, 可以证明这样得到的函数 f 在 I 上连续.

实际上习题 747 中的 f_c 就是在 $c, f(x), -c$ 中按照取中间数原则确定的函数, 因此是上述推广的一个特例.

习题 748 将在最后一个小节 §1.7.5 中讨论.

习题 749 证明, 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 那么函数

$$\varphi(x) = \min\{f(x), g(x)\} \text{ 和 } \psi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

也是连续的.

解 1 (概要) 只要对每一个点 x_0 作出证明. 这里完全可以仿照习题 747 的解 1 分三种情况来做. 从略. □

解 2 利用绝对值运算就不难验证以下等式:

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[\,f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\,],$$

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[\,f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\,],$$

然后再用习题 746 即可. □

习题 750 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 且是有界的, 证明函数

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi < x}\{f(\xi)\} \text{ 和 } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi < x}\{f(\xi)\}$$

在区间 $(a, b]$ 上左连续.

解 1 f 的有界性保证了函数 $m(x)$ 和 $M(x)$ 在 $(a, b]$ 上处处有定义 (即取有限值). 由于对两个函数的讨论是类似的, 下面只对于 $M(x)$ 的左连续性给出证明.

从 $M(x_0)$ 的上确界定义可知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_0 \in [a, x_0)$, 使得成立

$$f(t_0) > M(x_0) - \varepsilon.$$

令 $\delta = x_0 - t_0$, 则当 $x_0 - \delta = t_0 < x < x_0$ 时就有

$$M(x_0) - \varepsilon < f(t_0) \leqslant M(x) = \sup_{a \leqslant t < x}\{f(t)\} \leqslant M(x_0),$$

这就已经证明了 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} M(x) = M(x_0)$. □

解 2 只讨论 $M(x)$. 从定义可见 $M(x)$ 是 $[a, b]$ 上的单调递增函数.

任取 $x_0 \in (a, b]$, 则从 $M(x)$ 的单调性可知在点 x_0 存在左侧极限 $M(x_0 - 0)$.

一方面从 $M(x)$ 单调递增知道 $M(x_0 - 0) \leqslant M(x_0)$. 另一方面, 任取 $t \in [a, x_0)$, 则当 $t < x < x_0$ 时, 有 $f(t) \leqslant M(x) \leqslant M(x_0 - 0)$. 由此可见, 对所有这样的 $f(t)$ 取上确界得到的

$$M(x_0) = \sup_{a \leqslant t < x_0}\{f(t)\} \leqslant M(x_0 - 0),$$

因此只能得到 $M(x_0) = M(x_0 - 0)$. □

注 本题与 §1.7.5 中的习题 748 不同. 首先, 这里只假定 f 在 $[a,b]$ 上有界; 其次, $M(x)$ 和 $m(x)$ 的定义与那里也不一样. 例如, 容易举例说明, 若将本题的 $M(x)$ 改为那里的 $\sup\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$, 则本题的左连续结论就不能成立.

1.7.4 连续函数的整体性质 (习题 751, 753–757)

为了理解什么是连续函数的整体性质, 我们先回忆已经学过的连续函数的局部性质. 例如, 函数在某个点处连续就是一种局部性质, 它只与函数在这个点的任意小邻域中的性态有关. 又如函数在某个点是否存在极限, 或是否局部有界, 即存在该点的一个邻域, 使得函数在该邻域上有界, 这些都是局部性质.

值得指出的是, 函数在一个区间 (或其他数集) 上的每个点处都具有某种局部性质时, 并不能保证该函数在区间上具有相应的性质. 例如, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 的每一个点处都是局部有界的, 但却在该区间上无界.

所谓整体性质是指与定义区间本身有关的函数性质. 对连续函数来说其中包括零点存在定理、介值定理、有界性定理、最值定理和一致连续性定理 (即康托尔定理).

作为整体性质, 上述定理与连续函数定义的数集的特性有密切联系. 零点存在定理和介值定理反映了定义域的连通性, 如果将定义域从区间换为其他集合就不成立了.

后 4 个定理则依赖于定义域的紧性, 也就是有界闭集. 对于区间来说必须是有界闭区间[①]. 如果将定义域换为其他的有界闭集, 例如有限个不相交的有界闭区间之并, 则这些定理仍然成立.

介值定理、有界性定理和最值定理可以合并为值域定理, 即连续函数将有界闭区间映为有界闭区间. 这种表述方式在理论和应用方面都是重要的.

下一个习题给出了定义区间无界时连续函数仍然有界的一个充分条件.

习题 751 证明, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $a\leqslant x<+\infty$ 上连续, 且存在有限的 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 那么此函数在所给的区间上是有界的.

解 记 $A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 则对于 $\varepsilon=1$, 存在 $K>a$, 当 $x>K$ 时成立

$$A-1<f(x)<A+1.$$

在有界闭区间 $[a,K]$ 上用有界性定理, 存在 $M>0$, 使得当 $x\in[a,K]$ 时成立 $|f(x)|<M$. 合并以上讨论, 就知道在区间 $[a,+\infty)$ 上

$$|f(x)|<\max\{|A|+1,M\}.\quad\square$$

注 这当然是充分而非必要的条件. 例如 $f(x)=\sin x^2$, 极限 $f(+\infty)$ 不存在, 但 f 仍然有界. (该函数的图像见 §1.4.2 的习题 298 的附图.)

---

① 很多数学分析教科书要求读者能够对于以上定理在定义域变动后是否成立作出判断, 若不成立则要能够举出反例. 这是为理解定理所必须做的功课.

习题 753 设 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是定义在 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续的周期函数, 且

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0,$$

证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

解 任意取定一点 x_0, 我们来证明 $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$.

设 $\varphi(x)$ 的周期为 $T_1\ (>0)$, $\psi(x)$ 的周期为 $T_2\ (>0)$, 则对于任何正整数 n, m 可以在 $\varphi(x_0)$ 与 $\psi(x_0)$ 之间插入 4 项, 组成如下所示的三个差值:

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) - \psi(x_0) &= \varphi(x_0 + nT_1) - \psi(x_0 + mT_2)\\ &= [\varphi(x_0 + nT_1) - \psi(x_0 + nT_1)] + [\psi(x_0 + nT_1 + mT_2) - \varphi(x_0 + nT_1 + mT_2)]\\ &\quad + [\varphi(x_0 + mT_2) - \psi(x_0 + mT_2)],\end{aligned}$$

从题设的条件可见最后三个方括号中的差当 $n, m \to \infty$ 时都趋于 0, 因此 $f(x_0) = g(x_0)$. □

注 一个意外发现: 题中的两个周期函数的连续性条件是多余的.

习题 754 证明, 有界单调函数的所有不连续点是第一类不连续点.

解 这里的关键是有界单调函数在每个点处的单侧极限存在, 它是单调有界数列必定收敛的定理在连续变量情况的推广.

只讨论定义区间的内点为不连续点的情况. 不妨设 f 在 (a, b) 上单调递增. 这时对于内点 $x_0 \in (a, b)$ 任取 $x_1 < x_0 < x_2$, 相应地就有不等式

$$f(x_1) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_2).$$

令 $x_1 \to x_0 - 0$, $x_2 \to x_0 + 0$, 就得到

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

由于 x_0 是 f 的不连续点, 以上不等式中的两个不等号不可能同时成立等号, 这表明 x_0 是第一类不连续点. □

注 由以上讨论可见, 对于不连续点为定义区间的内点的情况, 题设条件中的单调函数的有界性不起作用. 只有在端点为不连续点的情况, 这时才需要对单调函数加上有界性条件.

单调函数类是数学分析中在连续函数类之外最重要的函数类. 下一个习题中指出了它们之间的联系. 其中的条件 (2) 给出了区间上的单调函数为连续的充分条件, 又从介值定理可见它也是必要的. 此外还可以指出, 习题 755 及其证明都可以从几何图像上作出解释, 请读者一试.

习题 755 证明, 如果函数 $f(x)$ 具有下列性质:

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调;

(2) 所有 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数都可以取到,

那么此函数在 $[a, b]$ 上是连续的.

解 这时 f 的值域在 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间. 从上题知道 f 若有不连续点则只能是第一类的. 下面不妨只讨论 f 在 $[a,b]$ 上为单调递增的情况.

由于 f 在端点处的单侧连续性的证明更为容易, 下面只讨论内点 $x_0 \in (a,b)$. 这时需要证明 $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$. 为此给出其中第一个等式的证明就足够了.

用反证法. 设 $f(x_0-0) \neq f(x_0)$. 在 x_0 左侧任取 x_1, 在 x_0 的右侧任取 x_2, 并在 x_0 和 x_1 $(< x_0)$ 之间插入 t, 这样就有 $a \leqslant x_1 < t < x_0 < x_2 \leqslant b$, 并成立①

$$f(a) \leqslant f(x_1) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_2) \leqslant f(b).$$

由于 $f(t)$ 在 $x_1 < t < x_0$ 上单调递增有界, 因此令 $t \to x_0 - 0$ 就得到

$$f(a) \leqslant f(x_1) \leqslant f(x_0-0) < f(x_0) \leqslant f(x_2) \leqslant f(b).$$

这里的关键是上式中间的严格不等号 $<$. 这里利用了取极限得到的 $f(x_0-0) \leqslant f(x_0)$ 和反证法假设 $f(x_0-0) \neq f(x_0)$, 可见其中的 $\leqslant$ 只能是严格不等号 $<$.

由于 x_1 可取到 $[a,x_0)$ 中的任何一个数, 而 x_2 可取到 $(x_0,b]$ 中的任何一个数, 因此上述不等式已经表明区间 $(f(x_0-0), f(x_0))$ 中的任何一个数都不能为 f 取到. 这与题设中的性质 (2) 相矛盾. □

下一题表明, 仅仅满足习题 755 中的条件 (2) 还不能保证函数连续. 其证明从略.

习题 756 证明, 函数 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x-a}$ $(x \neq a)$, $f(a)=0$, 在任意闭区间 $[a,b]$ 上可以取到 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何值, 但是在 $[a,b]$ 上不是连续的.

习题 757 证明, 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上是连续的, 且 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是这个区间内的任意点, 那么在它们之间可以找到一个数 ξ, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

解 由于 n 个点 $x_1, \cdots, x_n$ 的顺序在这里不起作用, 因此不妨设有

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n,$$

且其中不全成立等号 (否则已不必再讨论). 同样假设 n 个函数值 $f(x_1), \cdots, f(x_n)$ 也不全相等, 否则任取 ξ 为 n 个点之一即可.

于是存在下标 $i \neq j \in \{1,2,\cdots,n\}$, 使得如下定义的 m, M 满足 $m < M$:

$$f(x_i) = m = \min\{f(x_1), \cdots, f(x_n)\},$$

$$f(x_j) = M = \max\{f(x_i), \cdots, f(x_n)\}.$$

以下不妨假设 $x_i < x_j$. 这时当然有 $[x_i, x_j] \subset [x_1, x_n]$ 成立.

为简明起见, 记平均值 $\dfrac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)] = A$, 则这时有 $m < A < M$.

构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - A,$$

问题已经归结为证明 F 在区间 $[x_1, x_n]$ 上有零点.

---

① 在 (x_1, x_0) 中插入 t, 并令 $t \to x_0 - 0$, 这样的方法是类似问题中的常用手段.

为此只要观察 $F(x_i)$ 和 $F(x_j)$ 的符号. 由于 $f(x_i)=m<A$ 和 $f(x_j)=M>A$, 因此就得到

$$F(x_i)=f(x_i)-A=m-A<0,\quad F(x_j)=f(x_j)=M-A>0.$$

根据连续函数的零点存在定理, $F(x)$ 在区间 $[x_i,x_j]$ 内有零点. 将它记为 ξ, 则就得到在点 $x_1,\cdots,x_n$ 之间的点 ξ, 使得 $f(\xi)=A$. □

1.7.5 补注 (习题 748, 752, 758)

这里的几个题都有一定的难度, 建议初学者暂时可以跳过, 以后再回过来学习.

1. 习题 748

此题是学习连续函数的一个很好的练习题. 它可以只用连续函数的局部性质解决, 但若利用连续函数的整体性质 (包括 §1.9 的一致连续性), 则解法更多, 因此我们将它放在这里介绍.

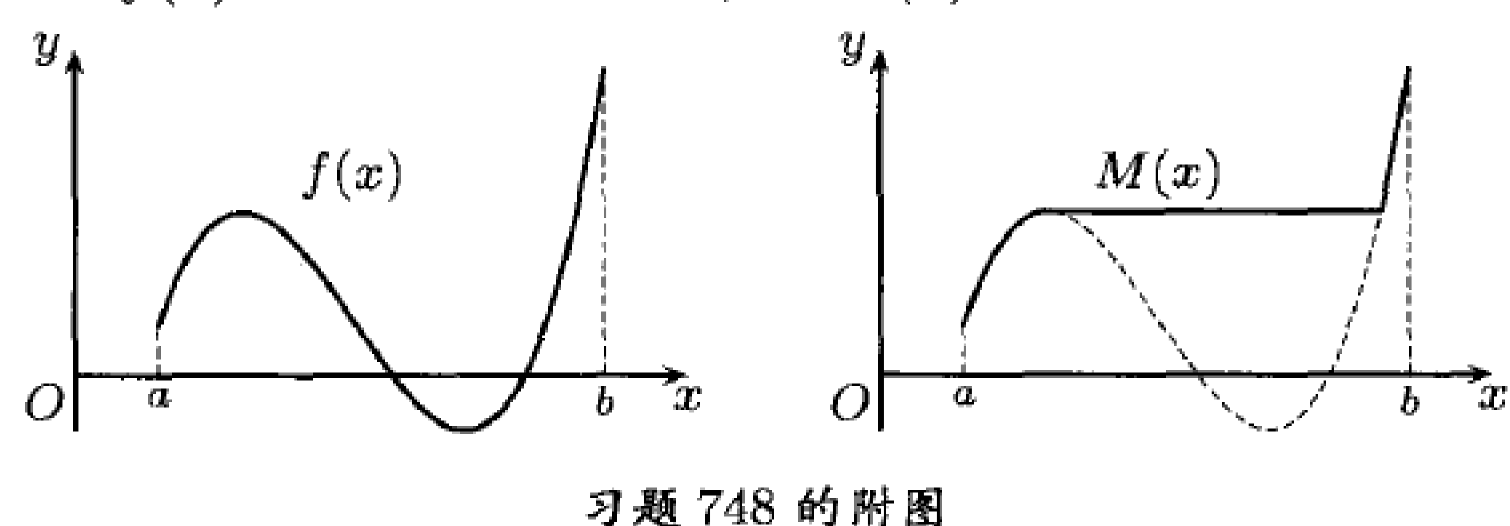
习题 748 证明, 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么函数

$$m(x)=\inf_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}\ \text{和}\ M(x)=\sup_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$$

在 $[a,b]$ 上也是连续的.

注 此题中的两个函数 $m(x)$ 和 $M(x)$ 已经出现在 §1.5 的习题 400 中, 即对 $\sin x$ 和 $\cos x$ 作出 $m(x)$ 和 $M(x)$ 的图像. 建议读者先做该题后再做本题.

为加强几何思维, 在附图中作出了 $f(x)$ 与 $M(x)$ 的示意图. 左边是 $[a,b]$ 上的 $f(x)$ 的图像, 右边则将 $f(x)$ 的图像用虚线表示, 而 $M(x)$ 的图像则用粗黑曲线表示.



习题 748 的附图

利用闭区间上连续函数一定达到自己的上下确界, 在 $m(x)$ 和 $M(x)$ 的定义中的 inf 和 sup 记号可分别换为 min 和 max. 但这对于下面的证明没有多少影响.

以下几个证明都只讨论 $M(x)$, 且只证明它在区间 $[a,b]$ 的内点 $x_0\in(a,b)$ 处连续, 因为对于端点 a,b 的讨论更为简单.

本题的解法很多, 有许多差别不大. 下面是比较有特色的几个解法.

解 1 (直接证明两个单侧极限相等) 由于从定义知道 $M(x)$ 单调递增, 因此对于内点 $x_0\in(a,b)$, 其两侧的极限都存在, 且满足 $M(x_0-0)\leqslant M(x_0)\leqslant M(x_0+0)$. 下面只要证明两个单侧极限相等.

利用 f 在点 x_0 连续, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

在 $O_\delta(x_0)$ 中取点 x_1, x_2 满足

$$x_0 - \delta < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \delta,$$

则对于 $x_1 \leqslant t \leqslant x_2$ 就有

$$|f(t) - f(x_1)| \leqslant |f(t) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_1)| < \varepsilon,$$

于是就有

$$f(t) = [f(t) - f(x_1)] + f(x_1) \leqslant |f(t) - f(x_1)| + f(x_1) < f(x_1) + \varepsilon.$$

根据 $M(x)$ 的定义, 这时成立

$$M(x_2) = \max\{M(x_1), \max\{f(t) \mid x_1 \leqslant t \leqslant x_2\}\} < M(x_1) + \varepsilon,$$

其中利用了 $f(x_1) \leqslant M(x_1)$.

在不等式 $0 \leqslant M(x_2) - M(x_1) < \varepsilon$ 中令 $x_2 \to x_0 + 0$, $x_1 \to x_0 - 0$, 就得到

$$0 \leqslant M(x_0 + 0) - M(x_0 - 0) \leqslant \varepsilon,$$

再利用 $\varepsilon > 0$ 的任意性可见两个单侧极限相等, 这就证明了 $M(x_0 + 0) = M(x_0) = M(x_0 - 0)$. □

解 2 (利用一致连续性) 根据康托尔定理, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $x', x'' \in [a, b]$, $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

将 $M(x)$ 改写为

$$M(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} f(a + t(x - a)),$$

则在 $|x - x_0| < \delta$ 时对于每个 $t \in [0, 1]$ 成立下列不等式

$$f(a + t(x_0 - a)) - \varepsilon < f(a + t(x - a)) < f(a + t(x_0 - a)) + \varepsilon.$$

然后在 $t \in [0, 1]$ 上对上述不等式的三边分别取最大值, 这样就得到

$$M(x_0) - \varepsilon \leqslant M(x) \leqslant M(x_0) + \varepsilon,$$

也就是 $|M(x) - M(x_0)| \leqslant \varepsilon$. 这已经证明了 $M(x)$ 在点 x_0 连续. □

解 3 (分 $f(x_0) < M(x_0)$ 和 $f(x_0) = M(x_0)$ 讨论) (这来源于 $M(x)$ 的图像中经常会出现水平直线段的事实.)

若有 $f(x_0) < M(x_0)$, 则存在充分小的 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时仍然成立 $f(x) < M(x_0)$. 由此可见在 $|x - x_0| < \delta$ 上有 $M(x) = M(x_0)$, 因此 $M(x)$ 在点 x_0 连续.

对于 $f(x_0) = M(x_0)$ 的情况, 分别讨论两侧的连续性.

从 $f(x) \leqslant M(x)$ 和 $M(x)$ 单调递增出发, 令 $x \to x_0 - 0$, 就得到

$$f(x_0) \leqslant M(x_0 - 0) \leqslant M(x_0) = f(x_0),$$

可见 $M(x)$ 在点 x_0 左连续.

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$ 时成立 $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. 于是对于 $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$ 同时有

$$\begin{aligned} M(x_0) \leqslant M(x) &= \max\{M(x_0), \max\{f(t) \mid x_0 \leqslant t \leqslant x\}\} \\ &\leqslant f(x_0) + \varepsilon = M(x_0) + \varepsilon. \end{aligned}$$

这就是 $\lim\limits_{x\to x_0+0} M(x) = M(x_0)$, 即 $M(x)$ 于点 x_0 右连续. □

注 解 3 中的想法, 特别是其中的 $f(x_0) < M(x_0)$ 的部分, 与 $M(x)$ 的几何图像有密切联系 (参看前面的附图).

2. 与极限点有关的习题 752 和 758

仿照数列的极限点 (即聚点) 和上下极限概念, 对于函数也可以定义极限点和上下极限. (这在《习题集》的 §1.5 中已经引进, 但该节中没有这方面的习题.) 由于它们是比较细致的概念, 我们将有关的两个习题放在这里讨论.

习题 752 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上连续且有界, 证明对无论怎样的数 T, 可以找到数列 $x_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T) - f(x_n)] = 0.$$

解 不妨设 $T > 0$, 否则只要将 $x_n + T$ 改记为 x'_n, 于是 $x_n = x'_n - T$, 而 $f(x_n + T) - f(x_n)$ 就成为 $f(x'_n) - f(x'_n - T)$.

作辅助函数

$$g(x) = f(x+T) - f(x),$$

则问题转化为函数 g 是否在 $x \to +\infty$ 时以 0 为其一个极限点. 可以证明, 存在这样的极限点等价于函数 g 满足以下条件:

$$\text{对任意的 } \varepsilon > 0, \text{ 对任意的 } K > x_0, \text{ 存在 } x > K, \text{ 使得成立 } |g(x)| < \varepsilon. \tag{1.43}$$

实际上若存在 $x_n \to +\infty$, 且使得 $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0$, 则对给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $K > x_0$, 存在 N, 使得同时满足 $x_N > K$ 和 $|g(x_N)| < \varepsilon$. 这就是满足条件 (1.43).

反之, 若条件 (1.43) 满足, 则先取 $\varepsilon = 1$, $K = x_0 + 1$, 再取关于这一对 ε 和 K 满足条件 (1.43) 的 x 为 x_1. 然后取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $K = \max\{x_1, x_0 + 2\}$, 再取关于这一对 ε 和 K 满足该条件的 x 为 x_2. 如此继续下去就得到满足要求的数列 $\{x_n\}$, 它同时满足 $x_n \to +\infty$ 和 $g(x_n) \to 0$ 这两个条件.

下面只要证明条件 (1.43) 确实成立.

用反证法. 若 (1.43) 不成立, 则可用对偶法则[①]以正面方式写出该条件的反面为:

$$\text{存在某个 } \varepsilon_0 > 0, \text{ 存在某个 } K_0 > x_0, \text{ 对任意 } x > K_0, \text{ 成立 } |g(x)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{1.44}$$

由于 g 连续, 因此最后的不等式只可能或者是 $g(x) \geqslant \varepsilon_0$, 或者是 $g(x) \leqslant -\varepsilon_0$.

对于前者, 即对任意 $x > K_0$ 成立 $f(x+T) - f(x) \geqslant \varepsilon_0 > 0$. 由此导致对每个正整数 n 有

$$f(x+nT) - f(x) \geqslant n\varepsilon_0.$$

取定一个 $x > K_0$, 可见这与 f 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上的有界性矛盾.

对于对任意 $x > K_0$ 成立 $f(x+T) - f(x) \leqslant -\varepsilon_0 < 0$ 的情况同样可导出矛盾. □

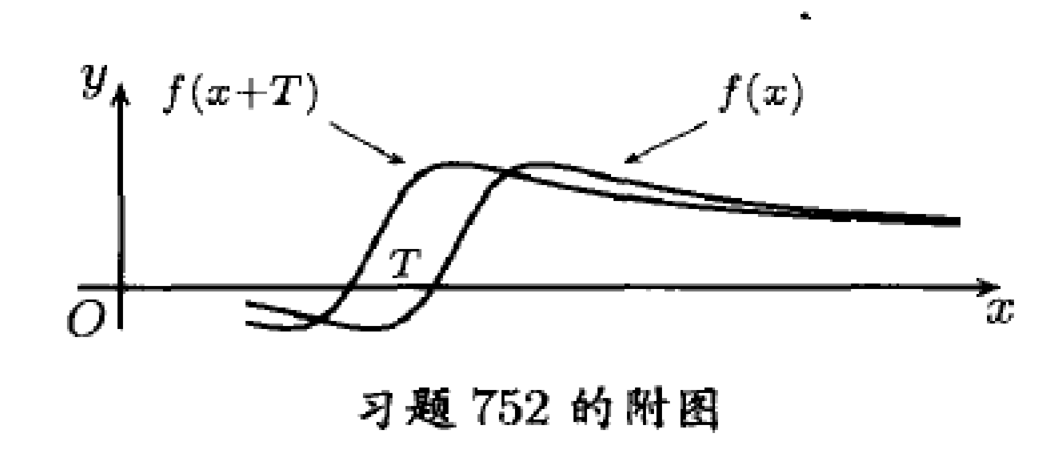
---

① 参见对于 §1.2.5 的习题 87 和 §1.7.1 的习题 668 的讲解, 并可以参考 [23] 的 §1.4.

注　此题反映了在无界区间 $(x_0,+\infty)$ 上任何有界连续函数所共有的一个性质, 然而它是一种什么样的性质呢?

从几何上考虑不难理解这样的性质.

如附图所示, 由于 $f(x+T)$ (对于 $T>0$) 的图像是 $f(x)$ 的图像水平左移距离 T (回忆 §1.4 中的习题 325(d) 等内容), 于是问题就是当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)$ 和 $f(x+T)$ 这两条连续曲线是否会在 y 方向上无限接近?



习题 752 的附图

对于 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>1)$ 这样简单的函数来说, 答案是明显的, 差 $f(x)-f(x+T)$ 当然会随着 x 无限递增而无限接近. 无需几何图像, 只要直接写出

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+T}=\frac{T}{x(x+T)},$$

就知道当 $x\to+\infty$ 时上式的极限等于 0. 但对于更为复杂的函数就没有如此简单的答案了. 习题 752 表明, 虽然不一定成立

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+T)-f(x)]=0,$$

但至少存在趋于 $+\infty$ 的点列, 在这一列点上这两条曲线确实是会无限接近的.

再考虑 $f(x)=\sin x$ 和 $T=\pi$ 这样的例子, 可以看到在习题 752 中的结论也难以再作改进. 这就是说, 只能保证 $f(x+T)$ 和 $f(x)$ 这两条曲线在一个点列上无限接近, 但不能保证如附图中那样在整体上无限接近.

建议读者思考一个没有现成答案的问题, 这就是将习题 752 中的有界性条件和连续性条件分别去掉之后, 我们对于 $f(x)-f(x+T)$ 还能够说些什么?

下一个习题的结论可以与习题 136 (见 §1.2.9 之 2) 作对比. 后者给出了数列的上下极限之间能够为极限点充满的一个充分条件, 而下面的习题表明对于连续函数来说不再需要其他附加条件.

习题 758　设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续, 记 $l=\varliminf\limits_{x\to a+0}f(x)$, $L=\varlimsup\limits_{x\to a+0}f(x)$, 证明, 不论 λ $(l\leqslant\lambda\leqslant L)$ 为何值, 总存在一个数列 $x_n\to a+0$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lambda.$$

考虑到不是每一本数学分析教科书中都有函数的上下极限的内容, 因此下面先介绍这方面的基本理论, 然后再给出习题 758 的解. 它本身并不困难.

为方便起见, 下面的讨论都是对于函数在点 a 的右侧极限过程 $x\to a+0$ 而言的. 将有关内容推广到其他的函数极限过程是没有困难的. 此外, 读者会看到所有这一切都与数列的上下极限理论是平行的. 因此也可以尝试自己来建立以下的内容.

设 f 在点 a 的右侧邻近有定义. 这就是说存在 $\delta>0$, 使得 f 在 $(a,a+\delta)$ 上有定义[①]. 如函数极限的定义中所说, f 在点 a 处是否有定义, 在有定义时 $f(a)$ 等于什么, 这

① 设 X 是 f 的定义域, 则这里还可以放宽为 a 是 $X\cap(a,a+\delta)$ 的一个聚点.

都与下面的讨论无关.

首先需要极限点的概念.

定义 1 若有 $x_n \to a+0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ 有意义, 即或者 A 为有限实数, 或者 A 是带有符号的无穷大 $\pm\infty$ 之一, 则称 A 是函数 f 当 $x \to a+0$ 时的一个极限点.

根据实数系基本定理之一的凝聚定理及其推广 (见 §1.2.6 中的习题 125 和 126), 定义 1 中的极限点一定存在.

定义 2 函数 f 在 $x \to a+0$ 时的极限点中的最小值和最大值分别记为

$$\varliminf_{x\to a+0} f(x) \text{ 和 } \varlimsup_{x\to a+0} f(x),$$

称为函数 f 在点 a 右侧的下极限和上极限.

对于定义 2 需要作一些解释.

设 A 是函数 f 在点 a 右侧的极限点全体所成集合, 则如前所说, A 一定非空. 若 A 中含有 $+\infty$, 则称它是 A 的最大数. 同样, 若 A 中含有 $-\infty$, 则称它是 A 的最小数.

留下的问题就是: 若 A 为非空有界数集, 那么它是否有最大数和最小数. 回顾 §1.1, 我们知道非空有界数集一定有有限的上确界和下确界, 但不一定有最大数和最小数. 例如, §1.1.3 中的习题 16 就是如此. 更简单的例子是开区间 $(0,1)$.

于是我们必须证明, 当极限点集 A 有上界时一定有最大数, 同样当 A 有下界时一定有最小数. 只有在这之后定义 2 才有意义.

为此我们以引理的形式写出这个证明, 同时解释在定义 2 中对于任意非空实数集的最大数和最小数的意义.

引理 若函数 f 在 $x \to a+0$ 时的极限点集 A 有上界 (下界), 则其中必有最大数 (最小数).

证明 只给出 A 有上界必有最大数的证明.

用实数系基本定理之一的确界存在定理 (即习题 15), 非空有上界的数集 A 一定有上确界, 记为 $L = \sup A$. 我们要证明 L 是可达的, 即有 $L = \max A$.

用反证法, 若 L 不是极限点, 则 A 中没有最大数. 根据上确界定义, 对于正整数 k, 存在某个极限点 $\beta \in A$, 它满足条件

$$\beta \in (L - \frac{1}{k}, L).$$

根据极限点的定义, 存在数列 $x_n \to a+0$, 使得 $f(x_n) \to \beta$.

取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得满足 $(\beta-\varepsilon, \beta+\varepsilon) \subset (L-\frac{1}{k}, L)$. 于是存在 N, 当 $n > N$ 时有 $f(x_n) \in (L-\frac{1}{k}, L)$. 由于 $x_n \to a+0$, 不妨取 N 充分大, 使得当 $n > N$ 时还同时成立 $x_n \in (a, a+\frac{1}{k})$.

取 x_{N+1}, 并记为 x'_k, 则它同时满足两个条件:

$$a < x'_k < a + \frac{1}{k} \text{ 和 } L - \frac{1}{k} < f(x'_k) < L.$$

最后, 对于每一个正整数 k 都如此做, 就得到一个数列 $\{x'_k\}$, 它的每一项都满足上述两个条件. 于是一方面有

$$\lim_{k\to\infty} x'_k = a+0$$

(这表明数列 $\{x'_k\}$ 是从 a 的右侧趋于 a), 另一方面又有

$$\lim_{k\to\infty} f(x'_k) = L$$

(这表明 L 是 f 当 $x \to a+0$ 的一个极限点), 因此 A 的上确界 L 就是 A 的最大数. 这与前面的反证法假设矛盾. 因此极限点集合当上方有界时一定有最大数. □

现在写出习题 758 的解答如下.

习题 758 的解 如引理所示, 只需要对于 λ 为有限数且满足 $l < \lambda < L$ 的情况, 证明存在一个数列 $\{x_n\}$ 趋于点 a 的右侧, 同时有 $f(x_n) \to \lambda$.

证明的关键在于如何应用函数 f 的连续性条件去构造出一个趋于 a 右侧的数列, 使得与它对应的函数值数列趋于 λ.

由于 l 和 L 本身是极限点, 因此存在两个数列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$, 它们都从 a 的右侧趋于 a, 同时又满足条件

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = l, \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = L.$$

根据收敛数列的比较性质, 从条件 $l < \lambda < L$ 可知, 存在 N', 当 $n > N'$ 时满足条件

$$f(y_n) < \lambda < f(z_n). \tag{1.45}$$

为简明起见, 不妨弃去以上 4 个数列的前 N' 项, 并将它们重新记为 $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{f(y_n)\}$ 和 $\{f(z_n)\}$. 于是条件 (1.45) 从 $n=1$ 起就满足了.

对于正整数 k, 由于 $y_n \to a+0$, $z_n \to a+0$, 因此存在 N, 当 $n > N$ 时, 成立以下不等式

$$a < y_n < a + \frac{1}{k}, \quad a < z_n < a + \frac{1}{k}.$$

取出 y_{N+1} 和 z_{N+1}, 由于它们对应的函数值满足条件 (1.45), 因此它们不相等. 在区间 $[y_{N+1}, z_{N+1}]$ 上 (这里允许 $y_{N+1} > z_{N+1}$) 考虑函数 f. 从连续函数的介值定理, 存在某个点 $\xi \in (y_{N+1}, z_{N+1})$, 使得 $f(\xi) = \lambda$.

将这个 ξ 记为 x_k, 则满足以下两个条件:

$$a < x_k < a + \frac{1}{k}, \quad f(x_k) = \lambda.$$

最后, 对于每一个正整数 k 都这样做, 就得到收敛于 a 右侧的数列 $\{x_k\}$, 同时 $\{f(x_k)\}$ 是恒等于 λ 的常值数列. 这就证明了 λ 是 f 在 $x \to a+0$ 时的一个极限点. □

注 实际上证明的比习题要求的还多一点, 即对于满足 $l < \lambda < L$ 的 λ 来说, 它不仅仅是极限点, 而且还存在 $x_n \to a+0$, 使得对一切 n 都有 $f(x_n) = \lambda$.

还要请读者考虑, 去掉习题中 f 的连续性条件, 其他保持不变, 则我们能够得出什么结论? 请举例说明.

§1.8 反函数. 由参数方程确定的函数 (习题 759–784)

内容简介 本节的重点是讨论这两类函数的存在性问题. 下面分为 3 个小节, 分别讨论反函数的存在性, 单值连续分支的选取, 和用参数方程表示的函数的存在性.

1.8.1 反函数的存在性 (习题 759–766)

本节的第一题看似简单, 实际上很值得研究. 它对于什么是反函数, 以及两个函数什么时候相同等问题提供了很好的学习材料.

习题 759 求线性分式函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$ 的反函数. 在什么情况下, 反函数与原来的函数相同?

分析 在某次教学中发现, 将此题布置为作业时, 很少有学生能够完全做对的.

一般的做法都是从函数方程写出 $cxy+dy=ax+b$, 然后解出

$$x=\frac{-dy+b}{cy-a},$$

与原来的函数比较, 可见答案是 $a=-d$.

但这样计算时有没有考虑到函数与反函数的定义域与值域之间的关系呢?

如果将上述计算方法用于

$$y=\frac{x-1}{x-1},$$

则有 $xy-y=x-1$, 即解得

$$x=\frac{y-1}{y-1},$$

于是 $a=-d$ 时也对了! 但实际上这两个函数不会互成反函数, 就如同 $y=1$ 和 $x=1$ 决不会互成反函数一样.

有读者会说函数 $y=\dfrac{x-1}{x-1}$ 违反了条件 $ad-bc\neq 0$. 可是在前面的计算中条件 $ad-bc\neq 0$ 又用在那里呢?

也有人看出 $b=c=0$ 和 $a=d\neq 0$ 也是本题的答案. 这是从什么地方来的呢? 为什么在前面的计算中没有出现呢?

还是要回到反函数的定义. 若 $y=f(x)$ 实现了定义域 $\mathscr{D}$ 到值域 $\mathscr{R}$ 之间的一一对应 (即双射), 则对于每一个 $y\in\mathscr{R}$, 就存在唯一的 $x\in\mathscr{D}$ 与之对应, 这就称为反函数, 记为 $x=f^{-1}(y)$. 它的定义域就是 f 的值域 $\mathscr{R}$.

如上面的例子 $y=\dfrac{x-1}{x-1}$, 它的定义域是 $\mathscr{D}=\mathbb{R}-\{1\}$, 值域是单元集 $\mathscr{R}=\{1\}$, 当然不可能存在反函数. 因此关于它的计算和从中解出 x 是没有根据的.

于是只有满足上述反函数存在的条件, 同时又有 $\mathscr{D}=\mathscr{R}$ 时才能够说反函数 f^{-1} 与原来的函数 f 相同.

为此要回忆一元实函数的基本定义. 其中包含两点, 一是定义域, 二是从定义域中的 x 到 $y=f(x)$ 的对应规律. 只有它们都相同的情况下才能说两个函数相同. □

解 下面的做法是先看定义域和值域是否相同, 在相同时再看对应规律是否相同.

分两种情况讨论.

(1) $c=0$. 根据条件 $ad-bc\neq 0$ 可见 $ad\neq 0$. 这时 $y(x)$ 的定义域和值域都是 $\mathbb{R}$. 写出 $y(x)$ 并解出 $x(y)$, 则有

$$y(x)=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d},\quad x(y)=\frac{d}{a}y-\frac{b}{a},$$

可见要求 $\frac{a}{d}=\frac{d}{a}$ 和 $\frac{b}{d}=-\frac{b}{a}$. 其中第一个条件就是 $|a|=|d|$. 若 $a=d$, 则可从第二个条件推出 $b=0$; 若 $a=-d$, 则第二个条件自动成立.

于是条件为 (i) $c=0,a=d,b=0$, (ii) $c=0,a=-d$.

(2) $c\neq 0$. 这时 $y(x)$ 的定义域是 $\mathscr{D}=\mathbb{R}-\{-\frac{d}{c}\}$. 为了看出其值域, 改写

$$y(x)=\frac{a}{c}+\frac{b-\frac{ad}{c}}{cx+d}.$$

条件 $ad-bc\neq 0$ 保证 $y(x)$ 不会是常值函数. 于是 $y(x)$ 的值域是

$$\mathscr{R}=\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}.$$

为了使得 $\mathscr{D}=\mathscr{R}$ 要求 $a=-d$. 这时直接从 $y=y(x)$ 解出 $x=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$ 就可以知道反函数 $x=x(y)$ 和 $y=y(x)$ 相同. 于是得到条件 (iii) $c\neq 0,a=-d$.

小结: 将上面的条件 (ii),(iii) 合并, 可知答案是两种情况: (1) $b=c=0$, $a=d\neq 0$; (2) $a=-d$. □

以下的几个习题是反函数存在定理的一些应用, 当然也可以用其他方法.

这里要注意关于反函数的知识有几个层次. 它们在一般教科书中都已经给出, 下面只是为读者方便而写的小结:

(1) 从反函数的存在性来说, 条件就是原来给定的函数是其定义域到值域的一一映射 (即双射), 这里不需要单调性或其他条件 (参见后面的习题 763);

(2) 严格单调性保证了上述双射条件成立, 同时还保证反函数也严格单调, 且具有相同的单调性. 这就是说, 反函数和原来的函数同时为严格单调递增或严格单调递减;

(3) 对于 (2) 增加连续性条件后就保证反函数也连续;

(4) 在学了微分学之后还有关于反函数求导的公式, 见 §2.2.

习题 761 证明, 存在唯一的连续函数 $y=y(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 满足开普勒方程

$$y-\varepsilon\sin y=x\ \ (0\leqslant\varepsilon<1).$$

解 1 为证明 $x(y)=y-\varepsilon\sin y$ 有反函数, 观察 $x(y)$ 是否单调. 设 $y_1<y_2$, 则

$$x(y_1)-x(y_2)=y_1-y_2-\varepsilon(\sin y_1-\sin y_2),$$

利用三角函数的和差化积公式与不等式 $|\sin y|\leqslant|y|$ [①] 可估计得到

---

① 在一般的教科书中于建立极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 时已经得到了这个不等式. 参见 §1.5.5 关于命题 1.8(1) 的证明.

$$|\sin y_1 - \sin y_2| = 2\left|\cos\frac{y_1+y_2}{2}\sin\frac{y_1-y_2}{2}\right| \leqslant |y_1-y_2|,$$

再根据 $0 \leqslant \varepsilon < 1$, 可见从 $y_1 < y_2$ 即得到 $x(y_1) < x(y_2)$, 因此 $x(y)$ 是严格单调递增的连续函数. 应用反函数存在定理就知道存在唯一的连续函数 $y = y(x)$ 满足所给的开普勒方程.

为了证明反函数 $y = y(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 只要证明 $x = x(y)$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$.

由于 $x(y) = y - \varepsilon \sin y$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 因此它的值域是区间. 从 $|\varepsilon \sin y| \leqslant \varepsilon|y| < |y|$ 可见 $x(y)$ 与 y 同号, 且可取到绝对值任意大的值, 因此 $x(y)$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$, 这也就是反函数 $y(x)$ 的定义域. □

解 2 从习题 640 已经知道存在唯一的反函数 $y = y(x)$ 满足开普勒方程, 且其定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 余下的问题只是要证明 $y(x)$ 连续.

对于点 x_0 和 x, 记 $y_0 = y(x_0)$ 和 $y = y(x)$, 则从 $y_0 - \varepsilon \sin y_0 = x_0$ 和 $y - \varepsilon \sin y = x$ 出发, 并如解 1 那样利用 $|\sin y| \leqslant |y|$ 和三点不等式 (见 §1.1.4 的习题 21) 就可以估计得到

$$\begin{aligned}|x - x_0| &= |y - y_0 - \varepsilon(\sin y - \sin y_0)| \\ &\geqslant |y - y_0| - \varepsilon|\sin y - \sin y_0| \\ &\geqslant |y - y_0| - \varepsilon|y - y_0| = (1-\varepsilon)|y - y_0|,\end{aligned}$$

因此就有

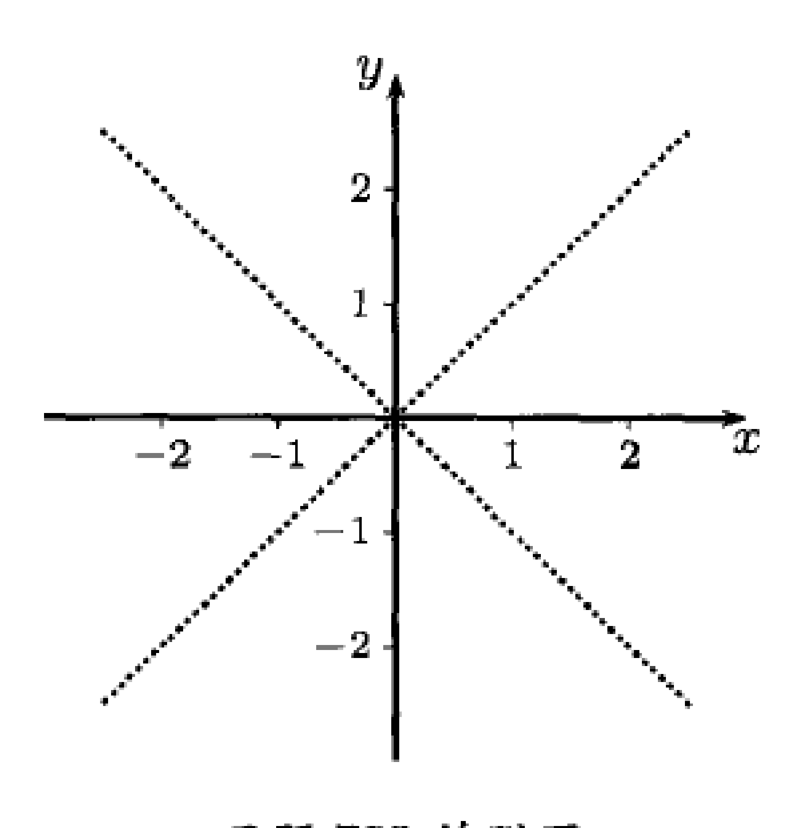
$$|y - y_0| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}|x - x_0|,$$

可见 $y(x)$ 于 x_0 处连续. □

习题 763 非单调函数 $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 能否有单值的反函数? 研究例子

$$y = \begin{cases} x, & x \text{ 为有理数}, \\ -x, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

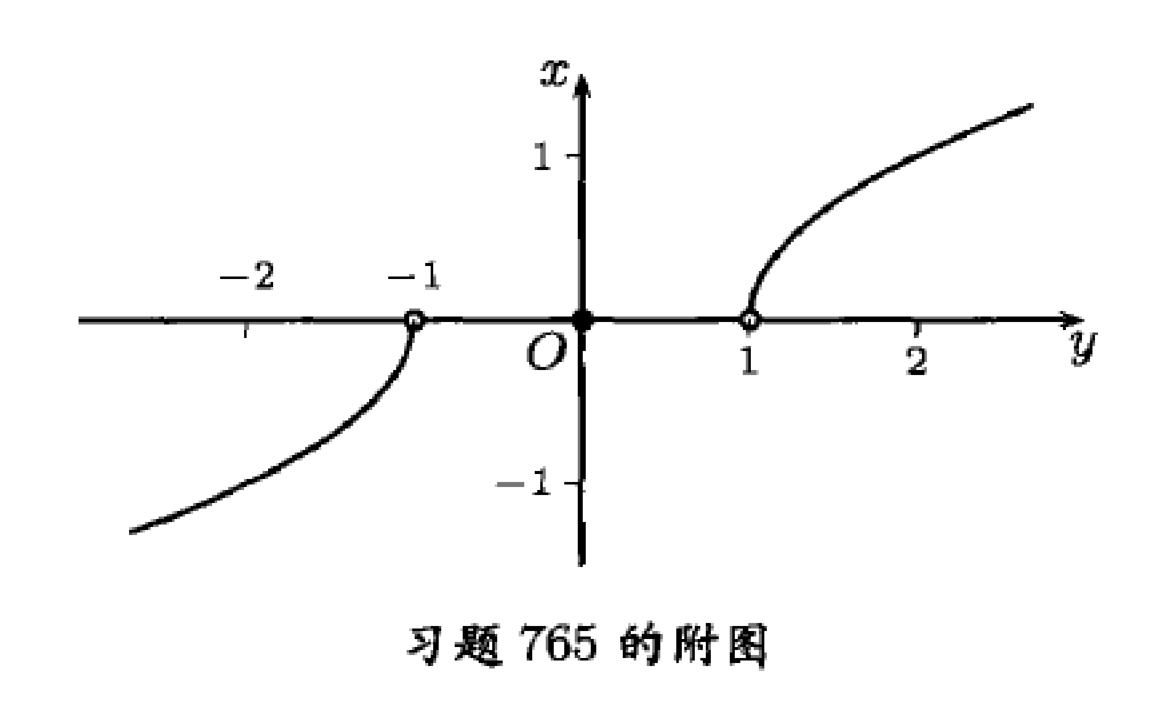
解 如前面关于反函数知识 (1) 所示, 反函数的存在性只取决于 f 是否是其定义域到值域的双射. 因此非单调函数仍然可能有反函数. 本题给出的例子就是如此. 从其定义可见其定义域和值域都是 $\mathbb{R}$, 而且 $y(x)$ 实现了二者之间的双射, 因此存在反函数.



习题 763 的附图

进一步还可以看出, 这个例子的反函数与原来给定的函数完全相同. 如附图所示, 它们的图像由两条直线上的无穷多个点组成, 即直线 $y = x$ 上的 $x = y$ 为有理数的所有点 (x, y), 和直线 $y = -x$ 上的 $x = -y$ 为无理数的所有点 (x, y). □

习题 765 证明, 不连续函数 $y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$ 的反函数是连续函数.



习题 765 的附图

解 由于 $y=y(x)$ 为严格单调递增, 因此反函数存在. 从 $y(x)$ 的定义域为 $\mathscr{D}=\mathbb{R}$ 和值域为 $\mathscr{R}=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,+\infty)$, 就可以知道反函数 $x=x(y)$ 的定义域和值域.

容易直接解出在 $y>1$ 上有 $x(y)=\sqrt{y-1}$, 在 $y<-1$ 上有 $x(y)=-\sqrt{-y-1}$. 此外还有 $x(0)=0$.

在附图中作出了反函数 $x=x(y)$ 的图像.

最后只需要讨论其连续性. 在 $y\in(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上当然没有困难. 问题在于点 $y=0$ 是 $x(y)$ 的定义域中的孤立点, 即在 $(-1,1)$ 中除了 $y=0$ 之外其他点上 $x(y)$ 都没有定义. 这时如何考虑 $x(y)$ 的连续性?

这时不可能用 $\lim\limits_{y\to0}x(y)=x(0)$ 这样的连续性定义, 但是用 ε–δ 语言的连续性定义仍然有效. 一般而言, 在考虑函数 $x=x(y)$ 在点 y_0 的连续性时, 设其定义域为 $\mathscr{D}$, 则只要将连续性定义中的 $|y-y_0|<\delta$ (也就是 $y\in O_\delta(y_0)$) 修改为

$$y\in O_\delta(y_0)\cap\mathscr{D},$$

就可以知道在定义域的孤立点处函数连续. 在这个意义上本题的结论成立. □

注 在 §1.7.1 的习题 673 的例子的讨论中, 其中的反函数的定义域虽然不含有孤立点, 但却是由无穷多个离散的点组成. 在那里已经采用了类似的观点以得出反函数处处连续的结论 (参见该习题的附图).

下面的习题 766 并不很难, 也可以不引入反函数来解决, 然而对于该题的理解则很自然地需要考虑其中的反函数的定义域问题, 因此下面只对此作分析, 而将该题的求解留给读者来做.

习题 766 证明, 如果定义区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$ 严格单调, 且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)\ \ (a\leqslant x_n\leqslant b),$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

分析 不妨只讨论 f 为严格单调递增的情况. 对 f 为严格单调递减的情况可讨论 $-f$.

这时反函数的存在没有问题, 而且也是严格单调递增函数. 于是对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 而言, 若记 $y_n=f(x_n)$, $n=1,2,\cdots$, 就有 $x_n=f^{-1}(y_n)$, $n=1,2,\cdots$. 于是问题成为要求证明以下极限关系:

$$\lim_{n\to\infty}y_n=f(a)\Longrightarrow\lim_{n\to\infty}f^{-1}(y_n)=f^{-1}(f(a))=a.$$

显然, 若 f 于点 a 处为右连续, 则从反函数定理可知 f^{-1} 于点 $f(a)$ 处也右连续, 从而以上结论成立.

习题 766 的困难在于没有告诉我们 f 于点 a 处是否是右连续. 现在我们考察, 若 f 于点 a 右侧不连续时, 情况究竟如何?

根据 f 的严格单调递增性质, 这时一定存在有限极限 $f(a+0)$, 且 $f(a) < f(a+0)$ (参见前面的习题 754). 但这时就对于所有 $a < x \leqslant b$ 成立

$$f(a) < f(a+0) \leqslant f(x),$$

因此不可能存在 $x_n \to a+0$, 使得 $f(x_n) \to f(a)$.

小结: 在本题的条件下, f 必定在点 $x=a$ 处右侧连续, 因此结论成立. □

注 f 在点 a 处虽然右连续, 但 f 仍然可能在点 a 右侧的任意邻近存在无穷多个不连续点, 从而反函数 f^{-1} 的定义域变得很复杂. 于是反函数 f^{-1} 在点 $f(a)$ 处的 (单侧) 连续性也需要如上一题那样来理解.

1.8.2 反函数的单值连续分支 (习题 767–779)

对于给定的函数在其定义域上并非为单射的情况, 其反函数一般是多值的. 特别是对于周期函数来说, 其值域中的每个点的原像一定有无穷多个.

在这种情况下经常采取限制原有函数定义域的方法来得到反函数的单值连续分支.

最为典型的例子就是如何确定出前 4 个三角函数的单值连续反函数. 这可以参看附录一中的习题 311–314 的图像, 其中指出了如何取出三角函数的单调区间, 并同时作出了三角函数和反三角函数的图像, 它们关于直线 $y=x$ 是对称的[①].

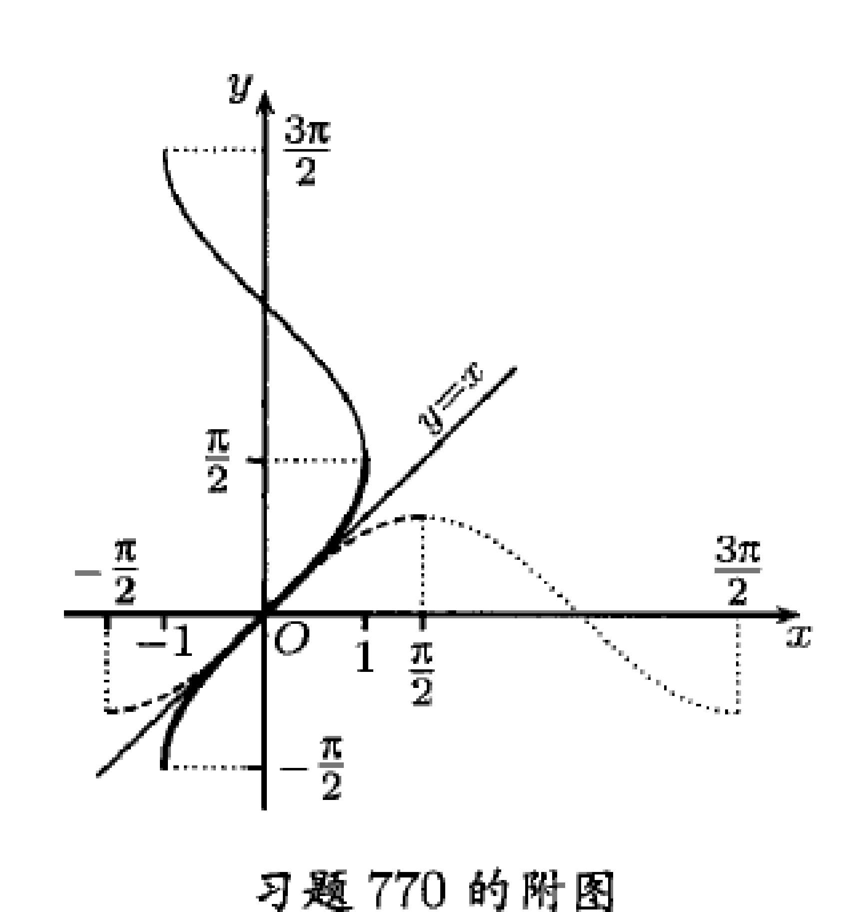
下面以正弦函数为例说明, 还可以取出其他的单值连续分支.

习题 770 求 $y=\sin x$ 的反函数的单值连续分支.

解 如附图所示, 若取 $\sin x$ 的单调区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则就得到反正弦函数 $\arcsin x$, 它的定义域是 $[-1,1]$, 值域是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 且为严格单调递增的连续函数.

这样选取反三角函数不是随意的. 除了使得反函数是某个区间上的严格单调的连续函数之外, 还使得其值域包含了最为常用的锐角范围.

如果放弃这最后一个要求, 则就有无穷多种选择. 在附图中只画出了另一种选择, 即取 $\sin x$ 的另一个单调区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, 于是就得到另一个单值连续反函数. 将它记为 $y_1(x)$, 则有



习题 770 的附图

$$y_1(x) = \pi - \arcsin x.$$

① 这里以及下面的反三角函数都是根据习惯将 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x, y 对换, 将反函数重记为 $y=f^{-1}(x)$. 这时它们的图像关于 $y=x$ 是对称的.

不难考虑一般情况. 设 k 为整数, 则 $y = \sin x$ 在

$$k\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{2}$$

上严格单调连续, 于是存在反函数, 将它记为 $y_k(x)$, 则从

$$y = \sin x = \sin(x - k\pi + k\pi) = (-1)^k \sin(x - k\pi)$$

得到 $\sin(x - k\pi) = (-1)^k y$. 利用 $|x - k\pi| \leqslant \frac{\pi}{2}$, 同时 $\arcsin x$ 为奇函数, 就得到 $x - k\pi = (-1)^k \arcsin y$. 对换 x, y 后得到

$$y_k(x) = k\pi + (-1)^k \arcsin x. \quad \square$$

注 根据反函数的一般概念, $f \circ f^{-1}$ 和 $f^{-1} \circ f$ 分别是 $\mathscr{R}(f)$ 和 $\mathscr{D}(f)$ 上的恒等映射. 关于三角函数和反三角函数则有以下恒等式, 它们是计算和证明许多公式的基础.

$$\sin(\arcsin x) = x,\ |x| \leqslant 1, \qquad \arcsin(\sin x) = x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}; \tag{1.46}$$

$$\cos(\arccos x) = x,\ |x| \leqslant 1, \qquad \arccos(\cos x) = x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi; \tag{1.47}$$

$$\tan(\arctan x) = x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan(\tan x) = x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \tag{1.48}$$

$$\cot(\operatorname{arccot} x) = x,\ x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{arccot}(\cot x) = x,\ 0 < x < \pi. \tag{1.49}$$

值得注意的是: $\arcsin(\sin x)$, $\arccos(\cos x)$, $\arctan(\tan x)$ 和 $\operatorname{arccot}(\cot x)$ 在各自的自然定义域上也是常用的周期函数, 它们的定义域和周期分别与 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$ 相同.

首先看 $\arcsin(\sin x)$. 当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 时, $\pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 因此由 (1.46) 的第二式就有 $\arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$, 于是得到

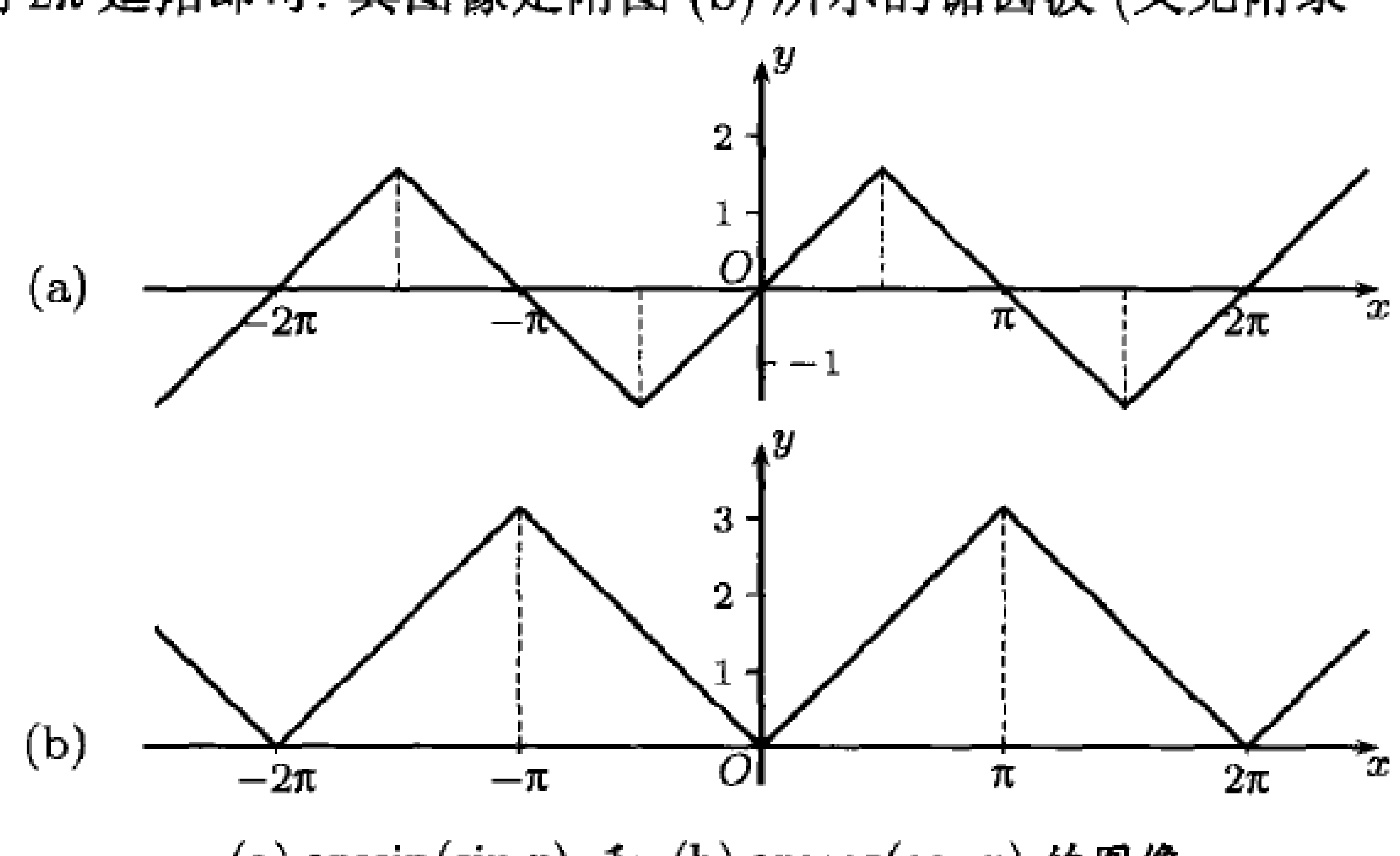
$$\arcsin(\sin x) = \pi - x,\ \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

然后按照周期 2π 延拓即可. 其图像是附图 (a) 所示的锯齿波 (又见附录一的习题 318).

其次看 $\arccos(\cos x)$. 由于它是偶函数, 因此在 $x \in [-\pi, 0]$ 上就有

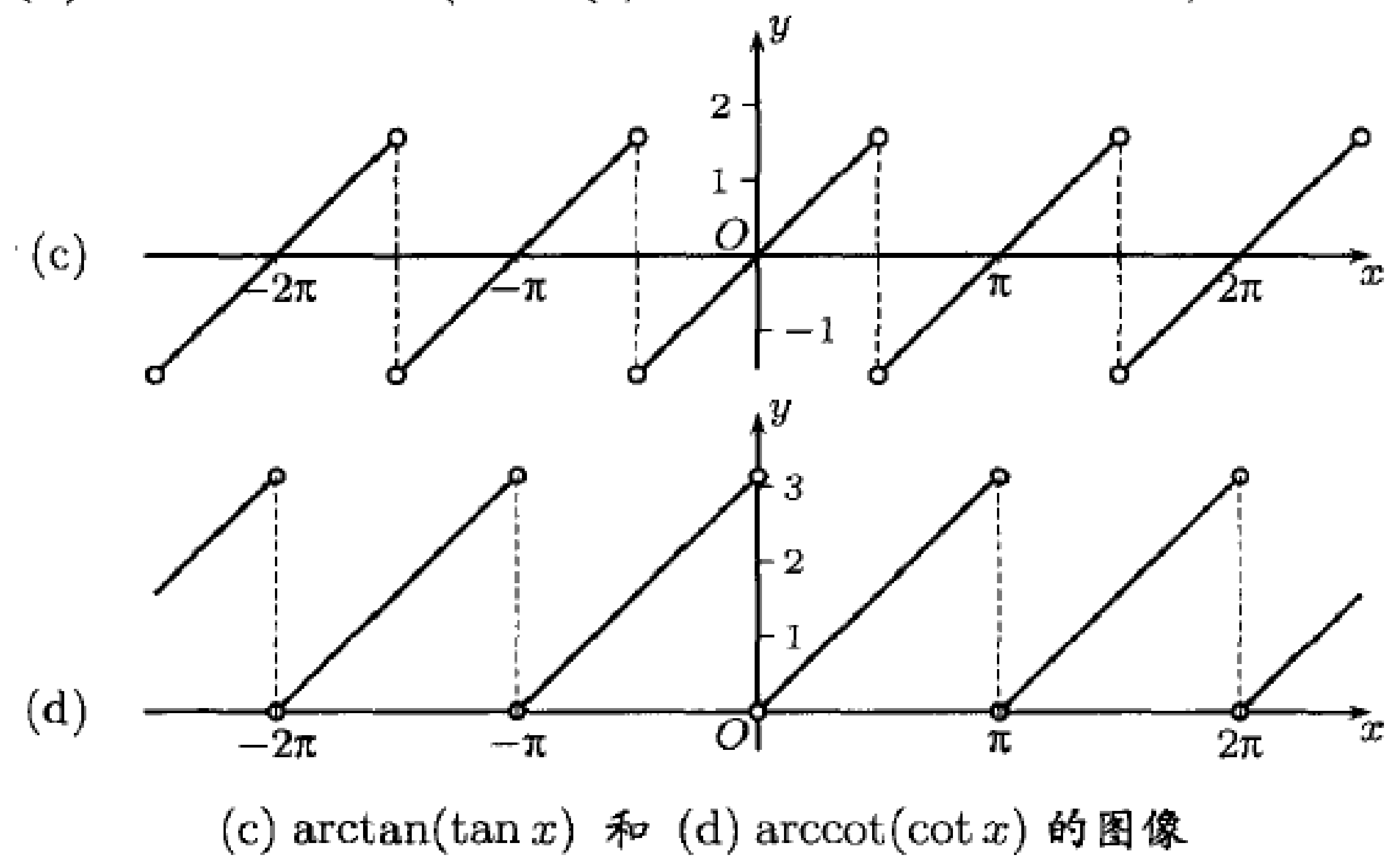
$$\arccos(\cos x) = -x,\ -\pi \leqslant x \leqslant 0.$$

然后按照周期 2π 延拓即可. 其图像是附图 (b) 所示的锯齿波 (又见附录一的习题 320).



(a) $\arcsin(\sin x)$ 和 (b) $\arccos(\cos x)$ 的图像

接下来的两个函数 $\arctan(\tan x)$ 和 $\operatorname{arccot}(\cot x)$ 都是周期为 π 的周期函数, 因此只要分别将 (1.49) 和 (1.50) 中的表达式按照周期 π 作周期延拓即可. 它们的图像分别是附图 (c) 和 (d) 所示的锯齿波 (附图 (c) 又见附录一的习题 321).



(c) $\arctan(\tan x)$ 和 (d) $\operatorname{arccot}(\cot x)$ 的图像

接下来的两个习题是反三角函数的恒等式, 我们对其中第一个给出证明.

习题 774 证明恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

解 1 将欲证的恒等式改写为

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x,$$

观察两边的正弦值.

由于有

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) = \cos(\arccos x) = x,$$

因此两边的正弦值相等. 根据反正弦函数和反余弦函数的定义, 有 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, 可见改写后的恒等式两边的角的范围相同, 而在此范围内正弦相同的角一定相等 (即 (1.46) 的第二式). □

解 2 计算恒等式左边的正弦值. 利用三角函数的和角公式得到

$$\begin{aligned}\sin(\arcsin x + \arccos x) &= \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x)\sin(\arccos x)\\ &= x^2 + \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}\\ &= x^2 + \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - x^2} = 1,\end{aligned}$$

注意其中利用了 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 因此 $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$, 又利用了 $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, 因此 $\sin(\arccos x) \geqslant 0$, 于是两个平方根前的符号都大于 0.

最后, 由于 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arccos x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$, 而在此范围内的角的正弦为 1 时, 角只能是 $\dfrac{\pi}{2}$. □

习题 776–778 是反三角函数的加法公式 [17], 即对于指定的反三角函数 (反正切、反正弦和反余弦), 要将两个反三角函数之和用一个反三角函数来表示. 这时由于取和

后的区间与指定的反三角函数的取值区间未必相同, 因此要根据变量的不同范围而进行“补偿”.

由于这三个加法公式的证明方法相同, 因此我们只详细写出第一个公式的证明, 而对其余两个公式只给出简要的分析, 其细节留给读者去完成.

习题 776 证明反正切加法定理

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon(x,y)$ 是只取 $0, 1, -1$ 三个值的函数.

在给定 x 值后, y 取何值时, 函数 ε 可能不连续? 在平面 Oxy 上作出函数 ε 连续的对应区域, 并给出这个函数在所求得区域内的值.

解　从 $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$ 可见有

$$-\pi < \gamma = \arctan x + \arctan y < \pi.$$

另一方面, 由正切函数的和角公式和 (1.48) 的第一式有

$$\tan\gamma = \frac{\tan(\arctan x) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan x)\cdot\tan(\arctan y)} = \frac{x+y}{1-xy},$$

记 $\gamma' = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, 则有

$$-\frac{\pi}{2} < \gamma' = \arctan \frac{x+y}{1-xy} < \frac{\pi}{2}.$$

可见虽然有 $\tan\gamma = \tan\gamma'$, 但未必一定有 $\gamma = \gamma'$.

为了区分 $|\gamma| < \frac{\pi}{2}$ 和 $|\gamma| > \frac{\pi}{2}$, 可以利用 $\cos\gamma$ 的符号.

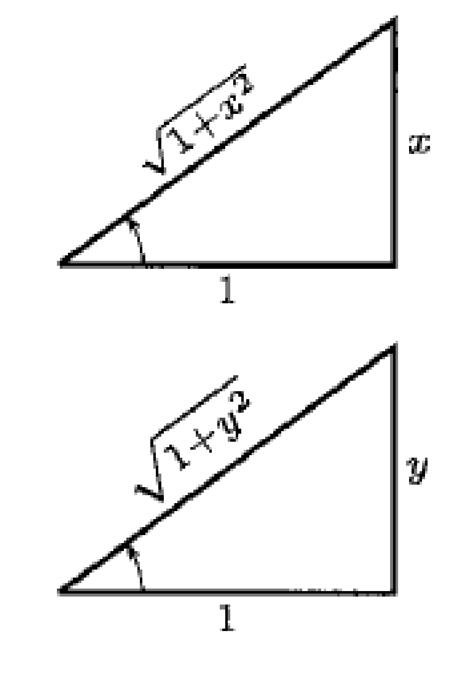
利用附图 1 中的两个小图, 有

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\quad \cos(\arctan y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\quad \sin(\arctan y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

这样就得到

$$\cos\gamma = \cos(\arctan x + \arctan y) = \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}.$$



习题 776 的附图 1

由此可见, 若 $xy < 1$, 则 γ 和 γ' 同在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内, 因此 $\gamma = \gamma'$.

若 $xy = 1$, 则 $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$, 因此它没有正切值.

在 $xy > 1$ 时 $|\gamma| > \frac{\pi}{2}$. 这时有两种可能性.

(1) 若 $xy > 1$ 且 $x, y > 0$, 则它们的反正切值都大于 0, 因此只能是 $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 于是有

$$\gamma = \gamma' + \pi.$$

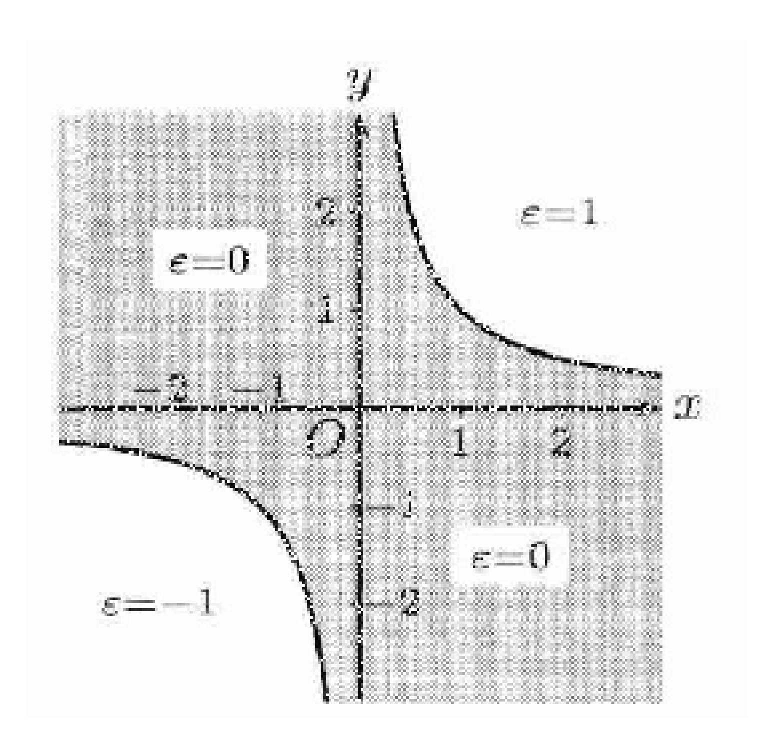
(2) 若 $xy>1$ 且 $x,y<0$, 则它们的反正切值都小于 0, 因此 $\gamma\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$, 于是有

$$\gamma=\gamma'-\pi.$$

小结: 如上所示已经证明了反正切加法定理, 其中的二元函数

$$\varepsilon(x,y)=\begin{cases}0, & xy<1,\\ 1, & xy>1, x,y>0,\\ -1, & xy>1, x,y<0\end{cases}$$

在 $xy=1$ 处没有定义. 如附图 2 所示, 标出了 $\varepsilon=0$ 的阴影区, 其中 $\gamma=\gamma'$. 此外在 $xy>1$ 的两个区域处 $\varepsilon=\pm1$. 若给定 x, 则 ε 在 $y=\dfrac{1}{x}$ 处有第一类不连续点. □



习题 776 的附图 2

注 类似的问题已出现在 §1.5.5 的习题 585 和 §1.7.1 的习题 674(h) 中.

习题 777 证明反正弦加法定理

$$\arcsin x+\arcsin y=(-1)^{\varepsilon}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)+\varepsilon\pi\ \ (|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1),$$

其中

$$\varepsilon=\begin{cases}0, & xy\leqslant 0 \text{ 或 } x^2+y^2\leqslant 1,\\ \operatorname{sgn}x, & xy>0 \text{ 和 } x^2+y^2>1.\end{cases}$$

分析 这时 $\gamma=\arcsin x+\arcsin y$ 在 $[-\pi,\pi]$ 内, 只要根据 $\cos\gamma$ 的符号就可以区分 $|\gamma|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 和 $|\gamma|>\dfrac{\pi}{2}$ 两种情况. 整个证明与习题 776 类似. □

习题 778 证明反余弦加法定理

$$\arccos x+\arccos y=(-1)^{\varepsilon}\arccos\left(xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)+2\varepsilon\pi\ \ (|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1),$$

其中

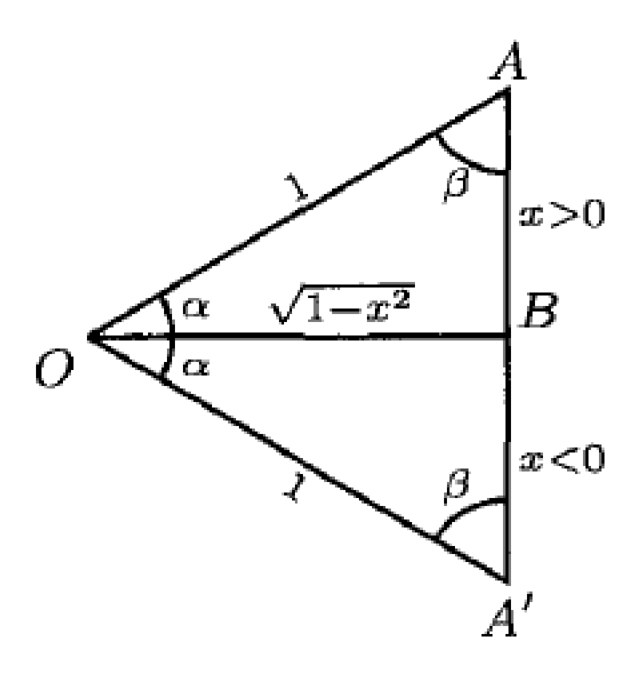
$$\varepsilon=\begin{cases}0, & x+y\geqslant 0,\\ 1, & x+y<0.\end{cases}$$

分析 这时 $\gamma=\arccos x+\arccos y$ 在 $[0,2\pi]$ 内. 与前两个加法定理的差别只是现在需要用 $\sin\gamma$ 的符号来区分 $\gamma\leqslant\pi$ 和 $\gamma>\pi$. □

习题 779 是学习应用前面的反正弦加法定理将函数表达式化简, 然后作出其图像. 当然也可以有其他解法. 下面给出其第一小题的解答.

习题 779 (a) 作函数 $y=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}$ 的图像.

解 1 从反正弦函数的几何意义出发, 容易得到函数 y 的分段表达式.



习题 779(a) 的附图 1

如附图 1 所示, 在 $x>0$ 时从直角三角形 OAB 可见有 $\alpha=\arcsin x$, $\beta=\arcsin\sqrt{1-x^2}$, 且 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, 于是有

$$y=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}=\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}+2\alpha$$
$$=-\frac{\pi}{2}+2\arcsin x.$$

在 $x<0$ 时, 从直角三角形 $OA'B$ 可见仍然有 $y=\alpha-\beta$, 只是这时的 $\alpha<0$. 利用 $\beta=\frac{\pi}{2}-|\alpha|$, 就得到

$$y=\alpha-\beta=\alpha-[\frac{\pi}{2}-(-\alpha)]=-\frac{\pi}{2}.$$

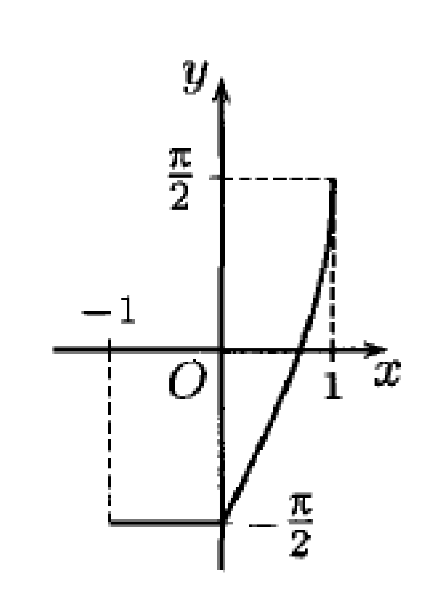
在 $x=0$ 时直接有 $y=-\arcsin 1=-\frac{\pi}{2}$. 于是就可作出附图 2 中的函数 $y(x)$ 的图像. □

解 2 也可用反正弦函数的加法定理 (习题 777) 求 $y=y(x)$ 的分段表达式.

因 $\arcsin x$ 为奇函数, 有 $-\arcsin\sqrt{1-x^2}=\arcsin(-\sqrt{1-x^2})$. 从习题 777 可见, 目前反正弦函数的自变量为 x 和 $-\sqrt{1-x^2}$, 满足 $x^2+(-\sqrt{1-x^2})^2=1$, 因此有

$$\begin{aligned}y&=\arcsin x-\arcsin\sqrt{1-x^2}\\&=\arcsin(x|x|-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2})\\&=\arcsin(x|x|+x^2-1).\end{aligned}$$

当 $-1\leqslant x<0$ 时 $y=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, 而当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时有 $y=\arcsin(2x^2-1)$.



习题 779(a) 的附图 2

后者还可进一步化简. 令 $x=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, 则有

$$\sin(\arcsin(2x^2-1))=2x^2-1=2\sin^2 t-1=-\cos 2t$$
$$=-\sin(\frac{\pi}{2}-2t)=\sin(2t-\frac{\pi}{2}).$$

由于这时有 $-\frac{\pi}{2}\leqslant 2t-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$, 因此 $\arcsin(2x^2-1)=2\arcsin x-\frac{\pi}{2}$. □

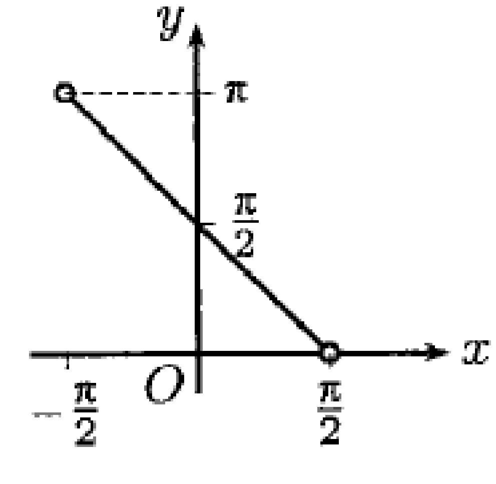
注 最后一步也可如下进行. 令 $x=\cos t$, $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, 则可用习题 774 得到

$$\arcsin(2x^2-1)=\frac{\pi}{2}-\arccos(2x^2-1)=\frac{\pi}{2}-\arccos(\cos 2t)$$
$$=\frac{\pi}{2}-2t=\frac{\pi}{2}-2\arccos x=-\frac{\pi}{2}+2\arcsin x.$$

1.8.3 由参数方程确定的函数 (习题 780–784)

这里的几个题并非用于讨论由参数方程确定的函数的一般性质, 而只关心是否能够从 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 确定函数 $y=y(x)$. 其中最为常用的条件就是 $x=x(t)$ 存在反函数 $t=t(x)$, 从而就得到 $y=y(t(x))$; 例如在 $x=x(t)$ 的单调区间上可以确定反函数. 然后还提出了更广泛的一些条件, 它们也保证了 $y=y(x)$ 的存在.

下面只对前 3 题给出解答. 其余各题可以参考《习题集》后的答案.



习题 780 的附图

习题 780 已知方程

$$x = \arctan t,\ y = \operatorname{arccot} t\ \ (-\infty < t < +\infty),$$

求函数 $y = y(x)$. 这个函数的定义域是什么?

解 从 $x = \arctan t$ 就得到 $t = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. 将上述 $t = t(x)$ 代入 $y = y(t)$ 中, 并写为

$$y = \operatorname{arccot}(\tan x) = \operatorname{arccot}\left[\cot(\frac{\pi}{2} - x)\right].$$

这时 $\frac{\pi}{2} - x \in (0, \pi)$, 因此可以用前面 (1.49) 中的第二个恒等式, 就得到 $y = \frac{\pi}{2} - x$. 定义域如前已经得到为 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. □

注 只要作出一个直角三角形, 它的两个直角边的长度为 1 和 $t > 0$, 就可见 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是这个三角形的两个锐角, 因此结果是显然的. 对 $t < 0$ 也有类似的解释.

习题 781 设 $x = \cosh t,\ y = \sinh t\ (-\infty < t < +\infty)$, 问参数 t 在怎样的变化范围内, 可以将 y 看成为变量 x 的单值函数? 求 y 在不同区间上的表达式.

解 回忆双曲正弦函数和双曲余弦函数的定义及其图像 (参考习题 340 及其在附录一中的图像), 可见 $x = \cosh t$ 有两个单调区间, 以 $t = 0$ 为分界点. 因此当参数 t 在 $(-\infty, 0]$ 和 $[0, +\infty)$ 上时就可以分别确定出两个反函数 $t = t(x)$, 其中 x 的范围为 $[1, +\infty)$, 然后将它们代入 $y = y(t)$, 就得到两个 $y = y(x)$ 的单值函数. 它们的几何表示见附录一中的习题 369(d) 的图像.

利用 $x^2 - y^2 = 1$ 就容易求出这两个函数的表达式为

$$y_1(x) = \sqrt{x^2 - 1},\ x \in [1, +\infty),$$

$$y_2(x) = -\sqrt{x^2 - 1},\ x \in [1, +\infty).\quad □$$

习题 782 由方程组 $x = \varphi(t), y = \psi(t)\ (\alpha < t < \beta)$ 确定 y 作为 x 的单值函数的充分必要条件是什么?

考察例子: $x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t$.

解 我们知道, $x = \varphi(t)$ 存在反函数是保证 $y = y(x)$ 的一个充分条件. 本题则提出了一个相当一般的问题, 即用参数方程能够确定 $y = y(x)$ 的充分必要条件是什么?

由于这个问题过于一般, 因此其答案并不难, 这就是在 $x = \varphi(t)$ 的值域中的每一个 x 值的原像如果多于一个的话, 这些原像在代入 $y = \psi(t)$ 后必须得到同一个 y 值.

下面来观察题中提出的例子.

由于 $x = \sin^2 t$ 和 $y = \cos^2 t$ 是周期等于 π 的周期函数, 因此每一个 x 对应的原像有无穷多个. 然而从 $y = \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - x$ 可见, y 是 x 的单值函数是没有问题的. 这就是说每一个 x 值的无穷多个原像 t 对应的 y 值都是相等的.

也可以一开始就限制在一个周期长度的区间 $[0, \pi]$ 考虑, 则除了 $x = 1$ 只对应于 $t = \frac{\pi}{2}$ 之外, 其他 x 值在这个区间内也都有两个原像. 这时上述条件仍然满足. □

§1.9 函数的一致连续性 (习题 785–808)

内容简介 一致连续性是连续函数的整体性质之一, 是比较精细的概念. 本节对于一致连续性的学习提供了丰富的基本训练题. 从理论方面来说最重要的是康托尔定理, 它解决了在有界闭区间上的连续函数是否一致连续的问题. 在此基础上习题 806.2 解决了在有界非闭区间 (包括有界开区间) 上的连续函数是否一致连续的问题.

在讲解习题之前, 先补充关于一致连续性的一些基本事实, 它们都可以从定义直接推出, 且在下面的许多讨论中很有用处.

命题 1.11 若 f 在数集 I 上一致连续, 则有以下结论:

(1) f 一定在数集 I 上处处连续;

(2) 若数集 $J \subset I$, 则 f 也在数集 J 上一致连续;

(3) 若数集 I 有界, 则 f 在数集 I 上有界.

证 为简单起见只对于 I 为区间写出证明.

(1) 从一致连续性的定义知道, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 x', x'' 满足 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

将 x' 取为区间 I 中的一个固定点 x_0, 又改记 x'' 为 x, 则就可以看出 f 在点 x_0 连续. 由于 x_0 可以是区间 I 的每一个点, 因此 f 在 I 上处处连续.

(2) 从定义即可推出.

(3) 先取 $\varepsilon = 1$. 由定义知存在 $\delta > 0$, 使得当 x', x'' 满足 $|x' - x''| < \delta$ 时就有 $|f(x') - f(x'')| < 1$.

由于区间 I 有界, 在其中插入有限个点, 并与两个端点一起记为 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 使得其中相邻两点的距离均小于 δ. 于是区间 I 中任何一点 x 至少与某个 x_i 的距离小于 δ, 从而有

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| < 1 + |f(x_i)|.$$

由此可见只要取

$$M = 1 + \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, \cdots, |f(x_n)|\},$$

就对一切 $x \in I$ 有 $|f(x)| \leqslant M$, 因此 f 在 I 上有界. □

下一个习题对于理解一致连续性概念非常有益.

习题 786 圆柱型套筒的宽度为 ε, 长度为 δ, 将套筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上并使套筒的轴平行于 Ox 轴而滑动, δ 应取何值时, 可以使得这个套筒顺利地在不等式 $-10 \leqslant x \leqslant 10$ 所确定的曲线上滑动, 其中

(a) $\varepsilon = 1$; (b) $\varepsilon = 0.1$; (c) $\varepsilon = 0.001$; (d) ε 为任意小数.

分析 首先要对题意作一些解释. 在下面的分图 (a) 中作出了曲线 $y = \sqrt[3]{x}$, 同时用 5 个灰色的矩形示意地代表不同尺寸的套筒, 但只在一个套筒上标出了它的宽度 ε 和

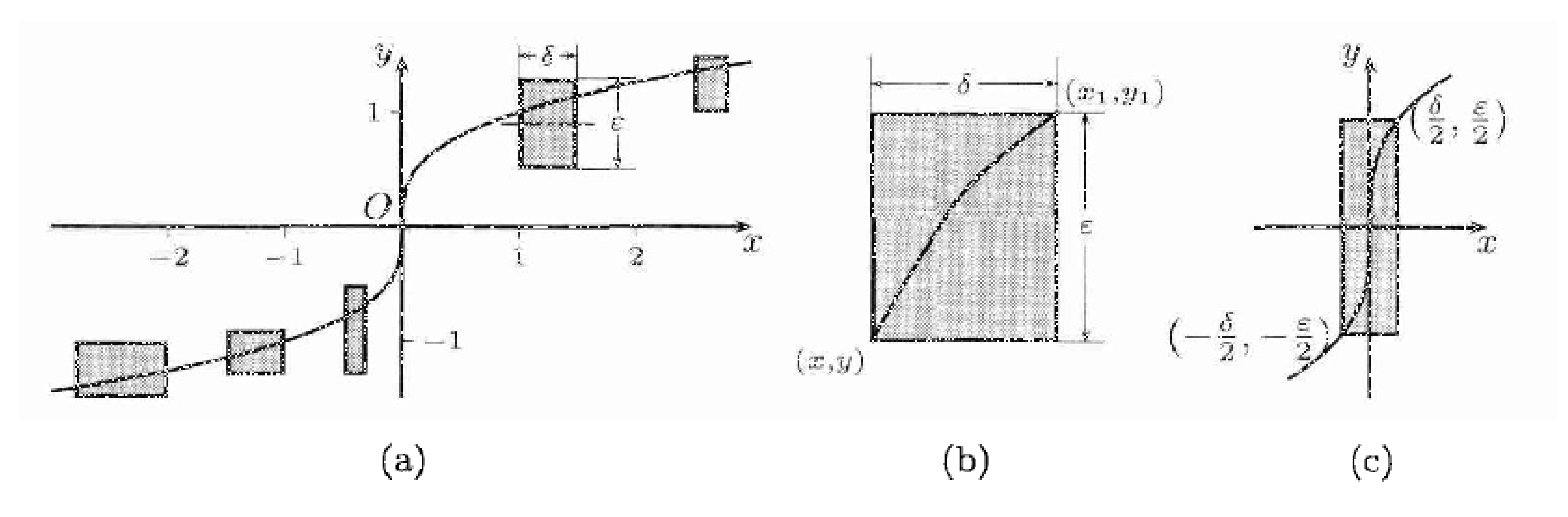
长度 δ. 同时还在这个套筒中间用节线表示该套筒的轴线. 按照条件, 套筒的轴线必须与 x 轴平行, 这也就是矩形的上下两边与 x 轴平行, 而其左右两边与 y 轴平行.

套筒在曲线上滑动的含义在分图 (a) 表现为在任何情况下曲线必须从矩形的左右两边穿过矩形, 而不能与上下两边 (除了端点之外) 相交. 除了这个要求之外, 套筒 (即矩形) 与曲线的相对位置没有限制.

容易看出, 在画出的几个套筒中, 有的难以在图示的曲线上随意滑动. 例如最左边的那个矩形就很难通过曲线在原点的那一段.

对于给定的宽度 ε 来说, δ 不能太大是明显的. 问题就是要找出 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得长度为 δ 的套筒能够在区间 $[-10, 10]$ 上的曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上自由滑动.

容易将这个要求与一致连续性概念联系起来. 对于满足上述要求的 δ, 当 $|x - x_1| < \delta$ 时, 就满足 $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ 的要求. 根据康托尔定理, 本题一定有解. 问题只是要具体计算出 $\delta(\varepsilon)$ 的数值公式.



习题 786 的附图

解 如附图的分图 (b) 所示, 考虑一个极端情况, 即曲线恰好通过代表套筒的矩形的左下角和右上角. 这表明对于给定的 $\varepsilon > 0$, 套筒的长度 δ 已达到最大. 记左下角的顶点为 (x, y), 右上角的顶点为 (x_1, y_1), 则有

$$y = \sqrt[3]{x}, \quad x_1 = x + \delta, \quad y_1 = \sqrt[3]{x_1}, \quad y_1 = y + \varepsilon.$$

于是从

$$\sqrt[3]{x+\delta} - \sqrt[3]{x} = \varepsilon$$

就可以求出

$$\delta = 3\sqrt[3]{x^2}\varepsilon + 3\sqrt[3]{x}\varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

这表明套筒的允许长度是与左边的横坐标 x 有关的. 于是问题就是在 $-10 \leqslant x \leqslant 10$ 上求出上述 δ 的最小值. 实际上从分图 (a) 可见, 困难在于原点附近的曲线非常陡, 随着 $|x|$ 的增加, 曲线变得越来越平坦, 套筒的滑动变得更为容易, 因此上述区间的端点的具体数值 -10 和 10 并不重要.

为清楚起见, 令 $u = \sqrt[3]{x}$, 则 $\delta = \varepsilon(3u^2 + 3u\varepsilon + \varepsilon^2)$. 这个二次三项式的最小值点是 $u = -\dfrac{1}{2}\varepsilon$, 也就是 $x = -\dfrac{\varepsilon^3}{8}$. δ 的最小值是 $\dfrac{\varepsilon^3}{4}$. 这就是套筒容许的最大长度. 当然为了能够顺利滑动, 不至于发生分图 (b) 那样的极端情况, 套筒的长度 δ 还应当小于这个

数值. 这就是所要的答案.

对于三个具体的套筒宽度 ε, 用上述公式得到套筒长度的最大允许值为:

$$(a)\ \delta(1)=\frac{1}{4},\quad (b)\ \delta(0.1)=\frac{1}{4}\cdot 10^{-3},\quad (c)\ \delta(0.001)=\frac{1}{4}\cdot 10^{-9}.$$

最后可以看出, 套筒的最大允许长度实际上可以从分图 (c) 得到简单的解释. 其中灰色矩形代表的套筒实际上处于最为困难的情况. 只要这里能够滑动过去, 其他地方是不成问题的. 于是 δ 的最大允许值就满足

$$\frac{\delta}{2}=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^3,$$

这就提供了前面得到的公式 $\delta=\frac{\varepsilon^3}{4}$. 这个套筒的左边的横坐标就是前面解得的 $x=-\frac{\varepsilon^3}{8}$. □

注 最后将上面所用的思路再重复一下. 先是从极端情况 (即分图 (b)) 求出套筒的允许长度 $\delta(x,\varepsilon)$. 然后对于所有 $x\in[-10,10]$ 求其最小值, 得到

$$\delta(\varepsilon)=\min_{x\in[-10,10]}\delta(x,\varepsilon),$$

这就是在整条曲线上的套筒的最大允许长度.

习题 787 用 ε–δ 语言正面叙述下面的论断: 函数 $f(x)$ 在某一个数集 (开区间、闭区间等) 上连续, 而不在该数集上一致连续.

解 记该数集为 X, 则一方面对于每个点 $x_0\in X$ 和任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in O_\delta\cap X$ 时成立 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$; 另一方面, 又存在一个 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意的 $\delta>0$, 存在两个点 $x',x''\in X$, 它们满足 $0<|x'-x''|<\delta$, 同时成立 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$. □

注 前半题即是在一般数集上的连续性定义, 后半题即是要正面表述 f 在 X 上为不一致连续, 这只要对一致连续的定义用对偶法则即可得到. 类似的习题在前面已经见到, 例如习题 87, 668 等.

在学习一致连续性这样的精细概念时, 能够随手举出不一致连续的例子是大有帮助的. 下面就是最常用的例子之一.

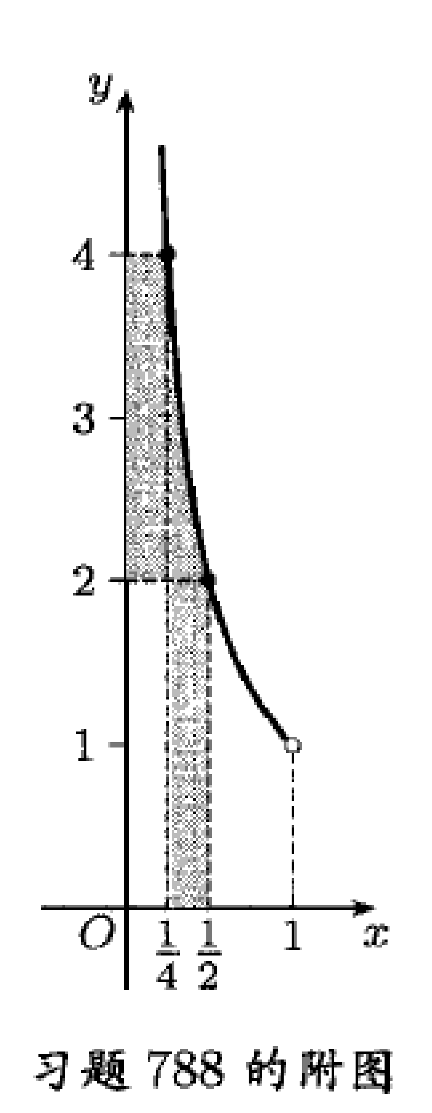
习题 788 证明, 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上连续, 但在这个区间上不是一致连续的.

解 1 由于区间 $(0,1)$ 有界, 而函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在该区间上无界, 因此用命题 1.11(3) 就知道 f 在 $(0,1)$ 上不一致连续. □

解 2 可以结合 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图像来理解下面的证明.

用反证法. 设 $f(x)=\frac{1}{x}$ 于 $(0,1)$ 上一致连续, 则对于 $\varepsilon_0=1$, 存在 $\delta>0$, 当 $x',x''\in(0,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 就成立

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}<\varepsilon_0=1.$$



习题 788 的附图

现对于正整数 $n \geqslant 2$ 令 (在附图中取 $n=2$)

$$x' = \frac{1}{n}, \quad x'' = \frac{1}{2n}.$$

这时有

$$|x' - x''| = \frac{1}{2n}.$$

另一方面对于 $f(x) = \frac{1}{x}$ 则有

$$\left|f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n})\right| = |n - 2n| = n \geqslant 2 > 1,$$

可见只要取 n 足够大, 即使得

$$n > \frac{1}{2\delta},$$

就可以满足 $|x' - x''| = \frac{1}{2n} < \delta$, 但 $|f(x') - f(x'')| = n > \varepsilon_0 = 1$, 从而引出矛盾. □

注 这个例子清楚地告诉我们, 一致连续是一种非局部性质 (即整体性质), 它不能由函数在所给的定义域中处处连续推出. 因此今后在谈论一个函数一致连续或不一致连续时, 必须首先说明是在哪一个区间上讨论问题.

与习题 788 中的函数无界的情况不同, 习题 789 以 $(0,1)$ 上的函数 $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ 为例, 表明有界开区间上的有界连续函数也可以是不一致连续的. 习题 790 则以 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x) = \sin x^2$ 为例, 表明无界区间上的连续函数也可以是不一致连续的. 这两题的讨论非常相似, 读者可以参看 §1.4.2 中的习题 299 和 298 的图像.

习题 791 证明, 如果定义在区间 $[a, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 连续, 且存在有限的极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, 那么 f 在这区间上是一致连续的.

解 记 $f(+\infty) = A$. 对随意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $M > a$, 使得当 $x \geqslant M$ 时成立 $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是对任意的 $x', x'' \geqslant M$, 就有①

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon.$$

在区间 $[a, M]$ 上用康托尔定理, 对上述同一个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x', x'' \in [a, M]$ 时, 只要满足 $|x' - x''| < \delta$, 就成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

留下的问题是 $x' < M < x''$ 时如何才能使得 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$? 一种方法是利用 f 在点 M 的连续性. 对上述给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使得对于 $x \in O_{\delta'}(M)$, 成立 $|f(x) - f(M)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $x' \leqslant M \leqslant x''$, 且 $|x' - x''| < \delta'$ 时, 就有 $x', x'' \in O_{\delta'}(M)$, 从而满足 $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(M)| + |f(M) - f(x'')| < \varepsilon$.

综合以上就知道, 对于随意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\} > 0$, 使得当 $x', x'' \in [a, +\infty)$ 且 $|x' - x''| < \delta''$ 时, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 这样就证明了 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续. □

① 初学者在这里容易发生误解, 即以为到这里已经证明了 f 在 $[M, +\infty)$ 上一致连续. 其实这里的 M 是根据 $\varepsilon > 0$ 而取的, 因此 $[M, +\infty)$ 不是一个确定的区间.

习题 793 函数 $f(x)=x^2$ 在下列区间上是一致连续的吗?

(a) $(-l,l)$, 其中 l 是任意大的正数;

(b) 区间 $(-\infty,+\infty)$.

解 (a) 对给定的 $l>0$ 来说, 可直接估计 $x',x''\in(-l,l)$ 时的函数值之差如下:
$$|x'^2-x''^2|=|x'-x''|\cdot|x'+x''|\leqslant 2l\cdot|x'-x''|,$$
因此对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2l}$ 就足够了.

(b) 若设 $f(x)=x^2$ 于 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 则对 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $|x'-x''|<\delta$, 就有 $|x'^2-x''^2|<1$.

取定 $x''=x'+\dfrac{\delta}{2}$, 则有
$$1>|x'^2-x''^2|=|x'+x''|\cdot|x'-x''|=|2x'+\frac{\delta}{2}|\cdot\frac{\delta}{2}\geqslant(2|x'|-\frac{\delta}{2})\cdot\frac{\delta}{2},$$
于是得到
$$|x'|<\frac{1}{2}(\frac{2}{\delta}+\frac{\delta}{2}),$$
这与 $|x'|$ 可取到任意大的正数相矛盾. 可见 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上不一致连续. □

注 这里又会遇到这样的问题, 即如何判断 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续或不一致连续? 如本题所示, 要想证明它在 $\mathbb{R}$ 上一致连续则永远不会成功. 如前所说, 在缺乏经验时, 遇到这种开放题, 若判断错误, 则就做不出来了.

关于无界区间上的函数的一致连续性没有一般性的结果, 但有一个必要条件还是很有用的. 这就是当 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续时, 一定存在非负常数 a 和 b, 使得成立不等式
$$|f(x)|\leqslant a|x|+b,\quad -\infty<x<+\infty.$$
我们知道线性函数 $y=ax+b$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 于是上述结论告诉我们, 如果函数 f 当 $|x|$ 趋于无穷大时的增长速度超过线性函数的话, 就一定不会在 $\mathbb{R}$ 上一致连续①.

习题 796 研究 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0,\pi)$ 上的一致连续性.

解 补充定义 $f(0)=1$, $f(\pi)=0$, 则就得到在有界闭区间 $[0,\pi]$ 上的连续函数. 根据康托尔定理, 延拓后的函数在 $[0,\pi]$ 上一致连续, 可见原来的函数在 $(0,\pi)$ 上也一致连续. □

注 这里包含两点思想. 一是利用命题 1.11(2), 二是利用强有力的康托尔定理. 这样就避免了直接从 ε-δ 定义去进行证明.

习题 800 研究 $f(x)=x\sin x$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上的一致连续性.

解 1 研究 f 在可以无限接近的两个点列 $n\pi+\dfrac{1}{n}$ 和 $n\pi$ $(n=1,2,\cdots)$ 上的函数值之差. 写出

① 这个结果的证明并不很难, 读者可以一试. 见 [23] 的第五章第一组参考题 20. 在该书中还收入了与一致连续性有关的许多其他习题.

$$|f(n\pi+\frac{1}{n})-f(n\pi)|=(n\pi+\frac{1}{n})\cdot\sin\frac{1}{n}=\pi\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n},$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(n\pi+\frac{1}{n})-f(n\pi)|=\pi$. 于是只要取 $0<\varepsilon_0<\pi$, 就存在 N, 当 $n>N$ 时, 两点 $n\pi+\frac{1}{n}$ 和 $n\pi$ 之间的距离可以小于事先指定的任意小的正数, 但 $|f(n\pi+\frac{1}{n})-f(n\pi)|$ 却大于 ε_0. 可见 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续. □

解 2 (概要) 注意到在 $[2n\pi,2n\pi+\frac{\pi}{2}]$ 上有 $f(2n\pi)=0$ 和 $f(2n\pi+\frac{\pi}{2})=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, 因此在长度为 $\frac{\pi}{2}$ 的这样的区间上 f 的振幅是没有上界的.

另一方面, 若 f 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 则利用命题 1.11(3) 的方法可以证明 $|f|$ 在 $[2n\pi,2n\pi+\frac{\pi}{2}]$ 上存在与 n 无关的上界, 引出矛盾. □

注 由于本题的 f 在 $[0,+\infty)$ 上满足 $|f(x)|\leqslant|x|$, 但却不一致连续, 因此在习题 793 的注中提出的条件确实只是必要条件, 并不是充分条件.

习题 801.2 证明, 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上都一致连续, 那么这个函数在两个区间的并 $[a,b]$ 上是一致连续的.

解 1 从条件知道 f 在点 c 处同时左连续和右连续, 因此 f 在 $[a,b]$ 上处处连续. 用康托尔定理即得所求的结论. □

解 2 对任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 δ_1 和 δ_2, 使得当 $x',x''\in[a,c]$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时成立 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$; 又使得当 $x',x''\in[c,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta_2$ 时成立 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则对于 $x',x''\in[a,b]$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 如果这两个点同时在 c 的左侧或右侧, 则已经有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 如果 x',x'' 处于点 c 的两侧, 则不妨设 $x'<c<x''$, 于是就有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-f(c)|+|f(c)-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此 f 在 $[a,b]$ 上一致连续. □

注 解 1 利用了康托尔定理, 因此极其简单. 然而解 2 仍有其价值. 因为本题中的两个闭区间完全可以换为其他区间, 甚至是无界区间, 例如 $(-\infty,c]$ 和 $[c,+\infty)$, 结论仍然成立. 这时解 2 仍然有效, 但解 1 失效.

习题 802(d) 对 $\varepsilon>0$, 求 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上满足一致连续的条件.

解 1 给定任意的 $\varepsilon>0$.

若 x',x'' 中至少有一个大于 1, 则只要用分子有理化的方法即可得到

$$|\sqrt{x''}-\sqrt{x'}|=\frac{|x''-x'|}{\sqrt{x''}+\sqrt{x'}}<|x''-x'|,$$

因此取 $\delta_1=\varepsilon$ 就可以使得当 $|x''-x'|<\delta_1$ 时, 成立 $|\sqrt{x''}-\sqrt{x'}|<\varepsilon$.

若 $x',x''\in[0,1]$, 则可用康托尔定理, 存在 δ_2, 使得当 $|x''-x'|<\delta_2$ 时, 成立 $|\sqrt{x''}-\sqrt{x'}|<\varepsilon$.

合并以上讨论, 只要取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 就使得对于任何 $x',x''\in[0,+\infty)$, 只要 $|x''-x'|<\delta$ 时就成立 $|\sqrt{x''}-\sqrt{x'}|<\varepsilon$. □

解 2 本题可以用一个初等不等式解决.

在 $a,b\geqslant 0$ 时, 将下式两边平方即可推出不等式

$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b},$$

可见对于 $0\leqslant x'\leqslant x''$ 就有 $\sqrt{x''}=\sqrt{x''-x'+x'}\leqslant\sqrt{x'}+\sqrt{x''-x'}$, 也就是 $0\leqslant\sqrt{x''}-\sqrt{x'}\leqslant\sqrt{x''-x'}$. 对 $0\leqslant x''\leqslant x'$ 可作同样讨论, 最后就得到不等式

$$|\sqrt{x''}-\sqrt{x'}|\leqslant\sqrt{|x''-x'|}.$$

因此对于 $\varepsilon>0$ 取 $\delta=\varepsilon^2$ 即可. □

注 与《习题集》中的习题 799 比较, 那里要求证明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续. 本题的结论更强. 还可以注意到, $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $x=0$ 处非常陡. 学过切线定义和导数的读者知道 f 的图像在点 $(0,0)$ 处有垂直切线. 但这不影响 f 的一致连续性. 当然前面讨论过的习题 786 中的函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 也是如此 (参见其附图).

习题 804 证明, 在区间 (a,b) 上有限多个一致连续函数的和与积在此区间上也是一致连续的.

解 1 只给出后半题的证明. 又只要讨论两个函数的情况就足够了.

设 f,g 在 (a,b) 上都一致连续, 则根据命题 1.11(3), 它们都在该区间上有界, 即存在 $M>0$, 使得对每个 $x\in(a,b)$, 同时成立 $|f(x)|<M$ 和 $|g(x)|<M$.

又对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $x',x''\in(a,b)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 同时成立

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad |g(x')-g(x'')|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是也就同时成立所要求满足的不等式:

$$\begin{aligned}|f(x')g(x')-f(x'')g(x'')|&\leqslant|f(x')g(x')-f(x'')g(x')|+|f(x'')g(x')-f(x'')g(x'')|\\&\leqslant|g(x')|\cdot|f(x')-f(x'')|+|f(x'')|\cdot|g(x')-g(x'')|\\&\leqslant 2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 设前半题的结论已经成立. 这时对于后半题可介绍以下方法: 对于乘积形式的许多问题, 除了解 1 的插项方法之外, 还有下面的一种方法可用.

首先证明以下结论: 设 $F(x)$ 于有界区间 (a,b) 上一致连续, 则 $F^2(x)$ 在 (a,b) 上也一致连续.

从命题 1.11(3), $F(x)$ 在 (a,b) 上有界, 即存在 $M>0$, 使得当 $x\in(a,b)$ 时 $|F(x)|<M$. 这时对于给定的 $\varepsilon>0$ 和 $x',x''\in(a,b)$, 由于 $F(x)$ 在 (a,b) 上一致连续, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x''-x'|<\delta$ 时, 成立 $|F(x'')-F(x')|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$.

然后从

$$|F^2(x'')-F^2(x')|=|F(x'')-F(x')|\cdot|F(x'')+F(x')|\leqslant 2M|F(x'')-F(x')|$$

可见, 只要 $|x''-x'|<\delta$, 也就使得 $|F^2(x'')-F^2(x')|<\varepsilon$.

最后利用下列恒等式

$$f(x)g(x)=\frac{1}{4}\{[f(x)+g(x)]^2-[f(x)-g(x)]^2\},$$

将乘积转换为和差与平方的复合, 从而只要反复利用前半题和刚才证明的结论, 就可以推出 $f(x)g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续. □

注 1　前半题中的区间可以推广为无界情况, 但后半题则不能. 例如前面的习题 793(b) 就提供了一个反例, 即 $f(x)=g(x)=x$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 但它们的乘积却不是.

注 2　本题当然可以用后面的习题 806.2 的结论得到, 正像本题若将区间改为 $[a,b]$, 则用康托尔定理即可. 然而从上面的解可见, 本题从条件到结论是比较简单的, 只要用一致连续性定义即可得到.

习题 806.1 证明, 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 上一致连续, 那么极限

$$A=\lim_{x\to a+0}f(x)\ \text{和}\ B=\lim_{x\to b-0}f(x)$$

存在. 这个定理可以推广到无限区间 (a,b) 吗?

解　不妨只证明第一个极限存在.

对于随意给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $x',x''\in(a,b)$ 且满足 $|x'-x''|<\delta$ 时, 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 由于这对于 $(a,a+\delta)$ 中的任何两点 x',x'' 成立, 因此就已经满足关于单侧极限 $x\to a+0$ 的柯西收敛准则, 于是极限 $A=f(a+0)$ 存在.

最后容易看到这里的结论不能推广到无限区间上. 例如在 $\mathbb{R}$ 上连续的周期函数必定一致连续, 如 $\sin x,\cos x$ 等都是如此, 但是它们在 $x\to\pm\infty$ 时不收敛. 《习题集》中没有这道题, 但有习题 802(e), 即要证明在 $\mathbb{R}$ 上 $f(x)=2\sin x-\cos x$ 一致连续. □

注　学过一元微积分的读者都知道, 实数系的几个基本定理都彼此等价, 但其中的柯西收敛准则要到积分和级数中才起重要的作用. 本题可以说是连续函数理论中柯西收敛准则的最重要应用了. 下面对本题的结论为什么成立作一点解释.

与此有直接关系的就是函数的上下极限, 以及与此有关的习题 758 (参见 §1.7.5 的最后一题). 例如仍然观察极限过程 $x\to a+0$ 时的函数 f 的性态. 这时上下极限总是存在的, 即有

$$l=\varliminf_{x\to a+0}f(x),\quad L=\varlimsup_{x\to a+0}f(x).$$

从命题 1.11(3) 可知 f 有界, l,L 都是有限数.

用反证法. 若 $l<L$, 则极限 $f(a+0)$ 不存在. 任取 (l,L) 中的两点 y_1,y_2, 使得

$$l<y_1<y_2<L,$$

则习题 758 告诉我们在 (a,b) 内存在两个数列 x_n',x_n'', $n=1,2,\cdots$, 使得一方面有 $x_n'\to a$ 和 $x_n''\to a$, 另一方面却对一切正整数 n 有

$$f(x'_n) \equiv y_1 < f(x''_n) \equiv y_2$$

(这里利用了习题 758 的注中提到的更强的结论). 这明显违反了 f 在 (a,b) 上一致连续的条件. 于是习题 758 的结论提供了本题的另一个证明, 只是长了一点, 不如用柯西准则简短得多.

习题 806.2 证明, 在有限区间 (a,b) 上定义的连续函数 $f(x)$, 可以连续拓展到闭区间 $[a,b]$ 的充要条件是: 函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上一致连续.

解 充分性. 若 f 在 (a,b) 上一致连续, 则直接用上一个小题就知道存在 $A = f(a+0)$ 和 $B = f(b-0)$. 于是可以定义

$$F(x) = \begin{cases} A, & x = a, \\ f(x), & a < x < b, \\ B, & x = b, \end{cases}$$

这就是所要的延拓.

必要性. 如果 f 可以连续延拓为 $[a,b]$ 上的连续函数 $F(x)$, 则从康托尔定理知道 F 在 $[a,b]$ 上一致连续. 由于 $(a,b) \subset [a,b]$, 因此 F 也在 (a,b) 上一致连续 (参看命题 1.11(2)). 然而在 (a,b) 上 $F(x) \equiv f(x)$, 因此这就是说 f 在 (a,b) 上一致连续. □

注 类似地可以推导出在 $(a,b]$ 和 $[a,b)$ 上的连续函数 f 为一致连续的充分必要条件分别为存在极限 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$. 这些结果和康托尔定理一起就彻底回答了什么是有界区间上的连续函数为一致连续的充分必要条件. 但对于无界区间的情况目前还没有看到与此相当的充分必要条件.

§1.10 函数方程 (习题 809–820)

内容简介 从最基本的函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 开始, 本节给出了主要的基本初等函数满足的各个函数方程. 在习题中主要学习柯西方法, 在补注小节中介绍解函数方程的微分法等其他方法.

首先要说一下什么是函数方程.

我们最早接触到的方程都是以求解未知数为目的的. 将方程的未知数推广为未知函数或未知函数类就是函数方程. 由于微分方程和积分方程也都是求解未知函数或未知函数类的函数方程, 而且都已经发展成为专门的数学分支, 因此平时所说的函数方程一般在方程中都不含有关于未知函数的微分和积分运算.

函数方程起源很早, 其研究也已经取得了丰富的成果, 但仍然缺乏系统的理论. 在《习题集》的这一节中收入的习题主要都是基本初等函数满足的函数方程. 需要知道更多内容的读者可以参考 [21] 及其中的文献.

1.10.1 柯西方法 (习题 809–820)

求解函数方程有许多方法, 下面主要介绍柯西开创的方法, 即从方程先求出自变量为有理数时的函数值, 然后通过极限得到完整的函数表达式, 即函数方程的解. 下面的第一个习题中的函数方程经常称为柯西方程.

此外, 还可以通过变量代换将函数方程转化为柯西方程或者已经解出的其他函数方程, 统称之为归结法.

习题 809 (柯西方程) 证明, 对一切实数 x 和 y 满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

的唯一连续函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是齐次线性函数

$$f(x)=ax,$$

其中 $a=f(1)$ 是任意常数.

解 由于 $a(x+y)=ax+ay$, 因此 $f(x)=ax$ 是方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的解. 下面要证明, 凡是方程的连续解只能具有 $f(x)=ax$ 的形式.

设函数 $f(x)$ 是方程的连续解. 用 $x=y=0$ 代入可见 $f(0)=2f(0)$, 因此 $f(0)=0$. 从 $f(x)+f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=0$ 可见 $f(-x)=-f(x)$, 即 $f(x)$ 一定是奇函数. 因此以下只要讨论 $x>0$ 的情况.

令 $x=y$ 就得到 $f(2x)=2f(x)$. 用数学归纳法可以知道对于正整数 m 有

$$f(mx)=mf(x).$$

对于正整数 n 从 $f(x)=f(n\cdot\dfrac{x}{n})=nf(\dfrac{x}{n})$ 得到 $f(\dfrac{x}{n})=\dfrac{1}{n}f(x)$. 合并以上结果就得到

$$f(\frac{m}{n}x) = mf(\frac{x}{n}) = \frac{m}{n}f(x).$$

令 $x=1$ 就求出了 $f(x)$ 在自变量为有理点时的表达式为

$$f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n}f(1).$$

由于 f 为奇函数, 因此这个表达式对于 m 为负整数的情况也成立.

注意: 到此为止还没有利用 f 的连续性.

对于 x 为无理数的情况, 取有理数列 r_n, $n=1,2,\cdots$, 使得 $r_n \to x$, 则就可以在

$$f(r_n) = r_n f(1)$$

两边令 $n \to \infty$, 并利用 f 的连续性, 即可得到

$$f(x) = f(1) \cdot x.$$

由此可见, 方程的连续解只能是齐次线性函数类 $f(x) = ax$, 其中 $a = f(1)$. □

注 在本题中, 函数 f 的连续性条件等价于 f 在某一点处连续.

实际上设 f 在点 x_0 处连续, 则对于 $x_1 \neq x_0$ 就可以如下证明 f 在点 x_1 连续.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-x_1) + f(x_1) \\ &= f(x-x_1+x_0) - f(x_0) + f(x_1). \end{aligned}$$

由于当 $x \to x_1$ 时有 $x - x_1 + x_0 \to x_0$, 因此利用 f 在点 x_0 连续, 就得到

$$\lim_{x\to x_1} f(x) = f(x_1).$$

接下来的两个习题表明, 习题 809 中的连续性条件还可以改换为其他的等价条件.

习题 810 证明, 满足方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性的.

解 (概要) 首先与上题一样证明对于有理点 $\frac{m}{n}$ 都成立 $f(\frac{m}{n}) = f(1) \cdot \frac{m}{n}$, 然后对于无理点 x 在两侧用两个单调的有理点序列趋于该点, 这样就可以证明两个单侧极限存在且相等, 于是就得到 $f(x) = f(1) \cdot x$. 细节请读者完成. □

注 可以证明区间上的单调函数的不连续点不超过可列个. (许多数学分析教科书中都有这个定理, 也可以参考 [23] 的命题 5.5.2.) 又因为区间中的实数全体为不可列集, 因此单调函数一定有连续点. 然后用习题 809 的注就知道 f 处处连续. 此外还可以看出, 单调性条件可以改为在某一个开区间上单调.

习题 811 证明, 如果函数 f 满足方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 且在任意小的区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上是有界的, 那么它是齐次线性的.

解 1 首先如前两个习题那样证明对于有理点 $\frac{m}{n}$ 成立 $f(\frac{m}{n}) = f(1) \cdot \frac{m}{n}$, 然后定义辅助函数

$$g(x) = f(x) - f(1) \cdot x,$$

问题只是要证明 $g(x) \equiv 0$. 这在有理点上已经成立.

利用 g 是函数方程的两个解之差就得到

$$g(x+y) = f(x+y) - f(1)(x+y)$$
$$= [f(x) - f(1)x] + [f(y) - f(1)y] = g(x) + g(y),$$

即 g 也满足该函数方程.

从 g 的定义和题设条件可知, 函数 g 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上也是有界的. 于是存在 $M > 0$, 使得当 $|x| < \varepsilon$ 时满足 $|g(x)| < M$.

用反证法. 若存在某个无理点 x_0 使得 $g(x_0) = \alpha \neq 0$, 则 $g(nx_0) = n\alpha$, 因此 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

另一方面, 对于任意一个无理点 x, 在区间 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ 中取一个有理点 r, 即使得 $x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$ 成立. 然后令 $x_1 = x - r$, 则就有

$$-\varepsilon < x_1 < \varepsilon,$$

因此 $|g(x_1)| < M$. 但这时有

$$g(x) = g(x_1 + r) = g(x_1) + g(r) = g(x_1),$$

于是也有 $|g(x)| < M$ 成立. 这表明 g 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 引出矛盾. □

解 2 根据习题 809 的注, 只要能够证明 f 在点 $x = 0$ 连续就足够了.

根据题意存在 $M > 0$, 使得当 $|x| < \varepsilon$ 时 $|f(x)| < M$.

利用习题 809 的解中开始部分的推导, 就有

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |f(\frac{1}{n} \cdot nx)| = \frac{1}{n} \cdot |f(nx)|,$$

于是对于任意给定的 $\eta > 0$, 只要取定一个正整数

$$n = [\frac{M}{\eta}] + 1 > \frac{M}{\eta},$$

然后取 $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$, 则当 $|x| < \delta$ 时, 就有 $n|x| < \varepsilon$, 因此根据 f 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上满足 $|f(x)| < M$ 的条件, 即有

$$|f(x)| = \frac{1}{n} \cdot |f(nx)| < \frac{M}{n} < \frac{M}{\frac{M}{\eta}} = \eta,$$

这样就证明了 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, 因此 f 于点 $x = 0$ 处连续. □

注 1 从解 1 容易看出, 题中的条件, 即在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 上函数 f 有界, 可以改换为在任何一个开区间上 f 有界. 证明方法相同. 实际上在引入 g 之后, 利用 g 仍然满足该函数方程, 在解 1 中的主要方法就是对于任意给定的一个无理点 x, 在开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 内找一个无理点 x_1, 使得差 $x - x_1 = r \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ 是一个有理数. 如果将开区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 改换为任意的其他开区间, 则上述方法仍然有效.

注 2 一个自然的问题是: 柯西方程 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 是否还有其他解?

从前三个习题可见, 如果有其他解, 则这个函数只能是处处不连续, 在任何开区间上不单调, 在任何开区间上无界, 而且不连续点都是第二类. 这是性质很奇特的函数. 可以证明柯西方程确实存在这样的解.

由于该函数方程的任何解在所有有理点上的值总是确定的, 因此问题在于如何定义它在无理点上的函数值. 这时必须对一切 x, y 同时满足该函数方程, 因此这很不容易.

但是利用比较深刻的数学工具, 这是可能做到的. 有兴趣的读者可以在 [22, 68–70 页] 找到答案.

习题 812 证明, 对 x 和 y 的一切值, 满足方程

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

且不恒等于 0 的唯一的连续函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是指数函数 $f(x)=a^x$, 其中 $a=f(1)$ 是正常数.

解 1 (柯西法)　首先从

$$f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=[f(\frac{x}{2})]^2\geqslant 0,$$

可见满足该函数方程的解一定非负. 又若有 $f(x_0)=0$, 则对任意 x, 就有

$$f(x)=f((x-x_0)+x_0)=f(x-x_0)f(x_0)=0,$$

可见如果解有零点, 则必定恒等于 0. 由此可见, 除了恒等于 0 的解之外, 其他解一定是处处大于 0 的.

以下还是用柯西方法.

从 $x=y=0$ 时的 $f(0+0)=f(0)=[f(0)]^2$ 和 $f(0)>0$ 可见只能是 $f(0)=1$.

从 $y=-x$ 得到 $f(x+(-x))=f(0)=1=f(x)f(-x)$, 即有 $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$. 因此只要求出 $x\geqslant 0$ 时的 f 的表达式即可.

从 $x=y$ 得到 $f(2x)=[f(x)]^2$. 用数学归纳法可以证明 $f(nx)=[f(x)]^n$, 其中 n 为正整数.

在上式中用 $\frac{x}{n}$ 代替 x, 就可得到 $f(x)=[f(\frac{x}{n})]^n$, 即有 $f(\frac{x}{n})=[f(x)]^{\frac{1}{n}}$.

合并以上结果, 就知道对于任何有理分数 $\frac{m}{n}$ 有

$$f(\frac{mx}{n})=[f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

记 $f(1)=a$, 则对于 $x=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ 就得到

$$f(\frac{m}{n})=a^{\frac{m}{n}}.$$

最后对于无理点 x 只要利用连续性条件和用有理数列取极限的方法就可以得到 $f(x)=a^x$. □

解 2 (归结法)　用变量代换可将本题的函数方程归结为习题 809 的柯西方程.

如解 1 的开始部分那样证明不恒等于 0 的解一定处处大于 0 之后, 作辅助函数

$$F(x)=\ln f(x),$$

则就有

$$F(x+y)=F(x)+F(y),$$

然后利用 F 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 从习题 809 知道只能有 $F(x)=Cx$, 其中 $C=F(1)=\ln f(1)$. 这样就得到

$$f(x)=\mathrm{e}^{F(x)}=\mathrm{e}^{Cx}=(\mathrm{e}^C)^x=f(1)^x.\quad\square$$

习题 813 证明, 在区间 $(0,\varepsilon)$ 上有界且满足方程 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 的不恒等于 0 的函数 $f(x)$ 是指数函数.

解 1 (柯西法) 本题完全可以仿照习题 811 的解 1 来求解, 请读者完成. 这是一个很好的练习. □

解 2 (归结法) 设法将本题归结为习题 811. 为此需要做以下准备工作. 如前所述, 所求的解 f 处处大于 0.

这时对于 $x\in(-\varepsilon,0)$, 有 $0<x+\varepsilon<\varepsilon$, 因此

$$f(x)=f((x+\varepsilon)-\varepsilon))=f(x+\varepsilon)\cdot f(-\varepsilon),$$

可见从 f 在 $(0,\varepsilon)$ 上有界即可推出 f 也在 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上有界.

又从 $f(x)f(-x)=f(0)=1$ 知道 $f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}$. 因此在 $(0,\varepsilon)$ 上的函数 f 不仅上方有界, 而且其下确界大于 0.

然后与习题 812 的解 2 一样定义辅助函数 $F(x)=\ln f(x)$. 从以上推导可见 F 于 $(0,\varepsilon)$ 上有界. 因此从习题 811 (及其注) 知道 F 连续, 以下已经没有困难. □

注 这里要克服的困难是: 由于 $\ln x\to-\infty$ $(x\to 0+)$, 因此还不能由 f 在 $(0,\varepsilon)$ 上有界直接推出 F 也在这个区间上有界.

习题 814–817 是讨论对数函数和幂函数满足的函数方程. 它们的解法可以仿照习题 812 进行.

习题 818 (达朗贝尔方程) 求对实数 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

的所有的连续函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$.

解 先看方程是否有恒等于常值 c 的解. 用 $f\equiv c$ 代入得到 $2c=2c^2$, 可见方程有恒等于 0 和恒等于 1 的解. 以下只关心求其他解 $f(x)$.

设 $f(x_0)\neq 0$, 在方程中令 $x=x_0$, $y=0$ 代入, 就得到 $2f(x_0)=2f(x_0)f(0)$, 可见 $f(0)=1$.

又在方程中令 $x=0$, 得到 $f(y)+f(-y)=2f(0)f(y)$, 即是

$$f(-y)=f(y),$$

因此解 f 一定是偶函数.

由于 $f(0)=1$, 利用 f 连续, 存在 $c>0$, 使得 f 在 $[0,c]$ 上处处大于 0. 以下分两种情况讨论.

(1) $f(c)\leqslant 1$. 取 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 使得 $f(c)=\cos\theta$.

这时在方程中令 $x=y=c$ 代入得到 $f(2c)+1=2[f(c)]^2$, 即有

$$f(2c)=2[f(c)]^2-1=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta.$$

现在用数学归纳法证明 $f(nc)=\cos n\theta$. 为此只要作如下计算即可完成归纳法的第二步证明:

$$
\begin{aligned}
f((n+1)c) &= 2f(nc)f(c) - f((n-1)c) \\
&= 2\cos n\theta\cos\theta - \cos(n-1)\theta \\
&= \cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta = \cos(n+1)\theta.
\end{aligned}
$$

在方程中令 $x = y = \frac{c}{2}$, 则有

$$f(c) + 1 = 2[f(\frac{c}{2})]^2,$$

又利用 $f(\frac{c}{2}) > 0$, 就得到

$$f(\frac{c}{2}) = \sqrt{\frac{f(c)+1}{2}} = \sqrt{\frac{\cos\theta+1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}.$$

然后用数学归纳法可知对于正整数 n, 有 $f(\frac{1}{2^n}c) = \cos\frac{1}{2^n}\theta$. 再用数学归纳法即可证明对于任何正整数 m, n 成立

$$f(\frac{m}{2^n}c) = \cos\frac{m}{2^n}\theta.$$

利用 f 的连续性和任何 $x > 0$ 可以用形式为 $\frac{m}{2^n}$ 的分数无限逼近, 并利用 f 和余弦函数都是偶函数, 这样就得到对一切实数 x 成立 $f(cx) = \cos\theta x$. 记 $\theta/c = a$, 并改写 cx 为 x, 就得到

$$f(x) = \cos ax.$$

若其中 $a = 0$, 即有 $f(x) = 1$, 则又得到前面所说的恒等于 1 的常值函数.

(2) $f(c) > 1$. 这时存在 $\theta > 0$, 使得 $f(c) = \cosh\theta$. 以下的证明与 (1) 类似, 从略. 当然这时需要双曲余弦函数的倍角和半角公式. 最后得到解 $f(x) = \cosh ax$, 其中 $a = \theta/c$.

于是达朗贝尔方程的连续解只有三类: (1) $f(x) \equiv 0$, (2) $f(x) = \cos ax$, (3) $f(x) = \cosh ax$. □

下面是正弦函数和余弦函数满足的函数方程.

习题 819 求对实数 x 和 y 的一切值满足方程组

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= f(x)f(y) - g(x)g(y), \\
g(x+y) &= f(x)g(y) + f(y)g(x),
\end{aligned}
$$

及条件

$$f(0) = 1 \text{ 和 } g(0) = 0$$

的所有连续有界函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$.

解 1　观察函数方程组和未知函数在 $x = 0$ 处应当满足的条件, 可见余弦函数和正弦函数即是满足条件的解. 虽然我们还不知道是否还有其他解, 但还是可以与欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ①联系起来考虑问题.

定义实自变量 x 的复值函数 (今后简称为实变复值函数):

① 虽然欧拉公式是复分析中的内容, 但也有许多数学分析教科书中对欧拉公式给出了证明. 一个简明扼要的介绍见 [17, 第七章].

$$G(x) = f(x) + \mathrm{i}g(x),$$

则对于 $f(x) = \cos ax$ 和 $g(x) = \sin ax$ 来说就有

$$G(x+y) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a(x+y)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}ay} = G(x) \cdot G(y).$$

由此启示我们直接利用给定的函数方程组, 可以看出实变复值函数 G 满足下面的简单函数方程:

$$\begin{aligned} G(x+y) &= f(x+y) + \mathrm{i}g(x+y) \\ &= [f(x)f(y) - g(x)g(y)] + \mathrm{i}[f(x)g(y) + f(y)g(x)] \\ &= [f(x) + \mathrm{i}g(x)] \cdot [f(y) + \mathrm{i}g(y)] = G(x) \cdot G(y). \end{aligned}$$

它与习题 812 的函数方程相同. 与该题一样可知, 若 G 于某一点为 0 就一定处处为 0. 又根据题设条件 $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ 得到 $G(0) = 1$, 这保证了 $G(x)$ 处处不等于 0.

于是就已经将求解两个未知函数的函数方程组问题归结为求解一个复值未知函数的函数方程问题.

由于自变量 x 仍然为实数, 因此柯西方法仍然有效. 于是在习题 812 中的许多中间结果的证明在这里仍然有效. 这样就对于正整数 n 得到 $G(nx) = [G(x)]^n$, $G(\frac{1}{n}x) = [G(x)]^{\frac{1}{n}}$, 又对于正整数 m, n 有 $G(\frac{m}{n}x) = [G(x)]^{\frac{m}{n}}$. 再利用 $G(x)G(-x) = G(0) = 1$ 又得到 $G(-\frac{m}{n}x) = [G(x)]^{-\frac{m}{n}}$. 在以上两式中令 $x = 1$ 代入, 就可以合并得到

$$G(\frac{m}{n}) = [G(1)]^{\frac{m}{n}},$$

其中 n 为正整数, m 取一切整数.

利用 f, g 有界的条件知道 $|G|$ 也有界, 因此就可以证明 $|G(1)| = 1$. 事实上, 如果有 $|G(1)| > 1$, 则对正整数 n 有 $|G(n)| = |G(1)|^n$, 因此 G 不可能有界. 又如果有 $0 < |G(1)| < 1$, 则 $|G(-n)| = |G(1)|^{-n}$, 因此 G 也不可能有界.

既然有 $|G(1)| = 1$, 则利用复数的指数形式, 就知道存在实数 a, 使得 $G(1) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$. 于是已经对于所有有理点 $r \in \mathbb{Q}$ 得到函数 G 的表达式:

$$G(r) = G(1)^r = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ar}.$$

对于无理点 x 可以用有理点列 $r_n \to x$. 由于 f, g 连续, 因此 G 也连续, 于是有

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} G(r_n) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ar_n}.$$

另一方面, 用欧拉公式就有

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}ar_n} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}| = |\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}| \cdot |\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(r_n - x)} - 1| \leqslant |\cos a(r_n - x) - 1| + |\sin a(r_n - x)| \to 0,$$

于是就对于一切 x 得到 $G(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}$. 用欧拉公式写出

$$G(x) = \cos ax + \mathrm{i}\sin ax,$$

即得到 $f(x) = \cos ax$ 和 $g(x) = \sin ax$, 其中 a 取任意实数即得到方程组的所有解. □

解 2 根据《习题集》中的提示, 考虑函数 $F(x) = f^2(x) + g^2(x)$.

这时可以发现有

$$\begin{aligned}F(x+y) &= f^2(x+y)+g^2(x+y)\\&= [f(x)f(y)-g(x)g(y)]^2+[f(x)g(y)+f(y)g(x)]^2\\&= [f^2(x)+g^2(x)]\cdot[f^2(y)+g^2(y)]\\&= F(x)F(y),\end{aligned}$$

又从题设条件知道有 $F(0)=1$, 于是又可以用习题 812 的结论知道有 $F(x)=a^x$, 其中 $a=F(1)>0$. 由于 f,g 有界, 因此 F 也有界, 从而只能是 $a=1$, 即得到

$$F(x)=f^2(x)+g^2(x)\equiv 1.$$

再在方程组中令 $y=-x$, 即有

$$1=f(x)f(-x)-g(x)g(-x), \tag{1.50}$$

$$0=f(x)g(-x)+f(-x)g(x). \tag{1.51}$$

将 (1.50) 乘以 $f(-x)$ 与 (1.51) 乘以 $g(-x)$ 相加, 得到

$$f(-x)=f(x)[f^2(-x)+g^2(-x)]=f(x),$$

即 f 为偶函数.

又将 (1.50) 乘以 $g(-x)$ 与 (1.51) 乘以 $f(-x)$ 相减, 则得到

$$g(-x)=-g(x)[g^2(-x)+f^2(-x)]=-g(x),$$

即 g 为奇函数.

在题设的方程组的第一个方程中将 y 改为 $-y$, 并与原方程相加, 在其中利用 f 为偶函数和 g 为奇函数, 这样就消去了 g, 而得到习题 818 的达朗贝尔方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

由于本题要求解 f 满足连续有界条件, 因此只能是 $f(x)=\cos ax$. 从 $f^2(x)+g^2(x)\equiv 1$ 就得到 $g(x)=\pm\sin ax$. □

注 题设中的条件 $f(0)=1$ 和 $g(0)=0$ 可以减弱为 f,g 不是恒等于 0 的解.

实际上从方程可见 $f(x)\equiv 0$ 和 $g(x)\equiv 0$ 是解. 除此之外, 在方程中用 $y=0$ 代入就得到

$$f(x)f(0)-g(x)g(0)=f(x),$$

$$f(x)g(0)+g(x)f(0)=g(x).$$

对于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不同时等于 0 的某个 x, 将上述方程组看成为关于未知量 $f(0),g(0)$ 的线性方程组, 则其系数行列式 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0$. 于是即可解出 $f(0)=1$ 和 $g(0)=0$.

习题 820 设 $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ 及 $\Delta^2 f(x)=\Delta[\Delta f(x)]$ 分别是函数 f 的一阶和二阶的有限差分.

证明, 如果函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 连续, 且 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$, 那么这个函数是线性的, 即 $f(x)=ax+b$, 其中 a 和 b 是常数.

解 1 (**归结法**) 条件 $\Delta^2 f(x)\equiv 0$ 就是方程

$$f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x)=0. \tag{1.52}$$

在 (1.52) 中令 $x=0$, 得到 $f(2\Delta x)=2f(\Delta x)-f(0)$. 将其中的 Δx 改记为 x, 则得到

$$f(2x)=2f(x)-f(0). \tag{1.53}$$

在 (1.52) 中令 $x+2\Delta x=2u$, $x=2v$, 则得到

$$f(2u)+f(2v)=2f(u+v).$$

对上式左边的每一项用 (1.53), 就得到

$$f(u)+f(v)=f(u+v)+f(0).$$

再将上式中的 u,v 改记为 x,y, 然后定义 $F(x)=f(x)-f(0)$, 则 F 满足的函数方程为习题 809 的柯西方程:

$$F(x+y)=F(x)+F(y).$$

由题设的连续性条件知 F 连续, 因此得到 $F(x)=Cx$, 其中 $C=F(1)=f(1)-f(0)$. 因此最后得到

$$f(x)=[f(1)-f(0)]x+f(0). \quad \Box$$

解 2 (柯西法概要) 在解 1 中得到 (1.53) 之后直接用柯西方法也是可行的. 先用数学归纳法证明

$$f(nx)-f(0)=n[f(x)-f(0)],$$

然后证明

$$f(\frac{1}{n}x)-f(0)=\frac{1}{n}\cdot[f(x)-f(0)]$$

和

$$f(\frac{m}{n}x)-f(0)=\frac{m}{n}\cdot[f(x)-f(0)],$$

这样就对于一切有理数 $\frac{m}{n}$ 得到

$$f(\frac{m}{n})-f(0)=\frac{m}{n}\cdot[f(1)-f(0)].$$

最后利用连续性取极限, 求出

$$f(x)-f(0)=[f(1)-f(0)]x. \quad \Box$$

1.10.2 补注

上一小节中的方法主要是柯西法和归结法. 其实, 只要具备一点最基本的微分和积分知识之后, 就可以使用求解函数方程的许多新方法. 这一小节即介绍其中的微分法, 其余方法可以参看 [21]. 这里要注意, 微分法并非只能用于求函数方程的可微解, 因为可以证明, 许多函数方程的连续解一定可微.

对于还没有学过微分和积分基本知识的读者来说, 在第一次阅读时可以跳过本小节, 在具备这些知识之后再来回顾这里的材料. 此外, 若其中涉及二阶线性常系数微分方程时, 虽然也可以直接求解, 但为简明起见下面将直接利用其通解表达式. 这在任何一本常微分方程教科书中都可以找到.

还是从习题 809 的柯西方程开始.

1. 用微分法求柯西方程的连续解

将方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的两边对 y 在 $[0,1]$ 上积分, 得到

$$\int_0^1 f(x+y)\,\mathrm{d}y = f(x) + \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y.$$

对于左边的积分作变量代换 $t=x+y$, 就可以将上述等式改写为

$$f(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y.$$

由于右边第一项中的 x 出现在积分上下限中, 而被积函数连续, 因此它是 x 的可微函数, 第二项是常数, 这样就证明了 f 可微. (同理还可以证明柯西方程的连续解一定无限次可微.) 两边求导就得到

$$f'(x) = f(x+1) - f(x) = f(1),$$

可见 $f(x)=f(1)x+b$. 又因 $f(0)=0$, 可知 $b=0$, 因此柯西方程的解即齐次线性函数 $f(x)=ax$, 其中 $a=f(1)$. □

注　在证明了柯西方程的连续解必定可微后, 可以直接在函数方程两边对 x (或 y) 求导来求解.

2. 用微分法求 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 的连续解

这是习题 812 的函数方程. 已知除了恒等于 0 的解之外, 其他解 $f(x)$ 处处大于 0, 且 $f(0)=1$.

与柯西方程的情况一样可以证明该函数方程的连续解一定可微 (且无限次可微), 然后对 y 求导得到 $f'(x+y)=f(x)f'(y)$. 令 $y=0$ 代入, 得到微分方程

$$f'(x) = f'(0)f(x).$$

改记 $f'(0)=k$, 并将上述方程乘以 e^{-kx}, 就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-kx}f(x)) = 0,$$

于是 $\mathrm{e}^{-kx}f(x)$ 恒等于一个常数. 由于一定有 $f(0)=1$, 因此这个常数只能是 1. 这样就得到

$$f(x) = \mathrm{e}^{kx} = a^x,$$

其中 $a=\mathrm{e}^k$. □

3. 用微分法求达朗贝尔方程的连续解

这就是习题 818 的函数方程

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

如前所说, 该方程有两个常值解 $f(x)\equiv 0$ 和 $f(x)\equiv 1$. 又已经知道满足该方程的不恒等于 0 的任何解 $f(x)$ 一定是偶函数, 且 $f(0)=1$.

由于假设 f 连续, 因此存在 $\varepsilon>0$, 使得积分 $\int_0^\varepsilon f(x)\,\mathrm{d}x>0$. 在函数方程两边关于 y 从 0 积分到 ε, 就有

$$\int_0^\varepsilon f(x+y)\,\mathrm{d}y + \int_0^\varepsilon f(x-y)\,\mathrm{d}y = 2f(x)\int_0^\varepsilon f(y)\,\mathrm{d}y.$$

对左边的两个定积分分别作变量代换 $t = x+y$ 和 $t = x-y$, 就可以将上述等式改写为

$$f(x) = \frac{1}{2\int_0^\varepsilon f(y)\,\mathrm{d}y}\Big(\int_x^{x+\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t\Big),$$

于是从 f 连续可知 f 可微, 又进而知道 f 无穷次可微.

以下还是从达朗贝尔方程出发. 对其两边的 y 求二次导数, 得到

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y).$$

令 $y = 0$ 代入, 得到关于 $f(x)$ 的二阶常系数线性微分方程

$$f''(x) - f''(0)f(x) = 0.$$

已知 $f(0) = 1$. 由于 f 为可微偶函数时, f' 必是奇函数, 因此 $f'(0) = 0$. 这样就得到二阶方程的初始条件为 $f(0) = 1$ 和 $f'(0) = 0$.

以下分三种情况讨论.

(1) $f''(0) = 0$, 则 $f''(x) \equiv 0$, 因此 f 是线性函数. 满足初始条件的解只能是 $f(x) \equiv 1$.

(2) $f''(0) < 0$. 记 $k = f''(0)$, 并作自变量代换 $t = \sqrt{-k}x$. 记 $g(t) = f(\frac{t}{\sqrt{-k}})$, 又记 g 关于 t 的导数为 $\dot{g}$, $\ddot{g}$, 则方程 $f'' - kf = 0$ 就变成为

$$\ddot{g} + g = 0,$$

且满足初始条件 $g(0) = 1$ 和 $\dot{g}(0) = 0$.

利用常微分方程中的现成结果, 上述方程的通解是

$$g(t) = C_1\cos t + C_2\sin t,$$

用 $g(0) = 1$ 和 $\dot{g}(0) = 0$ 就可以确定出 $C_1 = 1$ 和 $C_2 = 0$. 因此解 $g(t) = \cos t$. 于是得到达朗贝尔方程的解为

$$f(x) = g(\sqrt{-k}x) = \cos(\sqrt{-k}x).$$

(3) $f''(0) > 0$. 同样记 $k = f''(0)$, 并作自变量代换 $t = \sqrt{k}x$. 记 $g(t) = f(\frac{t}{\sqrt{k}})$, 又记 g 关于 t 的导数为 $\dot{g}$, $\ddot{g}$, 则方程 $f'' - kf = 0$ 就变成为

$$\ddot{g} - g = 0,$$

且满足初始条件 $g(0) = 1$ 和 $\dot{g}(0) = 0$.

上述方程的通解是

$$g(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t},$$

用 $g(0) = 1$ 和 $\dot{g}(0) = 0$ 就可以确定出 $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. 因此解 $g(t) = \cosh t$. 于是得到达朗贝尔方程的解为

$$f(x) = g(x\sqrt{k}) = \cosh(\sqrt{k}x). \quad \square$$

4. 用微分法求解习题 819

这里也有两种解法, 即在复数域中或在实数域中求解. 下面对前者只作概要介绍.

若在复数域中, 则如前面的解 1 那样引入实变复值函数 $G = f + \mathrm{i}g$, 然后仿照习题 812 做下去即可. 只是这里需要有对于实变复值函数进行积分和求导等运算的公式. 这些都很简单, 例如 $(f+\mathrm{i}g)' = f' + \mathrm{i}g'$ 等等. 同样对于实变复值函数 f 有

$$(\mathrm{e}^f)' = f'\mathrm{e}^f,$$

这只要用欧拉公式就可以得到.

具体来说, 即先建立 $G(x)$ 的可微性, 然后从 $G(x+y) = G(x)G(y)$ 对 y 求导, 再令 $y = 0$ 得到 $G'(x) = G'(0)G(x)$, 解得 $G(x) = \mathrm{e}^{G'(0)x}$. 由于 $|G(x)| = 1$, 因此存在实数 a 使得 $G'(0) = \mathrm{i}a$, 这样就求出了所要的答案.

下面对于在实数域中如何用微分法求解作介绍.

首先将两个方程的两边在 $[0,\varepsilon]$ 上对 y 求积, 并对于左边的积分作变量代换 $x + y = t$, 得到

$$\int_x^{x+\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\int_0^\varepsilon f(y)\,\mathrm{d}y - g(x)\int_0^\varepsilon g(y)\,\mathrm{d}y,$$
$$\int_x^{x+\varepsilon} g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)\int_0^\varepsilon g(y)\,\mathrm{d}y + g(x)\int_0^\varepsilon f(y)\,\mathrm{d}y.$$

利用 $f(0) = 1$ 和 f, g 连续, 取 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\left(\int_0^\varepsilon f(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 + \left(\int_0^\varepsilon g(y)\,\mathrm{d}y\right)^2 \neq 0.$$

于是就可以解出 $f(x)$ 和 $g(x)$, 并从表达式直接看出 f 和 g 无穷次可微.

将函数方程组 $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ 对 x, y 分别求导得到

$$f'(x+y) = f'(x)f(y) - g'(x)g(y) = f(x)f'(y) - g(x)g'(y),$$
$$g'(x+y) = f'(x)g(y) + f(y)g'(x) = f(x)g'(y) + f'(y)g(x),$$

然后令 $y = 0$ 代入, 并记 $g'(0) = a$, 这样就得到 $f'(x) = -ag(x)$ 和 $g'(x) = af(x)$. 将这两个等式合并, 就得到

$$f''(x) = -a^2 f(x), \quad g''(x) = -a^2 g(x),$$

这表明 f 和 g 满足同一个二阶常系数线性常微分方程. 为方便起见另记为

$$F''(x) + a^2 F(x) = 0. \tag{1.54}$$

对表达式 $f^2(x) + g^2(x)$ 求导并利用上面的结果, 就有

$$[f^2 + g^2]' = 2ff' + 2gg' = 2f(-ag) + 2g(af) = 0,$$

又利用 $f(0) = 1$ 和 $g(0) = 0$, 可见得到 $f^2(x) + g^2(x) \equiv 1$. 如前面的习题 189 的解 2 中的 (1.50) 和 (1.51) 那样知道 f 为偶函数, g 为奇函数. 于是 f' 为奇函数, 就有 $f'(0) = 0$.

这样就得到 f 的初始条件为 $f(0) = 1$ 和 $f'(0) = 0$, g 的初始条件为 $g(0) = 0$ 和 $g'(0) = a$.

利用二阶常系数线性微分方程 (1.54) 的通解为

$$F(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax,$$

其中 C_1, C_2 为待定常数, 就可以用 f 和 g 的初始条件分别得到所要的答案:

$$f(x) = \cos ax, \quad g(x) = \sin ax. \quad \square$$

第二章 一元微分学

内容简介 这一章是一元函数的微分学, 其中包含了导数与微分、微分学中值定理、泰勒公式以及微分学在函数研究中的多方面应用.

§2.1 显函数的导数 (习题 821–1033)

内容简介 本节的习题从导数的定义开始, 包含了大量的求导数的计算题, 然后还有导数在理论和应用方面的习题.

下面按照《习题集》的原有顺序安排分成几个小节.

2.1.1 导数的定义 (习题 821–833)

本小节包括关于自变量和因变量的增量、导数与平均变化率的关系等概念, 同时还要求按照定义具体计算一些导数, 以及反三角函数等的导数公式的推导.

习题 828 从导数定义出发, 直接求下列函数的导数:

(a) x^2; (b) x^3; (c) $\frac{1}{x}$; (d) $\sqrt{x}$; (e) $\sqrt[3]{x}$;

(f) $\tan x$; (g) $\cot x$; (h) $\arcsin x$; (i) $\arccos x$; (j) $\arctan x$.

解 (只给出部分答案) 此题要求对于列出的 10 个常用函数, 直接推导它们的导数计算公式. 其中第一行的 5 个题都是幂函数, 下面给出 (e) 的解答.

(e) 求 $\sqrt[3]{x}$ 的导数. 先看 $x>0$ 的情况. 这时由于 $\Delta x\to 0$, 因此当 Δx 充分小时 $x+\Delta x$ 与 x 同号. 于是差商为

$$\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{(x+\Delta x)x}+\sqrt[3]{x^2}},$$

其中利用了函数极限定义中当 $\Delta x\to 0$ 时不允许 $\Delta x=0$, 因此在有理化分子后可以约去在分子分母中同时出现的 Δx, 然后就容易看出当 $\Delta x\to 0$ 时差商的极限为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

对于 $x<0$ 回顾以上计算过程, 可见答案相同. (这与 §2.1.4 的习题 1027 的内容一致, 即可微奇函数的导函数为偶函数.)

最后还需要考虑在 $x=0$ 处的导数. 这时的差商一开始就是 $\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}}$, 可见导数为 $+\infty$ [①]. (建议参看附录一中的习题 277 中的幂函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 和 $\sqrt[3]{x^2}$ 的图像.) □

① 这里按照习惯将 $(\Delta x)^2$ 简记为 Δx^2.

(f) 求 $\tan x$ 的导数. 这就是本书在 §1.5.5 中已经讲解过的极限计算题 484.

(g) 求 $\cot x$ 的导数. 这就是 §1.5 中的极限计算题 485, 其中需要余切函数的和角公式, 推导也是不难的.

(h) 求 $\arcsin x$ 的导数.

解　在我国的多数教科书中, 反三角函数的导数公式是用一般反函数求导公式推出的. 本题要求作出直接推导, 这可如下进行.

(1) 先考虑 $|x|<1$ 的情况. 问题就是如何处理差商的分子, 即 y 的增量

$$\Delta y = \arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x.$$

计算 Δy 的正弦值, 得到

$$\sin(\Delta y) = (x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2},$$

其中 $\sin(\arcsin(x+\Delta x)) = x+\Delta x$ 和 $\sin(\arcsin x) = x$ 是显然的, 而在计算两个余弦 $\cos(\arcsin(x+\Delta x)) = \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$ 和 $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ 时, 考虑到 $\arcsin x$ 的取值范围为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 因此其中的根号前均取正号.

利用 $y = \arcsin x$ 为连续函数, 因此 $\Delta y \to 0\ (\Delta x \to 0)$. 于是就保证有

$$\arcsin(\sin(\Delta y)) = \Delta y.$$

这里可以参看前面 §1.8.2 中列出的 (1.46) 中的第二个恒等式, 也就是

$$\arcsin(\sin x) = x,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是就得到 y 的增量的表达式为:

$$\Delta y = \arcsin\left[(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}\,\right].$$

若将上式方括号内的表达式记为 u, 则当 $\Delta x \to 0$ 时有 $u \to 0$. 然后利用等价关系 $\arcsin u \sim u\ (u \to 0)$, 就可以计算反正弦函数的差商如下:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}\\
&= \sqrt{1-x^2} + x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x}\\
&= \sqrt{1-x^2} + x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}\\
&= \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

即已经求出 $|x|<1$ 时有 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) 对于 $x = \pm 1$, 只写出 $x=1$ 情况的计算. 这时 $\Delta x < 0$, 与 (1) 类似地可以得到 $\Delta y = \arcsin(-\sqrt{1-(1+\Delta x)^2}) \sim -\sqrt{-2\Delta x - \Delta x^2}\ (\Delta x \to -0)$ 以及

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \sim \frac{-\sqrt{-2\Delta x - \Delta x^2}}{\Delta x},$$

可见当 $\Delta x \to -0$ 时极限为 $+\infty$. 类似地可以推导得到这也是 $x=-1$ 时的导数值. (建议参看 §1.8.2 的习题 770 中关于反正弦函数的讲解与附图.)　□

(i) 和 (j) 分别是直接推导反余弦函数和反正切函数的导数公式, 其过程与上面对于反正弦函数的做法类似, 其中所需的工具可参考 §1.8.2.

习题 832 已知函数 $f(x)$ 在点 a 处可导, 求 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

分析 可导和可微分是两个不同的概念, 将它们区分开来是必要的. 对于一元函数来说, 可以证明可导等价于可微, 但并不能说它们在概念上就相同了. 对这两个概念的不同和它们之间的联系的清晰了解, 对于今后学习多元微分学也是必要的.

《习题集》中从本章开始就将可导称为可微, 而微分概念要到后面的 §2.4 中才引入, 因此造成了不必要的混乱. 为此本书在 §2.4 之前只用可导的说法.

我们认为对本题内容的正确理解应当是按照 §2.4 的可微定义证明这时函数一定可导, 它是关于微分的一个基本命题. (因教科书中都有其证明, 这里从略.) 否则在可微就是可导的定义下, 则无需再做. 或者这里假定读者在学习导数的定义时, 不知道可以将 $x-a$ 看成为增量 Δx, 于是引入 $x-a=\Delta x$, 即 $x=a+\Delta x$, 就得到结果为 $f'(a)$. □

习题 833 证明, 如果函数 $f(x)$ 可导, 且 n 为正整数, 那么

$$\lim_{n\to\infty} n\Big[f\Big(x+\frac{1}{n}\Big)-f(x)\Big]=f'(x).$$

反之, 如果对于函数 $f(x)$ 存在上述极限, 那么是否可以断定这个函数有导数? 并以狄利克雷函数 (见习题 234 和 734) 为例加以讨论.

解 前半题是明显的, $\dfrac{1}{n}\to 0$ 只是 $\Delta x\to 0$ 的一种特殊情况. 根据函数极限的海涅归结原理知道, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充分必要条件就是对每一个数列 $x_n\to a$, $x_n\neq a\ (x_n\in X, n=1,2,\cdots)$, 成立 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$. (这在《习题集》的 §1.5 的开始的说明词中有, 只不过没有称之为归结原理.)

后半题的答案是"不能". 以题中提供的狄利克雷函数 $\chi(x)$ 为例, 在 §1.3.5 的习题 234 已指出它以任何有理数为其周期. 当 x 为有理数时, $x+\dfrac{1}{n}$ 一定是有理数; 而当 x 为无理数时, 则 $x+\dfrac{1}{n}$ 也一定是无理数. 因此始终有 $\chi\Big(x+\dfrac{1}{n}\Big)=\chi(x)$, 于是题中的极限只能是 0. 然而 $\chi(x)$ 处处不连续 (见 §1.7.3 的习题 734), 因此处处不可导. □

2.1.2 导数的计算 (习题 834–989)

求导数计算是高等数学中最容易、同时也是最基本的一项技能. 凡是学过微积分的人都明白, 没有熟练的导数计算本领, 就谈不上学习微积分中其他任何一项重要的计算技巧. 求导数的学习过程与我们从小时候起如何记住九九表和学会乘除法是非常类似的.

习题 844 证明公式: $\Big(\dfrac{ax+b}{cx+d}\Big)'=\dfrac{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

解 1 由题设可知 c,d 不能同时为 0. 对分式求导就得到

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}. \quad \square$$

解 2 这道题也是本节求导计算中第一次出现分式函数的情况, 因此顺便指出, 对分式函数的导数计算有两种方法, 即按照公式

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2},$$

或者将分式函数看成为 $u(x)\cdot\dfrac{1}{v(x)}$, 然后用乘积函数的求导法则如下

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \left(u(x)\cdot\frac{1}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{v(x)} - \frac{v'(x)}{[v(x)]^2}\cdot u(x).$$

建议初学者对这两种方法都要学会.

对本题用后一个公式就有

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a}{cx+d} - \frac{c}{(cx+d)^2}\cdot(ax+b) = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}. \quad \square$$

解 3 $c=0$ 时可直接验证. 当 $c\neq 0$ 时可利用 §1.4.1 的习题 251 提示的方法, 即先分解分式线性函数为

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)},$$

然后求导即可. □

习题 851 求函数 $y = x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ 的导数.

解 这三项都是幂函数, 为了便于用公式 $x^\mu = \mu x^{\mu-1}$, 建议按照如下写法求导, 这样可以避免计算错误.

$$\begin{aligned} y' &= (x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}})' \\ &= 1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ &= 1+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}. \quad \square \end{aligned}$$

习题 855 求函数 $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$ 的导数.

解 读者不难证明, 对于三个函数乘积的求导公式为

$$(u(x)v(x)w(x))' = u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x),$$

并可以推广得到对于一般的 n 个函数乘积的求导公式.

于是有

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}+(1+x)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} \\ &\qquad + (1+x)\sqrt{2+x^2}\cdot\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \\ &= \sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}+\frac{x(1+x)\sqrt[3]{3+x^3}}{\sqrt{2+x^2}}+\frac{x^2(1+x)\sqrt{2+x^2}}{\sqrt[3]{(3+x^3)^2}} \\ &= \frac{3x^5+2x^4+4x^3+8x^2+3x+6}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}. \quad \square \end{aligned}$$

习题 858 求函数 $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$ 的导数.

解 将根号下的分式看成为 u, 又将 u 看成为 $\dfrac{1+v}{1-v}$, 其中 $v=x^3$, 且利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{2}{1-v}-1\right)=\frac{2}{(1-v)^2},$$

就可以如下用链式法则求导:

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}\Big|_{u=\frac{1+x^3}{1-x^3}}\cdot\frac{2}{(1-v)^2}\Big|_{v=x^3}\cdot 3x^2\\&=\frac{2x^2}{(1-x^3)^2}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^2}=\frac{2x^2}{1-x^6}\cdot\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.\quad\Box\end{aligned}$$

注 关于复合函数求导的链式法则是导数计算中的主要工具之一, 希望初学者重视它的使用. 如本题所示, 两次利用链式法则就很容易得到答案. 所谓“链式法则”的意思就是环环相扣, 可多次应用.

习题 884 求函数 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\ (a>0,b>0)$ 的导数.

解 对此题用对数求导法. 由于 $(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$, 因此就有

$$\begin{aligned}y'&=y(\ln y)'=y[x\ln\frac{a}{b}+a(\ln b-\ln x)+b(\ln x-\ln a)]'\\&=y\left(\ln\frac{a}{b}-\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right)\\&=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\cdot\left(\ln\frac{a}{b}+\frac{b-a}{x}\right).\quad\Box\end{aligned}$$

注 对数求导法是一种重要的计算工具. 这里指出该方法使用中的几点注意事项:

(1) 在对可导函数 $f(x)$ 取对数时, 若不能确定其大于 0, 则应取绝对值后再取对数, 然后求导.

(2) 由于 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$, 因此就有

$$(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

这时在右边不出现绝对值号, 因此对数求导法可写为

$$f'(x)=f(x)\cdot(\ln|f(x)|)'.$$

(3) 上述计算在 $f(x)$ 保号的每一个区间上都有效. 由于 $f(x)$ 可导必定连续, 因此在 $f(x)\neq 0$ 的每个点处都有一个邻域, 使得 $f(x)$ 保号.

习题 885 求函数 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$ 的导数.

解 直接求导即有

$$y'=a^ax^{a^a-1}+\ln a\cdot ax^{a-1}a^{x^a}+(\ln a)^2\cdot a^xa^{a^x}.\quad\Box$$

注 对于 a^{b^c} 最重要的是要正确理解它的意义, 即 $a^{b^c}=a^{(b^c)}$, 而不是 $(a^b)^c=a^{bc}$.

习题 899 求函数 $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ 的导数 $(a>0,b>0)$.

解 在将分式的对数转化为分子的对数减分母的对数之前，应当先注意分式何时大于 0. 从分子分母同号的要求出发，可以看出本题的分子分母不可能同时小于 0, 从而只能同时大于 0. 由此即可确定其定义域为 $|x|<\sqrt{\frac{a}{b}}$. 然后可计算得到

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{ab}}[\ln(\sqrt{a}+x\sqrt{b})-\ln(\sqrt{a}-x\sqrt{b})]'$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\left[\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}-\frac{-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\right]=\frac{1}{a-bx^2}.\quad \square$$

习题 921 求函数 $y=\arcsin(\sin x)$ 的导数.

解 1 直接用公式计算则有

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{|\cos x|}=\operatorname{sgn}(\cos x),$$

在 $\cos x\neq 0$ 处成立. 由此可见在使得 $\cos x=0$ 的点处，两个单侧导数不相等，因此导数不存在 (这里用了习题 1258.1 的单侧导数极限定理). □

解 2 从反正弦函数的定义知道在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时有 $\arcsin(\sin x)=x$, 在 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时利用 $\sin x=\sin(\pi-x)$, 且 $|\pi-x|\leqslant\frac{\pi}{2}$, 因此有 $\arcsin(\sin x)=\pi-x$. 然后从 $\arcsin(\sin x)$ 为周期 2π 的函数就得到 $y(x)$ 的表达式为

$$y=\arcsin(\sin x)=\begin{cases}x-2k\pi, & (2k-\frac{1}{2})\pi\leqslant x\leqslant(2k+\frac{1}{2})\pi,\\ -x+(2k+1)\pi, & (2k+\frac{1}{2})\pi\leqslant x\leqslant(2k+\frac{3}{2})\pi.\end{cases}$$

它的图像见 §1.8.2 的 170 页中，关于公式 (1.46) 的附图 (a) (又见附录一的习题 318). 于是 y 在所有的点 $(2k\pm\frac{1}{2})\pi$ 处不可导，而在其他点处的导数为

$$y'=[\arcsin(\sin x)]'=\begin{cases}1, & (2k-\frac{1}{2})\pi<x<(2k+\frac{1}{2})\pi,\\ -1, & (2k+\frac{1}{2})\pi<x<(2k+\frac{3}{2})\pi.\end{cases}\quad \square$$

注 解 1 很简短，解 2 则对为什么如此作出了解释，各有千秋.

习题 926 求函数 $y=\operatorname{arccot}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$ 的导数.

解 1 直接用链式法则求导得到

$$y'=-\frac{1}{1+\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)^2}$$
$$\times\frac{(\cos x-\sin x)(\sin x-\cos x)-(\cos x+\sin x)(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)^2}=1,$$

即在 $y(x)$ 有定义处的导数恒等于 1. □

解 2 利用余切函数的和角公式 $\cot(x+y)=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot x+\cot y}$ (见注) 和

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=\frac{1+\cot x}{1-\cot x}=\frac{\cot x\cdot(-1)-1}{\cot x+(-1)}=\cot(x-\frac{\pi}{4}),$$

因此在 $0<x-\frac{\pi}{4}<\pi$ 时就有 $y=x-\frac{\pi}{4}$. 这就是 $\frac{1}{4}\pi<x<\frac{5}{4}\pi$ 时的函数表达式. 这里利用了 §1.8.2 中的 (1.49) 的第二个恒等式, 即

$$\operatorname{arccot}(\cot x)=x,\ 0<x<\pi.$$

它是周期 π 的函数 (其图像见 171 页的附图 (d)), 因此就得到函数 y 的表达式为:

$$y=\operatorname{arccot}\Big(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\Big)=x-(k+\frac{1}{4})\pi,\ (k+\frac{1}{4})\pi<x<(k+\frac{5}{4})\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

而在所有点 $(k+\frac{1}{4})\pi$ 处没有定义, 这样就得到与解 1 相同的答案. □

注 $\cot(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)}=\frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\sin x\cos y+\cos x\sin y}=\frac{\cot x\cot y-1}{\cot y+\cot x}$.

习题 961 求函数 $y=x+x^x+x^{x^x}$ $(x>0)$ 的导数.

解 直接求导, 并对后两项用对数求导法得到

$$\begin{aligned}y'&=1+x^x(x\ln x)'+x^{x^x}(x^x\ln x)'\\&=1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}[(x^x)'\ln x+x^{x-1}]\\&=1+x^x(1+\ln x)+x^{x^x}\cdot x^x[\frac{1}{x}+\ln x+(\ln x)^2].\end{aligned}$$ □

习题 963 求函数 $y=\sqrt[x]{x}$ 的导数.

解 1 用对数求导法得到

$$\begin{aligned}y'&=y(\ln y)'=y\Big(\frac{1}{x}\ln x\Big)'=y\Big(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\Big)\\&=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).\end{aligned}$$ □

解 2 (对数求导法的另一种形式) 将幂指函数写成指数形式后求导得到

$$y'=(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x})'=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$ □

习题 972 引入中间变量 $u=\cos^2 x$, 求函数 $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$ 的导数.

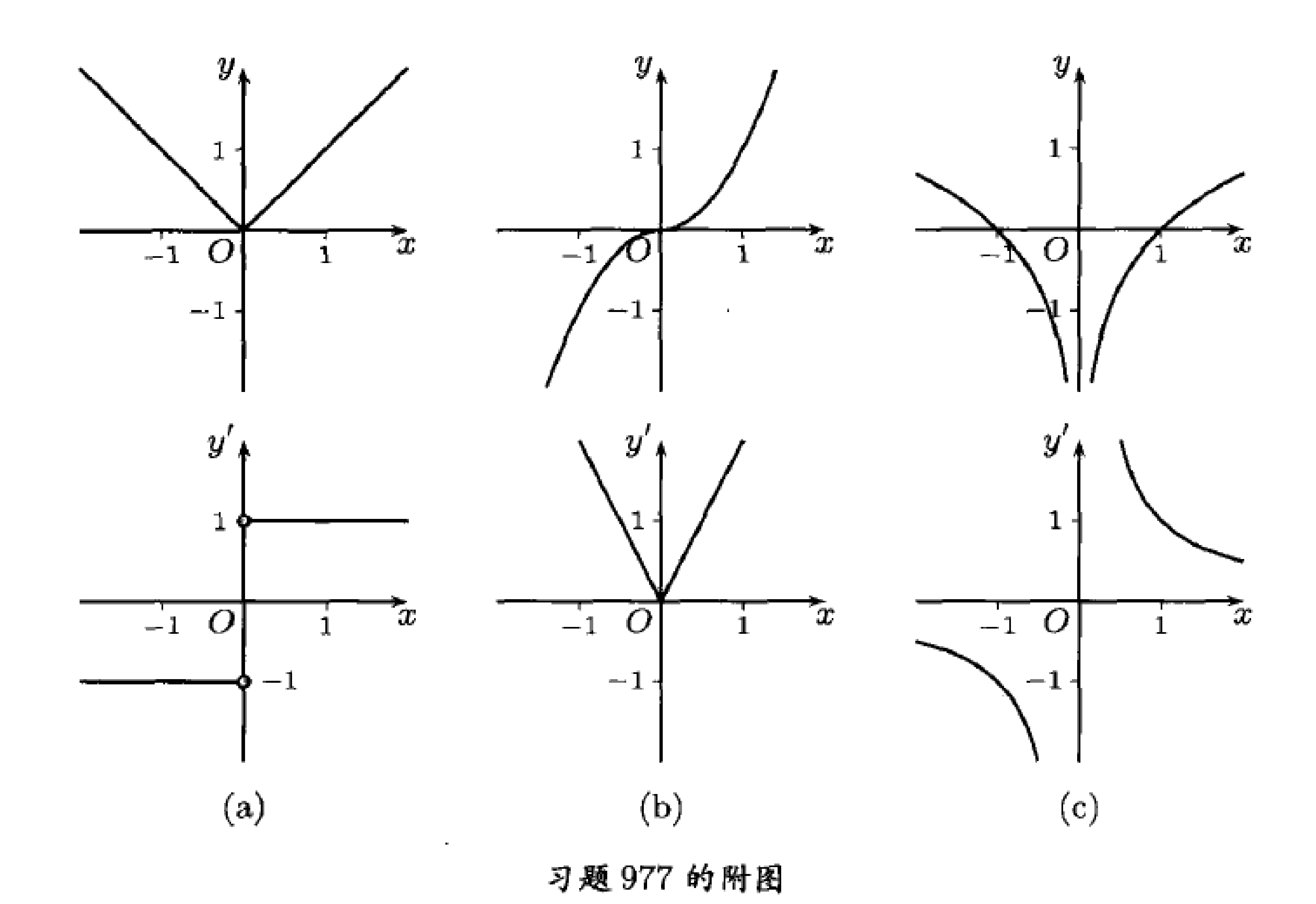
解 这是利用链式法则的有效方法. 于是就有

$$\begin{aligned}y'_x&=[\ln(u+\sqrt{1+u^2})]'_u\Big|_{u=\cos^2 x}\cdot(\cos^2 x)'_x\\&=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\Big|_{u=\cos^2 x}\cdot(-\sin 2x)=-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.\end{aligned}$$ □

习题 977 求下列函数的导数, 并作这些函数及其导函数的图像.

(a) $y=|x|$; (b) $y=x|x|$; (c) $y=\ln|x|$.

解 由于计算很简单, 这里只提供它们的图像. 如附图所示, 将每一个小题的导函数图像列在其函数图像的下方. 其中小题 (a),(c) 的函数为偶函数, 其导函数为奇函数, 小题 (b) 的函数为奇函数, 其导函数为偶函数. □

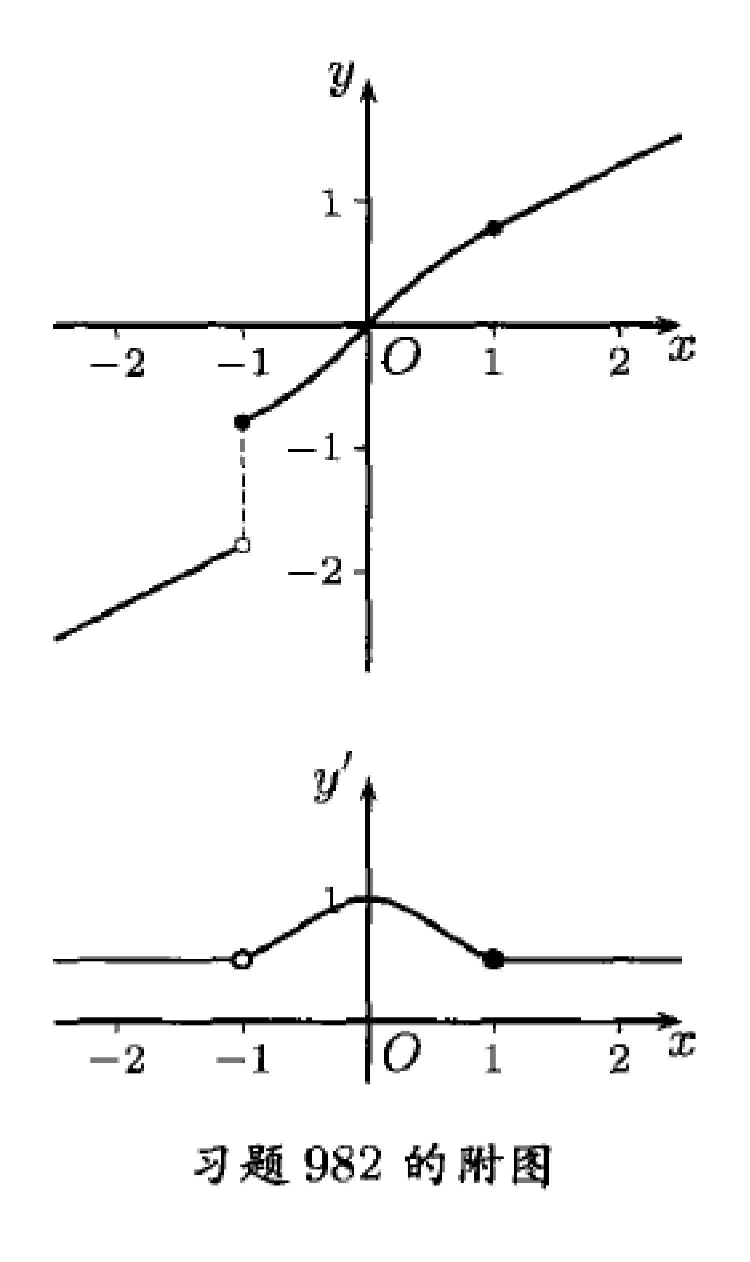


习题 977 的附图

习题 982 求函数

$$y=\begin{cases}\arctan x, & |x|\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}x+\dfrac{x-1}{2}, & |x|>1\end{cases}$$

的导数, 并作函数及其导函数的图像.



习题 982 的附图

解　如附图所示, 在 $[-1,1]$ 上有 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$, 其中在 $x=1$ 处有左侧导数, 在 $x=-1$ 处有右侧导数. 它们的值都是 $1/2$.

在点 $x=1$ 处 $y(x)$ 连续, 在 $x>1$ 时有 $y'=\dfrac{1}{2}$, 同时可以直接计算出点 $x=1$ 处的右侧导数为 $\dfrac{1}{2}$, 与该点的左侧导数相等, 因此存在 $y'(1)=\dfrac{1}{2}$.

在 $x<-1$ 时仍然有 $y'=\dfrac{1}{2}$, 但由于 $y(-1-0)=-1-\dfrac{\pi}{4}$, 而与 $y(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$ 不相等, 因此 y 在点 $x=1$ 处左侧不连续, 从而在该点不可导.

在附图下方的导函数图像中, 我们看到在 $x=-1$ 处导数不存在, 这与在点 $x=1$ 处存在导数且导函数在该处连续是不一样的. □

注　导函数 $y'(x)$ 在点 1 和点 -1 处都存在极限, 且都等于 $\dfrac{1}{2}$, 但由于 $y(x)$ 在点 1 处连续, 而在点 -1 处不连续, 因此结论完全不同. 这恰好为一元微分学中的导数极限定

理提供了两个例子. 初学者可以在学习了 §2.6.4 的习题 1258.1 之后再回顾这里的说明. 此外还可以参看 [23] 上册的命题 7.1.7 及其后的进一步内容.

习题 987 证明, 求 n 阶行列式的如下求导规则:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \cdots & f_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

解 先复习一下 n 阶行列式的定义. 根据定义, 等式左边就是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x),$$

其中的和式共有 $n!$ 项, 每一项是从每行每列中各取一个元的乘积, 在乘积的 n 个因子的下标中的第一个行指标按从小到大自然排列, 第二个列指标记为 $j_1, j_2, \cdots, j_n$, 它是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. $\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$ 是这个排列的逆序数, 即发生较大的数排在较小的数前面的次数之和. 当逆序数为奇数时这一项取负号, 而当逆序数为偶数时取正号.

然后只要根据对于 n 个函数乘积的求导法则, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)) = \sum_{k=1}^{n}u_1(x)\cdots u'_k(x)\cdots u_n(x),$$

就可以得到行列式的导数为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)f_{2j_2}(x)\cdots f_{nj_n}(x)\\ =&\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}f_{1j_1}(x)\cdots f'_{kj_k}(x)\cdots f_{nj_n}(x)\right),\end{aligned}$$

而右边就是 n 个行列式之和, 其中第 k 个行列式是将原行列式的第 k 行换为其导函数所得到的. □

2.1.3 杂题 (习题 990–1023)

这里包含了有关导数的多种类型的习题, 其中有带有理论性质的习题, 还有关于单侧导数的计算题. 与上一小节不同, 这里的多数习题不是单纯套用公式的计算题.

前面的习题 977 和习题 979–983 中除了计算函数 f 的导函数 f' 之外, 还要求作出二者的图像. 这实际上就是提示初学者, 要注意函数及其导函数的图像之间的联系. 下面的习题是这个方向上的一般化.

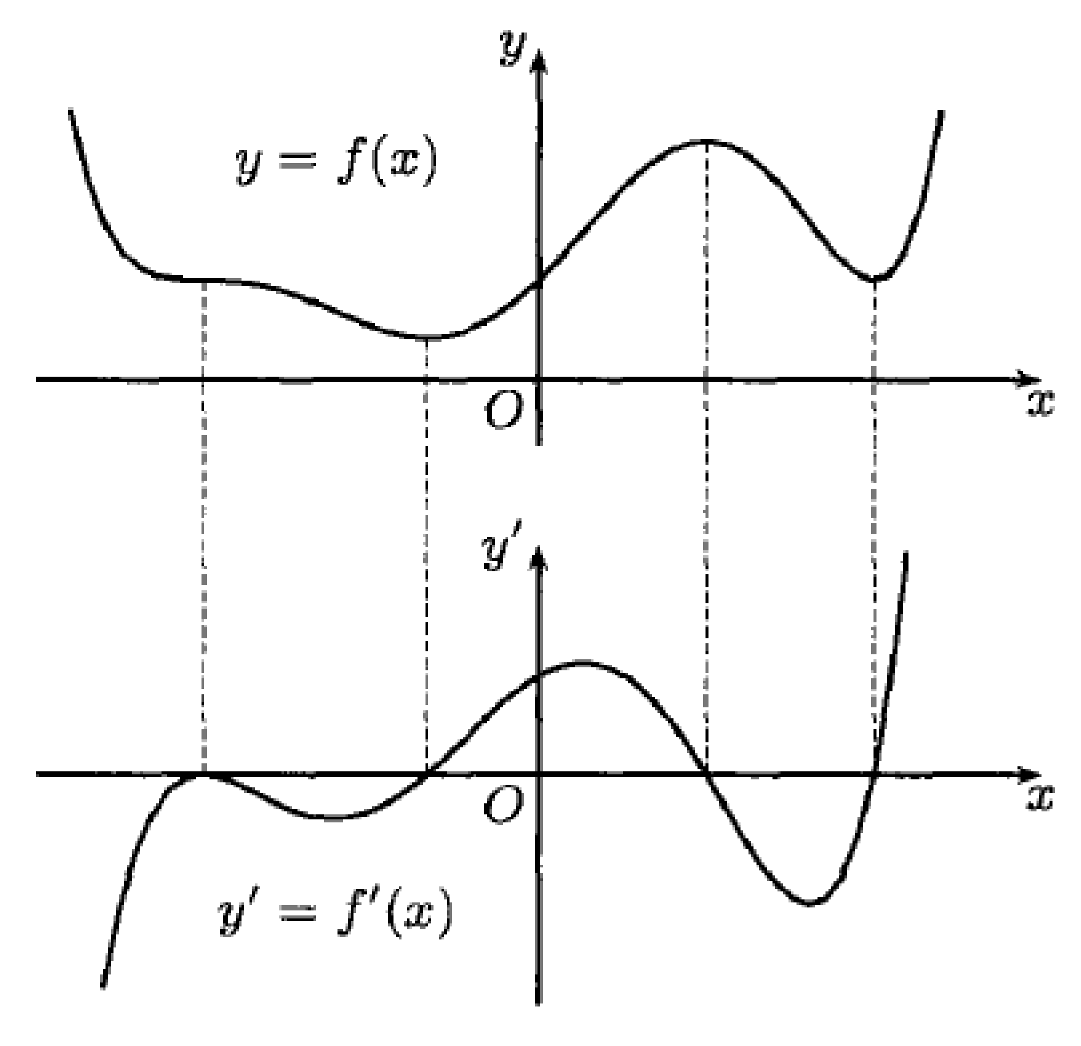
这里假定读者已经具有关于函数的极值点和极值的知识. 这方面的习题见后面的 §2.11 和 §2.13.

习题 990 已知函数的图像, 近似地作出它的导函数的图像.

解 在附图的上方作出了已知函数 $y=f(x)$ 的图像. 由于常值函数的导函数恒等于 0, 因此若将 $y=f(x)$ 的图像作上下平移, 则对其导函数没有影响.

根据导数的几何意义, 在 f 单调递增的区间上 $y'\geqslant 0$, 而在 f 单调递减的区间上 $y'\leqslant 0$. 特别在 $y=f(x)$ 的极值点处 $f'(x)=0$.

若读者还具有函数凹凸性的知识, 则就可以根据 $f(x)$ 的图像凹凸来确定导函数 $f'(x)$ 为单调递减 (递增), 特别是 f 的图像的拐点对应于 f' 的极值点.



习题 990 的附图

在附图中的 4 条垂直虚线将 $f(x)$ 的极值点 (与导数为 0 的一个拐点) 与 $f'(x)$ 的零点直接相联系. 这提示我们将 f 和 f' 的图像作附图中那样的上下配置是很有好处的.

此外, 这里的导函数 $f'(x)$ 的数值大小在目前并不重要, 本题的目的只是确定其定性方面的特征. 因此在附图中的坐标轴都没有注明标度尺寸的大小. □

注 习题 990 很有意义. 实际上它是在导数应用中的一项技能. 当代著名数学家阿诺尔德在"数学的基本要求"一文中列出了对物理专业学生的最低限度的数学的一百个问题①, 其中第一题的内容为:

"随手画出一条曲线, 试画出其导函数和原函数的图形."

它的前半题就是这里的习题 990.

接下来的一道题是数学分析中的常用例题.

习题 991 证明, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有不连续的导函数.

解 如附图的分图 (a) 所示, 用粗黑曲线画出的 $f(x)$ 的图像夹在用虚线画出的两条抛物线 $y=\pm x^2$ 之间. 为清楚起见在分图 (b) 中将原点附近的图像加以放大. (分图 (a) 中的直线 $y=x$ 是 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的斜渐近线.)

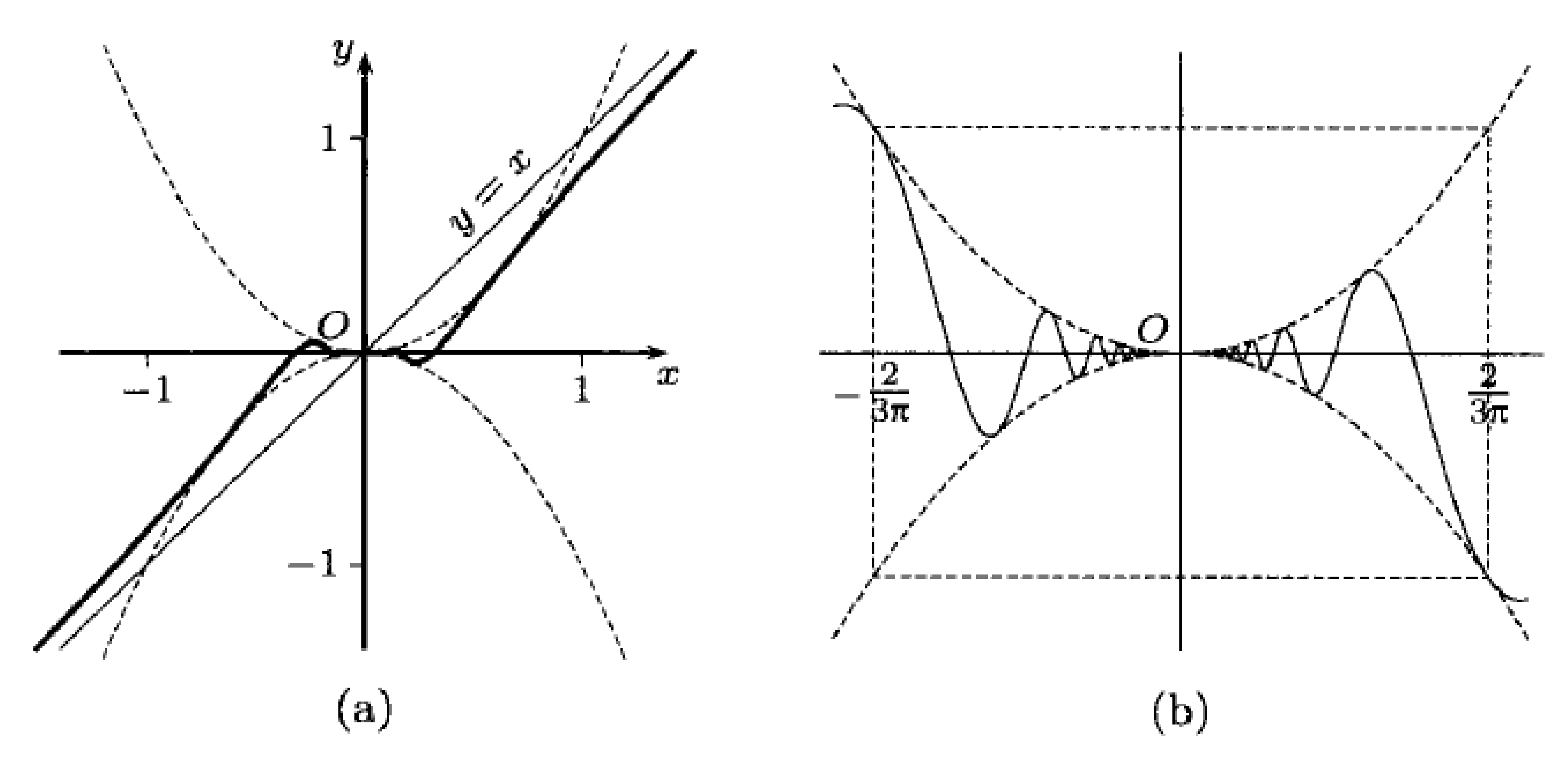
在 $x\neq 0$ 时可以用求导公式直接得到

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

在上述表达式中令 $x\to 0$, 可见不存在极限. 因此 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的第二类不连续点.

然而在点 $x=0$ 处 f 是可导的. 从附图可见, 连接点 $(0,0)$ 和 $(x,f(x))$ $(x\neq 0)$ 的割线当 $x\to 0$ 时将会作无限次摆动, 摆动的幅度趋于 0, 最终趋于具有水平斜率的极限位置, 即 $y=0$. 这就是 $f(x)$ 的图像被一对抛物线 $y=\pm x^2$ 夹在中间的结果.

① 该文及其所附的一百个题见数学译林, 第 11 卷 (1992), 第 4 期, 352–358 页.



习题 991 的附图

在分析上可以如下计算得到

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

这个例子表明在区间上处处有定义的导函数可以有 (第二类) 不连续点①. □

下面的两个习题本身虽然很简单, 但在判定函数的可导性时有用.

习题 994 设 $f(x) = (x-a)\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在点 $x = a$ 处连续, 求 $f'(a)$.

解 直接按照导数的定义计算如下:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \varphi(a). \quad \square$$

习题 995 设 $\varphi(x)$ 为连续函数, 且 $\varphi(a) \neq 0$, 证明函数 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ 在点 a 处没有导数.

单侧导数 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(a)$ 等于什么?

解 对于出现 $|x-a|$ 的问题可以在点 a 的两侧分别研究, 这样就自然要去计算两个单侧导数.

当 $x > a$ 时, 有

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a+0} \frac{(x-a)\varphi(x)}{x - a} = \varphi(a),$$

而当 $x < a$ 时则有

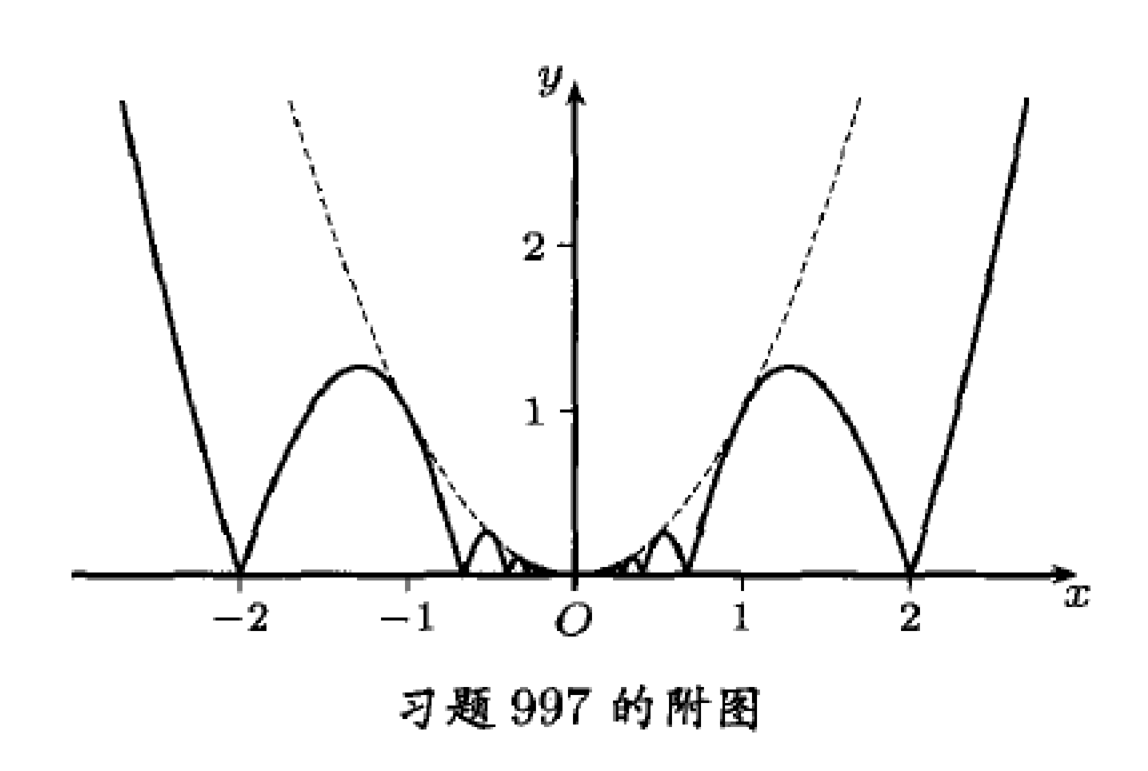
$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a-0} \frac{-(x-a)\varphi(x)}{x - a} = -\varphi(a),$$

可见在条件 $\varphi(a) \neq 0$ 时两个单侧导数存在而不相等, 因此 f 在点 a 处不可导. □

注 以上计算实际上已经证明, 若 $\varphi(x)$ 于点 a 处连续且 $\varphi(a) = 0$, 则 $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ 在点 a 处可导, 且 $f'(a) = 0$. 这在以后的习题中也有用.

① 若导函数在区间上有定义, 则它不可能有第一类不连续点. 见本书在 §2.6.5 中的命题 2.2.

习题 997 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 的任何邻域内有不可导的点, 但在这一点上是可导的.



习题 997 的附图

分析 本题我们只给出简要的分析, 而将细节留给读者.

如习题 991 所示, 本题的函数 $f(x)$ 被抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=0$ 夹在中间, 仅仅如此就已经保证 $f'(0)$ 存在.

从 $f(x)$ 的表达式可见, 在 $x\neq 0$ 处求导时, 困难只发生在 $\cos\dfrac{\pi}{x}$ 的零点处. 从 $\dfrac{\pi}{x}=(k+\dfrac{1}{2})\pi$ 可知这样的点是 $x_k=\dfrac{1}{k+1/2}$ $(k\in\mathbb{Z})$. 由于 $\left(\cos\dfrac{\pi}{x}\right)'=\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\dfrac{\pi}{x^2}$ 在这些点处不等于 0, 因此函数 $\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|$ 在这些点处的性态与 $|x-a|$ 在点 a 处相似. 由于 x^2 在这些点处不等于 0, 因此如习题 995 的结论所示, 这些点都是 f 的不可导点. (附图中明显可见的是点 ± 2 和 $\pm 2/3$ 等.) 也可以直接计算出 $f'_+(x_k)=\pi$, $f'_-(x_k)=-\pi$. □

习题 998 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅当 $x=0$ 时有导数.

分析 在点 $x=0$ 处存在导数的证明与习题 991 和 997 是类似的. 至于 $x\neq 0$, 则容易证明都是 f 的不连续点 (参见 §1.7.3 的习题 735), 从而一定不可导. □

注 以上两个习题表明函数在某个点处可导完全是一种局部性质, 是由函数在该点的任意小邻域中的性态所决定的, 而与其他点处函数是否连续以及是否可导都没有关系. 这样的基本性质我们已经遇到不少, 例如函数在某点是否存在极限, 是否连续都是这样的局部性质.

习题 999 的可导性分析有 5 个小题, 下面给出其中的一个小题的答案.

习题 999 (d) 研究下列函数的可导性: $y=\arcsin(\cos x)$.

解 利用 $\cos x=\sin(\dfrac{\pi}{2}-x)$ 和 §1.8.2 中正弦函数的反函数恒等式 (1.46), 即有

$$y=\arcsin(\sin(\frac{\pi}{2}-x))=\frac{\pi}{2}-x,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-x\leqslant\frac{\pi}{2},$$

这样就得到在区间 $[0,\pi]$ 上的函数 $y(x)$ 的表达式. 利用 $\cos x$ 为周期 2π 的偶函数, 因此 $y(x)$ 也是周期 2π 的偶函数, 它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为

$$y(x)=\frac{\pi}{2}-|x|,\ x\in[-\pi,\pi].$$

这样就知道除了点 $k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 之外 $y(x)$ 都可导 (参见附录一的习题 319 的图像). □

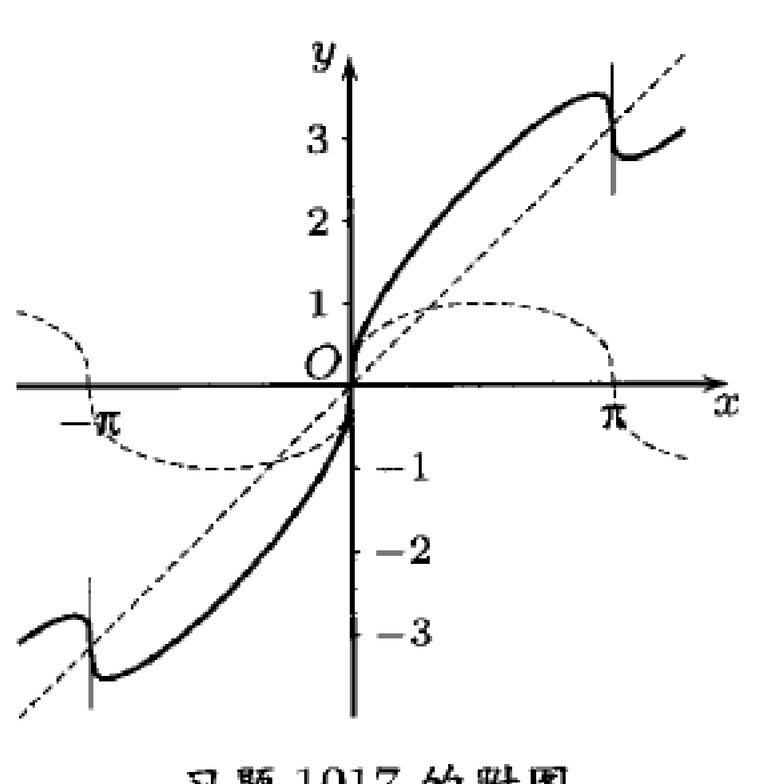
习题 1009.1 证明函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 但在这一点处既没有左导数也没有右导数.

注 这个习题中的函数是数学分析课程中的典型例子, 其连续性的讨论见 §1.7.2 的习题 680 的解. 读者可以参见该习题的附图, 并与本小节前面的习题 991 作比较. 其解答可见一般的教科书, 从略.

习题 1017 函数 $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ 的图像在哪些点处有垂直切线? 并作此图像.

解 有垂直切线的情况发生在函数连续但差商极限 (即导数) 为无穷大的场合. 因此正常可导的点处都不会有垂直切线.

从 y 的表达式可见这只能发生在 $\sqrt[3]{\sin x}$ 等于 0 的点处, 也就是 $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 的所有点. 如附图所示, 用虚线作出了 $y=x$ 和 $y=\sqrt[3]{\sin x}$ 的图像, 而代表 $y=x+\sqrt[3]{\sin x}$ 的粗黑曲线就是它们的叠加. □



习题 1017 的附图

注 本题直接求导当然很容易. 但从 §1.4 的图像叠加运算和幂函数 $\sqrt[3]{x}$ 的图像可见, 不作具体计算也可以解决问题. ($\sqrt[3]{x}$ 的图像见附录一 的习题 276, 277 等.)

习题 1019 如果函数 $f(x)$ 在有界区间 (a,b) 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$, 那么是否一定有:

(a) $\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$;

(b) $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}}|f'(x)|=+\infty$?

解 (a) 不一定. 为此可以想象当 x 从点 a 的右侧趋于 a 时, 函数 f 的图像在趋于无穷大的同时发生无限多次振动, 从而存在导数等于 0 的一个点列趋于 a 即可.

根据这样的构思就不难写出 (例如) $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+\sin\dfrac{1}{x-a}$, 它的导数为

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\Big(1+\cos\frac{1}{x-a}\Big),$$

于是只要取 $x_n>a$ 满足 $\cos\dfrac{1}{x_n-a}=-1$ 即可. 容易写出 $x_n=a+\dfrac{1}{(2n-1)\pi}$, $n=1,2,\cdots$, 它就是满足条件的点列.

(b) 这是一定成立的. 用反证法. 若 $\overline{\lim\limits_{x\to a+0}}|f'(x)|<+\infty$, 则就表明 $f'(x)$ 在点 a 右侧邻近有界, 这时就可以推出 $f(x)$ 也在点 a 右侧邻近有界, 从而与条件 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ 相矛盾.

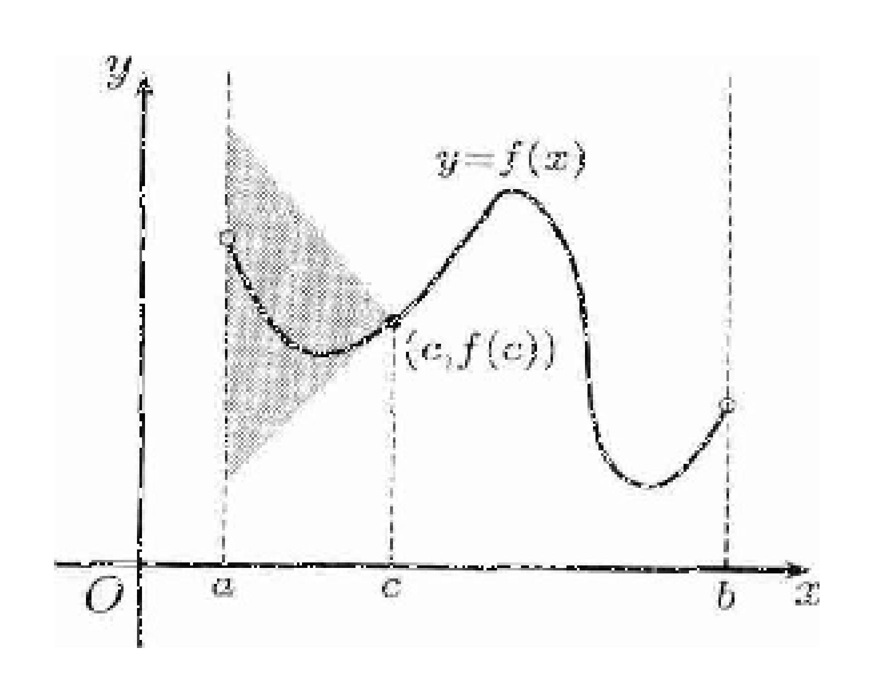
这在将来学了微分中值定理之后就很容易证明, 目前可证明如下. (所用的方法称为勒贝格方法, 见 [23] 的上册的 81, 94, 131 页.)

根据反证法假设, 有 $\varlimsup\limits_{x\to a+0}|f'(x)|<+\infty$, 因此存在 $M>0$ 和 $c\in(a,b)$, 使得在 $(a,c]$ 上成立 $|f'(x)|<M$.

从 $|f'(c)|<M$ 可见存在 $\delta>0$, 使得当 $c-\delta<x<c$ 时成立

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right|<M.$$

如附图所示, 问题是要将不等式推广为在 $a<x\leqslant c$ 时成立, 即证明曲线 $y=f(x)$ 的这一段落在灰色的三角形区域内, 它的上下边界是 $y=f(c)\mp M(x-c)$, 从而就与题设条件 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ 相矛盾.



习题 1019 的附图

定义数集

$$S=\{t\in(a,c]\mid 在\ t\leqslant x\leqslant c\ 上成立\ |f(x)-f(c)|\leqslant M|x-c|\}.$$

从前面的不等式已经知道在 $c-\delta<x<c$ 时成立 $|f(x)-f(c)|<M|x-c|$. 将其中的 $<$ 号改为 $\leqslant$ 号就使得 $x=c$ 时不等式也成立. 又利用 f 的连续性, 可见 $x=c-\delta$ 时不等式仍然成立. 于是 $[c-\delta,c]\subset S$.

由于数集 S 非空有下界 a, 因此存在下确界

$$\alpha=\inf S.$$

只要证明 $\alpha=a$ 就足以保证当 $x\in(a,c]$ 时成立 $|f(x)-f(c)|\leqslant M|x-c|$ 成立, 从而有

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(c)|+|f(c)|\leqslant M(c-a)+|f(c)|,$$

即 f 在点 a 右侧邻近有界.

用反证法. 设 $a<\alpha$, 则从 $|f'(\alpha)|<M$ 可见存在 $\eta>0$, 使得当 $\alpha-\eta\leqslant x\leqslant\alpha$ 时成立不等式

$$|f(x)-f(\alpha)|\leqslant M|x-\alpha|.$$

又由 $\alpha=\inf S$ 可见, 只要取 S 中的一列点趋于 α, 就可推出成立 $|f(\alpha)-f(c)|\leqslant M|\alpha-c|$, 于是当 $\alpha-\eta\leqslant x\leqslant\alpha$ 时可得到

$$\begin{aligned}|f(x)-f(c)|&\leqslant|f(x)-f(\alpha)|+|f(\alpha)-f(c)|\\&\leqslant M(|x-\alpha|+|\alpha-c|)=M|x-c|,\end{aligned}$$

这表明 $\alpha-\eta\in S$, 从而与 $\alpha=\inf S$ 矛盾. □

注 本题也可以用有限覆盖定理等工具解决. 这方面可参考 [23] 的 §3.5 和例题 5.2.2 和 5.2.3 等.

2.1.4 应用题 (习题 1024–1033)

第二章的大量内容均涉及导数的应用, 这一节的最后几个习题就是这方面的内容.

习题 1024 推出求和公式:

(a) $P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$, $Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$;

(b) $S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$, $T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$.

解 求导数运算提供了求和的新方法.

(a) 容易看出 P_n 是 $x + x^2 + \cdots + x^n$ 的导函数, 而 Q_n 是 xP_n 的导函数, 因此就可以在 $x \neq 1$ 时计算得到

$$x + x^2 + \cdots + x^n = x(1 + x + \cdots + x^{n-1}) = \frac{x(1-x^n)}{1-x} = \frac{x - x^{n+1}}{1-x},$$

然后就可求导得到

$$\begin{aligned} P_n = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right)' &= \frac{1-(n+1)x^n}{1-x} + \frac{x-x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

这个公式在 $x = 1$ 时无意义, 但其在 $x \to 1$ 时的极限值 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 却提供了 $x = 1$ 时的正确答案. 其实只要在 P_n 的原表达式中用 $x = 1$ 代入就得到

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(这就是《习题集》的习题 1.)

当然也可直接计算其极限, 这里可用 §1.5.3 中的方法 (与习题 424(a), 426 等相似). 令 $x - 1 = t$, 就有:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1}\frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1-(n+1)(1+t)^n + n(1+t)^{n+1}}{t^2} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1-(n+1)[1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2] + n[1+(n+1)t+\frac{(n+1)n}{2}t^2] + O_3}{t^2} \\ &= -(n+1)\cdot\frac{n(n-1)}{2} + n\cdot\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

然后再计算 Q_n 如下:

$$\begin{aligned} Q_n = (xP_n)' &= \left(\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}\right)' \\ &= \frac{1-(n+1)^2x^n + n(n+2)x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{2(x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2})}{(1-x)^3} \\ &= \frac{1+x-(n+1)^2x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

与 P_n 的情况类似, 这个公式在 $x \to 1$ 时的极限值恰好等于在 Q_n 的原表达式中用 $x = 1$ 代入的结果, 即 (习题 2 中的)

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) S_n 是分析中常见的和式, 对于它的计算介绍两个方法.

第一种方法是用半角函数 $2\sin\frac{x}{2}$ 乘 S_n, 再积化和差, 然后可用裂项相消法. 在

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx=\cos(k-\frac{1}{2})x-\cos(k+\frac{1}{2})x$$

中取 $k=1,2,\cdots,n$ 并将它们相加, 就得到

$$\begin{aligned}&2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)\\&=\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)+\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{2n-1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\\&=\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x,\end{aligned}$$

因此在 $\sin\frac{x}{2}\neq 0$ 时就有

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

第二种方法是用欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 这样就可以将三角函数运算转化为复数域中的指数运算 (参见在 §1.10.1 的习题 819 的解 1). 具体的计算如下:

$$\begin{aligned}S_n&=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\operatorname{Im}(1+e^{ix}+e^{i2x}+\cdots+e^{inx})\\&=\operatorname{Im}\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}(e^{-i\frac{n+1}{2}x}-e^{i\frac{n+1}{2}x})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}})}\right)\\&=\operatorname{Im}(e^{i\frac{n}{2}x})\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

利用 $T_n=S_n'$, 即可计算 T_n 如下:

$$\begin{aligned}T_n&=\left(\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)'=-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+\left(\frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right)'\\&=-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{n\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x\sin\frac{x}{2}+\cos(n+\frac{1}{2})x\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}\\&=\frac{n\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}+\frac{\cos nx-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1026 利用恒等式 $\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$ 推出

$$S_n=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$$

的求和公式.

解 从 $\left(\ln\left|\cos\dfrac{x}{2^k}\right|\right)' = -\dfrac{1}{2^k}\tan\dfrac{x}{2^k}\ (k=1,2,\cdots,n)$ 可见, 只要对恒等式取对数后求导即可得到 S_n, 然而对于乘积形式的函数 $f(x)=\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$, 也可直接求导得到

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n} f_k'(x)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} f_i(x) = f(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'(x)}{f_k(x)},$$

因此就有

$$\begin{aligned}
S_n &= -\frac{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}{\sin x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}\right)\\
&= -\frac{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}{\sin x}\cdot\left(\frac{\cos x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}} - \frac{\sin x}{2^{2n}\sin^2\dfrac{x}{2^n}}\cdot\cos\frac{x}{2^n}\right)\\
&= -\cot x + \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}. \quad \square
\end{aligned}$$

习题 1027 证明, 可导偶函数的导数是奇函数; 可导奇函数的导数是偶函数. 并作几何解释.

解 本题的结论很有用. 实际上在前面已经见过符合这个结论的不少例子, 例如习题 977 的三个小题都是如此.

对于可导偶函数 f, 只要对于 $f(-x)=f(x)$ 求导就得到

$$-f'(-x)=f'(x),$$

即其导函数为奇函数.

从图像来看 (例如抛物线 $y=x^2$), 当 $f(x)$ 的图像关于 y 轴 (即直线 $x=0$) 对称时, 对称的两点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(-x_0, f(x_0))$ 上的切线关于 y 轴也是对称的. 于是它们的斜率, 也就是 $f'(x_0)$ 和 $f'(-x_0)$, 恰好符号相反而绝对值相同. 因此 $f'(x)$ 为奇函数.

同样, 对于可导奇函数 f, 只要对于 $f(-x)=-f(x)$ 求导就得到

$$-f'(-x)=-f'(x),\ 即\ f'(-x)=f'(x),$$

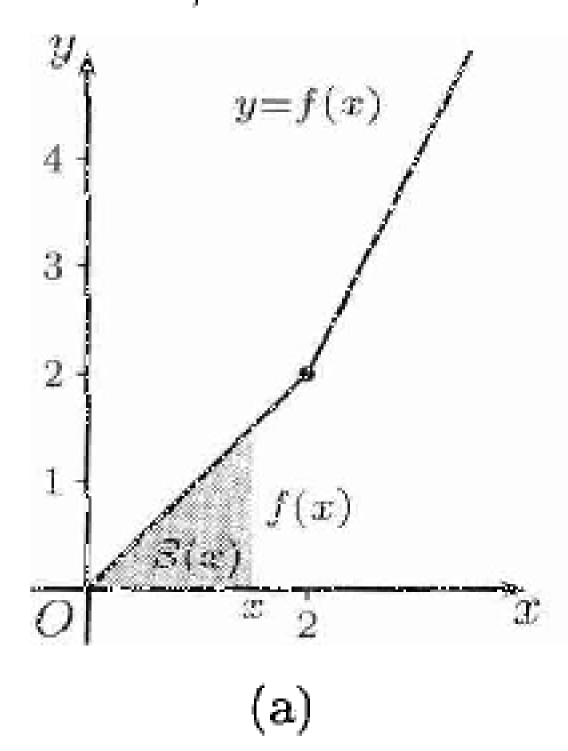
即其导函数为偶函数.

从图像来看 (例如三次抛物线 $y=x^3$), 当 $f(x)$ 的图像关于原点为中心对称时, 对称的两点 $(x_0, f(x_0))$ 和 $(-x_0, -f(x_0))$ 处的切线平行, 即具有相同的斜率. 这表明 $f'(x_0)=f'(-x_0)$, 因此 $f'(x)$ 为偶函数. $\square$

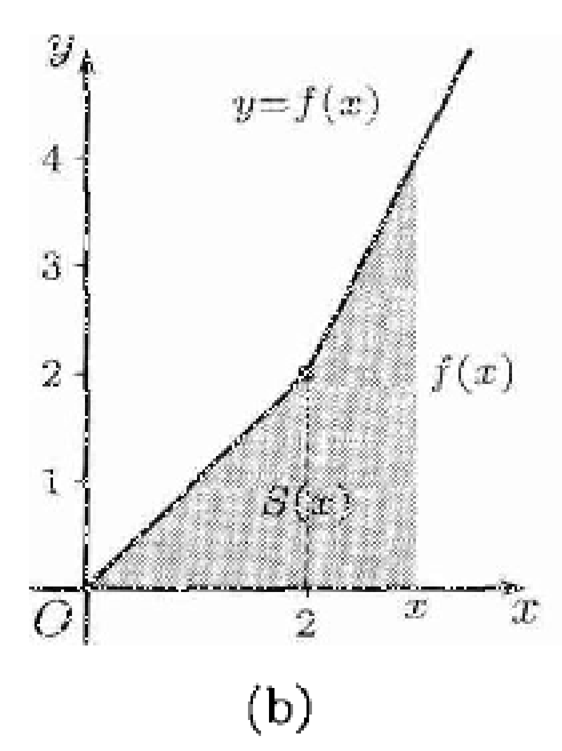
习题 1032 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-2, & 2<x<+\infty,\end{cases}$ 而 $S(x)$ 为曲线 $y=f(x)$, Ox 轴和过点 $x\,(x\geqslant 0)$ 的 Ox 轴的垂线所围成的面积. 给出函数 $S(x)$ 的解析式, 求导数 $S'(x)$ 并作出 $y=S'(x)$ 的图像.

解 如附图的分图 (a) 所示, 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时灰色区域的面积 $S(x)=\dfrac{1}{2}x^2$. 又如分图 (b) 所示, 在 $x>2$ 时 $S(x)=2+\dfrac{1}{2}(x-2)(2+2x-2)=x^2-2x+2$. 在 $x=2$ 的两

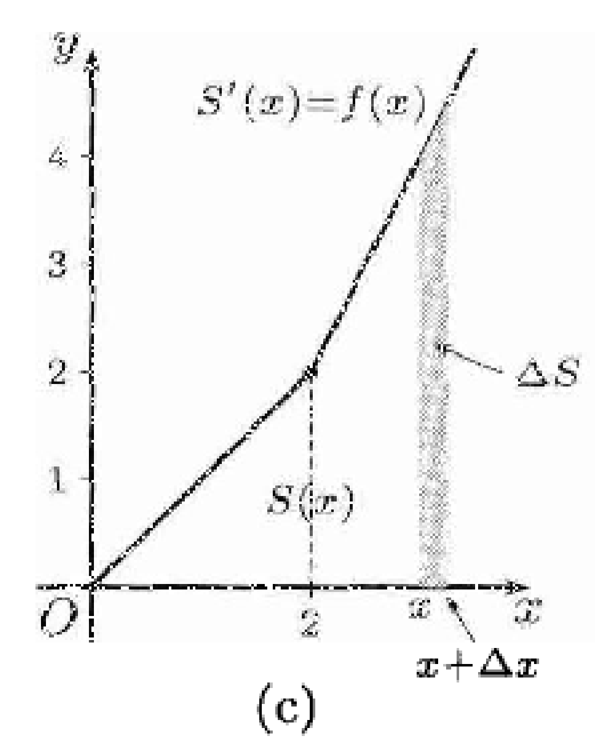
侧上述两个表达式仍然适用, 它们分别提供了 $S'_-(2)=2$ 和 $S'_+(2)=2$, 因此 $S(x)$ 于点 $x=2$ 处可导, 导数值为 2.



(a)



(b)



(c)

习题 1032 的附图

由此可见, 对于分段表示的函数 $S(x)$ 求导, 得到

$$S'(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-2, & 2<x<+\infty,\end{cases}$$

如分图 (c) 所示, $S'(x)$ 与 $f(x)$ 完全相同. □

注 一个不能回避的问题就是, 为什么会得到 $S'(x)=f(x)$? 它有一般性意义吗?

对于本题中的简单函数这可以直接证明 $S'(x)=f(x)$ 如下.

只考虑 $x>2$ 的情况. 如分图 (c) 中那样取 $t=x$ 和 $t=x+\Delta x$, 图中只画出 $\Delta x>0$ 的情况, 但以下计算对于 $\Delta x<0$ 仍然成立. 于是 $\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$ 就是图中灰色的狭长梯形的面积. 用梯形面积公式得到

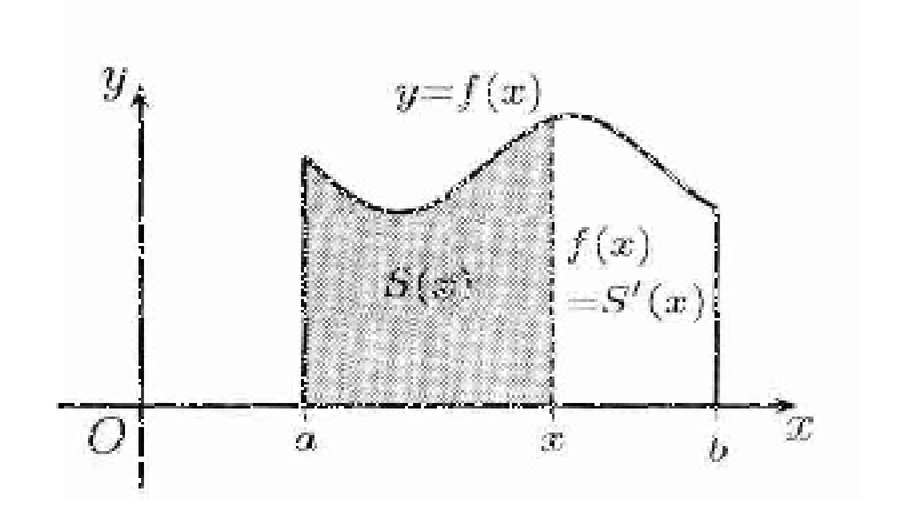
$$\Delta S=\frac{1}{2}\cdot\Delta x\cdot[(2x-2)+(2(x+\Delta x)-2)]=\Delta x(2x-2+\Delta x),$$

然后就有

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x-2+\Delta x)=2x-2.$$

这就是 $S'(x)=f(x)$, 而且没有用到 $S(x)$ 的表达式. 对于 $0\leqslant x\leqslant 2$ 的证明是类似的.

一般而言, 如右图所示, 在积分学中的面积问题就是采取类似的方法来做的. 设 $y=f(x)>0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 则为了计算该曲线下由 $x=a,b$ 和 $y=0$ 围成的曲边梯形面积, 引入流动坐标 $x\in[a,b]$, 将图中涂以灰色的面积记为 $S(x)$, 则在 f 为连续函数的条件下可以证明成立 $S'(x)=f(x)$.



曲边梯形示意图

由此可见, 从 $f(x)$ 求 $S(x)$ 是求导数运算的逆运算. 所要求的曲边梯形的面积就是 $S(b)$.

上述问题对于已经学过积分学的读者来说是容易回答的, 而对于第一次遇到这样的现象的读者来说, 这不是一个简单问题. 若有不清楚之处可以在学了积分学后再回顾这个习题.

习题 1033 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$, Ox 轴以及过点 O 和 x ($|x|\leqslant a$) 且垂直 Ox 轴的两条垂线所围成的面积. 给出函数 $S(x)$ 的解析式, 求导数 $S'(x)$ 并作出这导函数的图像.

解 如附图的分图 (a) 所示, 灰色区域可以分解为一个扇形和一个直角三角形的并, 图中只画出 $0\leqslant x\leqslant a$ 的情况, 但不难得到对 $x\in[-a,a]$ 同时适用的面积公式为

$$S(x)=\frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{|x|}{a}+\frac{1}{2}|x|\sqrt{a^2-x^2}.$$

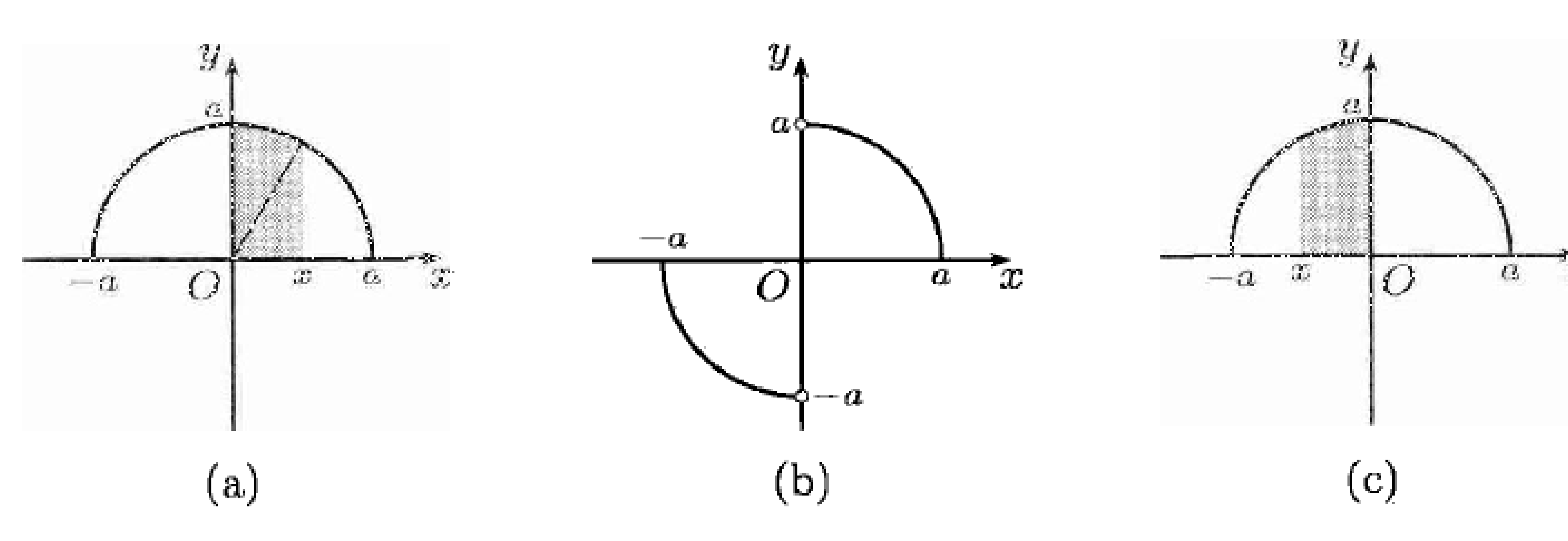
将 $S(x)$ 在 $x>0$ 时求导得到

$$S'(x)=\frac{1}{2}a^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2},$$

而在 $x<0$ 时则从 $S(-x)=S(x)$ 可见 $S'(-x)=-S'(x)$, 因此可以合并成为

$$S'(x)=\operatorname{sgn}(x)\sqrt{a^2-x^2},\ 0<|x|\leqslant a.$$

在 $x=0$ 处存在两个单侧导数为 $S'_+(0)=a$ 和 $S'_-(0)=-a$, 因此 $S'(0)$ 不存在. 在分图 (b) 中作出了 $S'(x)$ 的图像. □



习题 1033 的附图

注 这里对于 $x>0$ 和 $x<0$ 时的不同表达式作一点解释.

如前所说, 由 $y=f(x)$ 生成的曲边梯形面积 $S(x)$ 总是满足 $S'(x)=f(x)$, 但这是当梯形的变动边为右边界而言的. 这时如果 $f(x)>0$, 则当 x 增加时面积 $S(x)$ 也相应增加, 因此其导数 $S'(x)>0$. 习题 1032 中就是如此.

但在本题的 $x<0$ 时, 如分图 (c) 所示, 曲边梯形的变动边是左边界. 因此若负数 x 增加, 则梯形变小, 面积 $S(x)$ 递减, 因此其导数 $S'(x)<0$. 这就是本题的分图 (b) 中在 $x<0$ 时出现 $S'(x)=-f(x)$ 的原因.

学过积分学的读者容易看出, 前者相当于将带有变动上限 x 的定积分对 x 求导, 而后者相当于将带有变动下限 x 的定积分对 x 求导, 因此结果是显然的.

§2.2 反函数、用参数表示的函数和隐函数的导数 (习题 1034–1054)

内容简介 在显函数的导数计算的基础上, 进一步学习标题中所说的三种函数的导数计算. 对于其中涉及的理论问题, 即函数的存在性, 将在今后解决.

2.2.1 反函数的导数 (习题 1034–1037)

关于反函数的导数计算公式需要作一些解释.

设函数 $y = f(x)$ $(a < x < b)$ 可导, 且导数处处不等于 0, 则可从达布定理 (见 §2.6.5 的命题 2.1) 知道导函数一定保号, 从而 $y = f(x)$ 严格单调, 因此存在反函数 $x = f^{-1}(y)$. 在数学分析的教科书中都给出了反函数可导的证明, 并推导出其计算公式为

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

这里的第一个问题是如何正确理解这个公式. 由于 $y = f(x)$ 是 x 的函数, 因此公式的右边就是 $\dfrac{1}{f'(x)}$. 然而反函数 $x = x(y)$ 中自变量是 y, 因此左边 $x'(y)$ 是 y 的函数. 如何解释两边的不同?

实际上仔细检查教科书中关于反函数求导公式的推导就可以发现, 右边的 $\dfrac{1}{f'(x)}$ 中的 x 应当用反函数 $x = x(y)$ 代入. 这就是说应当将上述公式看成为

$$x'(y) = \frac{1}{f'(x)}\bigg|_{x=x(y)},$$

即右边是通过复合运算而成为自变量 y 的函数.

举教科书中一般都有的一个例题. 对于正弦函数 $y = \sin x$, 将其定义域限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上, 则就满足反函数存在的条件. 如习题 770 所示, 即可得到单值连续的反正弦函数, 记为 $x = \arcsin y$. 从 $y' = \cos x$ 可见在 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 也就是 $|y| < 1$ 时, 反正弦函数的导数为

$$\begin{aligned} x'(y) &= (\arcsin y)' \\ &= \frac{1}{\cos x}\bigg|_{x=\arcsin y} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \end{aligned}$$

由于 $x = \arcsin y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 因此 $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$ 的根号前取正号.

交换 x, y 的位置就得到导数计算基本公式中的

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

练习 推导其余几个反三角函数的求导公式之一.

习题 1034 证明, 由方程 $y^3 + 3y = x$ 确定的单值函数 $y = y(x)$ 存在, 并求它的导数 y'_x.

解 由于 $x=y^3+3y$ 右边的每一项都是在 $(-\infty,+\infty)$ 上的严格单调递增的连续函数, 因此 $x=x(y)$ 存在具有相同单调性的连续反函数 $y=y(x)$. 从 $x'(y)=3y^2+3\neq 0$, 因此即可用反函数求导公式得到

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{3y^2+3}.\quad\square$$

注 如前所说, 最后答案中的 $y=y(x)$, 即是由方程 $y^3+3y=x$ 确定的反函数. 然而"确定"与"解出"不是一回事. 虽然三次方程存在求根公式, 但其中出现复数运算, 使用很不方便. 因此一般对于反函数求导公式的右边就让它保留目前的形式.

习题 1037(a) 选出函数 $y=2x^2-x^4$ 的各支单值连续反函数 $x=x(y)$, 求它们的导数, 并作图像.

解 首先作出 $y=2x^2-x^4$ 的图像. 如附图的分图 (a) 所示, 该函数有 4 个单调区间, 即 $[1,+\infty)$, $[0,1]$, $[-1,0]$, $(-\infty,1]$. 对这 4 个单调区间分别用反函数定理, 就确定了 4 个单调连续的反函数, 分别记为 $x_i(y)$, $i=1,2,3,4$.

从 $y'(x)=4x-4x^3=4x(1-x^2)$ 可见, 除了 $x=0,\pm1$ 这三个点之外, 都可以用反函数求导公式得到

$$x'(y)=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{4x(1-x^2)}.$$

与习题 1034 类似, 虽然对本题可以解出 $x=x_i(y)$ $(i=1,2,3,4)$ 的显表达式, 但代入后也并没有带来什么方便. 反之, 上述 $x'(y)$ 却是对于 4 个反函数同时适用的表达式.

最后就是如何作出以上 4 个反函数的导函数 $x_i'(y)$ $(i=1,2,3,4)$ 的图像.

在这里采用参数方程的观点是非常自然的. 在上面的 $x'(y)$ 的表达式中我们只看到右边是 x 的函数, 而我们知道这里的 $x=x(y)$. 由于没有合适的反函数表达式可用, 我们不如就以 x 为参数, 这样就将 y 与 $x'(y)$ 的函数关系用下列一对参数方程表出:

$$y=2x^2-x^4,\quad x'(y)=\frac{1}{4x(1-x^2)},$$

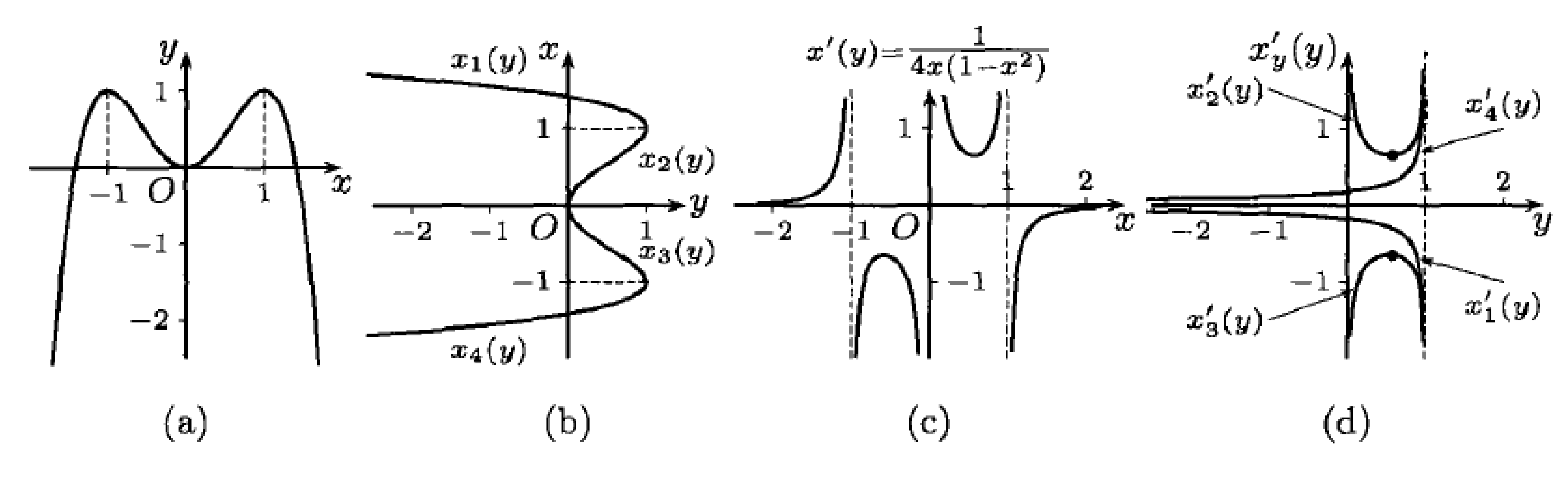
它们对于 $i=1,2,3,4$ 同时适用①.

于是按照 §1.4.4 中作参数方程表示的函数图像的方法, 我们在附图的分图 (c) 中作出了 $x'(y)$ 作为参数 x 的函数的图像, 同时再利用分图 (a), 当参数 x 从 $-\infty$ 递增到 $+\infty$ 时就可以得到分图 (d) 中的四个导函数的图像.

例如, 先考察 $x_1'(y)$ 的图像. 从分图 (b) 可见 $x_1(y)$ 的定义域为 $(-\infty,1]$, 其值域为 $[1,+\infty)$. 于是可取参数 x 从 1 到 $+\infty$. 然后从分图 (a),(c) 可知 y 从 1 递减到 $-\infty$, $x'(y)$ 从 $-\infty$ 递增到 0, 这样就得到了分图 (d) 中标出为 $x_1'(y)$ 的一支曲线.

按照同样的方式就可作出其他三支导函数的曲线. 在分图 (d) 中还利用了 §2.12 中的方法确定了 $x_2'(y)$ 和 $x_3'(y)$ 的极值点, 使得图像更为准确. (这些计算都很简单, 建议读者参看下一小节和 §2.12 后自己补足.) $\square$

① 注意符号 x 在本题的解题过程中的"角色"转换: 在开始时 x 是函数 $y(x)$ 中的自变量; 在反函数 $x=x_i(y)$ 中它是因变量; 而在反函数的导数 $x_i'(y)$ 的作图中则用作为参数.



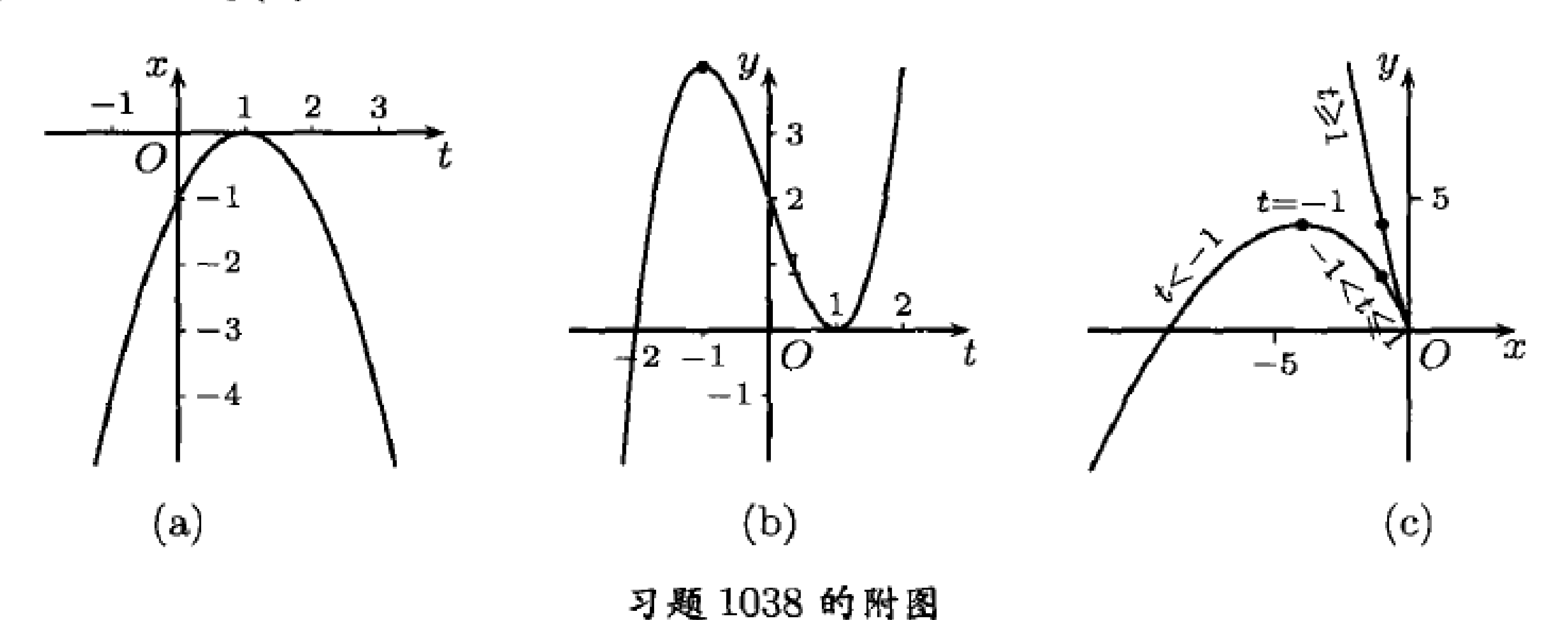
习题 1037(a) 的附图

习题 1037 还有两个小题 (b),(c), 它们的解题过程与小题 (a) 是类似的.

2.2.2 用参数表示的函数的导数 (习题 1038–1047)

习题 1038 设 $x=-1+2t-t^2$, $y=2-3t+t^3$, 作函数 $y=y(x)$ 的草图, 并求导数 $y'_x(x)$. 当 $x=0$ 和 $x=-1$ 时, $y'_x(x)$ 等于多少? 在怎样的点 $M(x,y)$ 上导数 $y'_x(x)=0$?

解 作参数方程给定的函数的草图问题在本书的 §1.4.4 小节中已经作过介绍, 请参看其中关于习题 369(b),(g) 的讲解. 其中提出的基本方法就是先分别作 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的图像, 然后合成 $y(x)$ 的草图. 下面的附图就是如此生成的.



习题 1038 的附图

如分图 (a) 与 (b) 所示, 当参数 t 从 $-\infty$ 单调递增趋于 $t=1$ 时, $x(t)$ 单调递增趋于 0, 而 $y(t)$ 则是先增加再减少趋于 0, 这样就在分图 (c) 上产生了 x 从 $-\infty$ 趋于 0 的一支曲线, 然后同样可以看出当 t 从 1 单调递增趋于 $+\infty$ 时, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别严格单调递减和递增, 从而 $y(x)$ 是严格单调递减函数, 这样就得到分图 (c) 从原点出发的第二支曲线.

列表是一个好方法. 如果已经具备从导数符号判定函数单调性的知识 (见 §2.7), 则不难作出下列表格:

t	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
x	$-\infty$	↗	-4	↗	0	↘	$-\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

利用参数方程给出的函数的求导法则就有

$$y'(x) = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-3+3t^2}{2-2t} = -\frac{3}{2}(1+t),$$

其中 $t=1$ 时分子 y'_t 和分母 x'_t 都等于 0, 因此不能确定在该点 (即原点) 邻近是否存在 $y=y(x)$ 或者 $x=x(y)$. 这从分图 (c) 中也能直观地看出.

参数值 $t=1$ 时 $x(1)=y(1)=0$, $x'(1)=y'(1)=0$, 导数 $y'_x(0)$ 不能应用上述公式得到. 但从极限角度来看, 却可得到 $y'_x(0)=-3$. 从分图 (c) 可以看出, 该点 (即原点) 是函数图像中的尖点, 参数 $t<1$ 和 $t>1$ 对应的两支在该点处具有相同的斜率 -3.

当 $x=-1$ 时从 $x(t)$ 的表达式可见对应于 $t=0$ 和 $t=2$, 相应的 $y(t)$ 取值为 2 和 4, 于是从导数公式可以求出 $y'_x(-1)$ 分别为 $-\frac{3}{2}$ 和 $-\frac{9}{2}$.

导数 $y'(x)=0$ 的点只要从导数公式可见一定对应于 $t=-1$, 因此将它代入 $x(t)$ 和 $y(t)$ 就知道这个点是 $M(-4,4)$. □

习题 1046 求下列函数的导数 y'_x (参数为正数): $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

解 若不作任何分析就求导, 则得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-1/(1+t^2)}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2t\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2/(1+t^2)}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{1+t^2}-\frac{1}{2}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t^2}{1+t^2}\right)} = 1.$$

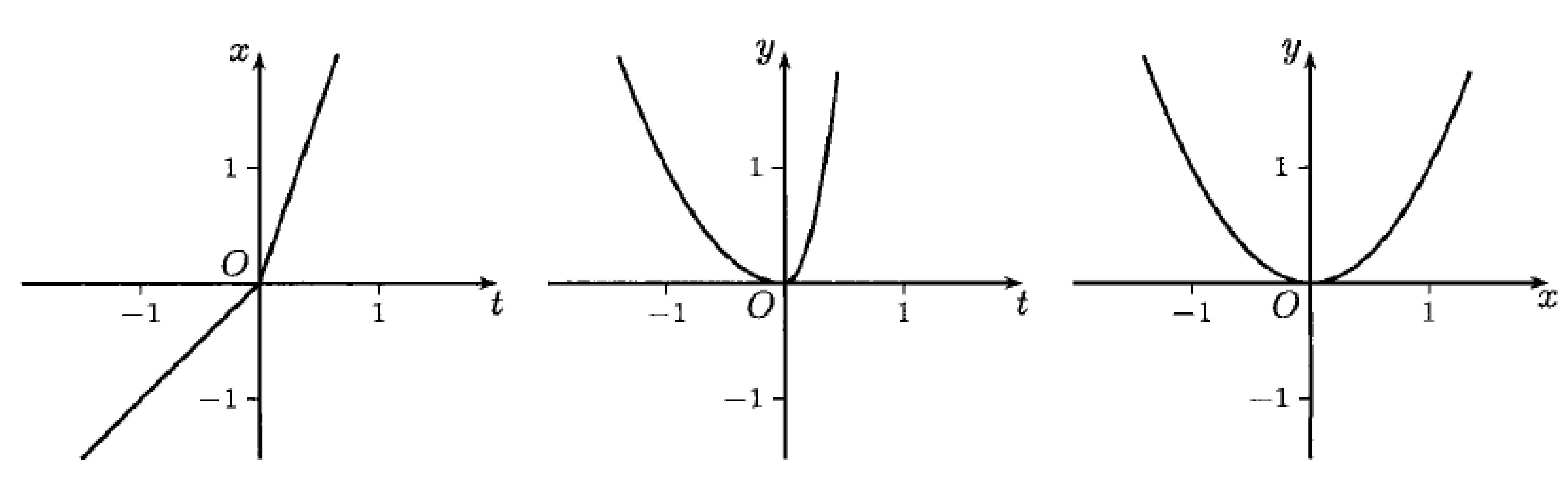
如果到这里产生了"为什么会如此"的问题, 则回顾题中的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 之后, 就会发现原来只不过是 $y=x$. □

注 以上只考虑 $t>0$. 否则 $y=y(x)$ 就是 $y=|x|$, $y'(x)=\operatorname{sgn}x$ ($x\neq 0$).

习题 1047 证明, 由方程组

$$\begin{cases} x = 2t+|t|, \\ y = 5t^2+4t|t| \end{cases}$$

确定的函数 $y=y(x)$ 当 $t=0$ 时可导, 但它在这一点的导数不能用通常的公式求得.



习题 1047 的附图

解 从 $t \leqslant 0$ 时 $x = t$ 和 $t \geqslant 0$ 时 $x = 3t$, 可见 $x = x(t)$ 是严格单调递增的连续函数, 因此存在具有相同单调性的连续反函数 $t = t(x)$. 这样就确定了函数 $y = y(x)$ 存在.

由于 $x'_-(0) = 1$, $x'_+(0) = 3$, 因此 $x(t)$ 在 $t = 0$ 时的导数不存在. 这样我们就不能用 $y'(x) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)}$ 来计算 $t = 0$ 对应的点 $x = 0$ 处的导数. (但这里要指出, 尽管在 $y(t)$ 的表达式中出现 $|t|$, 直接计算 $t = 0$ 处的两个单侧导数可以确定存在 $y'_t(0) = 0$.)

利用 $x = x(t)$ 的严格单调递增关系, 直接计算 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处的两个单侧导数 (参看附图的右分图). 这时 $\Delta x = x - 0$, 因此对于 $x > 0$ 有 $t > 0$. 于是 $x = 3t$, $y = 9t^2$, $x \to +0$ 等价于 $t \to +0$, 即可计算得到

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to +0} \frac{9t^2}{3t} = 0,$$

同样对于 $x < 0$ 有 $t < 0$. 于是 $x = t$, $y = t^2$, $x \to -0$ 等价于 $t \to -0$, 即可计算得到

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to -0} \frac{t^2}{t} = 0,$$

这样就证明了存在 $y'_x(0) = 0$. (更简单的方法是分别讨论 $t > 0$ 和 $t < 0$ 时的函数 $y = y(x)$, 发现表达式均为 $y = x^2$, 因此 $y'_x(0) = 0$.) □

2.2.3 隐函数的导数 (习题 1048–1054)

在《习题集》的 §1.4 中已经有隐函数的作图题 (见习题 370.1–370.2), 但关于隐函数的完整内容要到多元微积分中学习 (见《习题集》的 §6.3), 因此本小节只是结合习题的讲解对隐函数的导数计算作适当的介绍.

从方程 $F(x, y) = 0$ 确定隐函数的问题与反函数的存在问题相类似: 从 $x = x(y)$ 确定反函数 $y = y(x)$ 可看成是隐函数的特例, 为此只要取 $F(x, y) = x - x(y)$ 即可.

从多元微积分的隐函数理论可以确定在一定条件下存在连续可导的隐函数. 本小节的习题就是在假定隐函数已经存在且可导的情况下学习如何计算其导函数.

习题 1048 求由方程 $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$ 确定的隐函数 $y(x)$ 的导数 y'_x. 当 $x = 2, y = 4$ 时, 及当 $x = 2, y = 0$ 时, 导数 y' 等于什么?

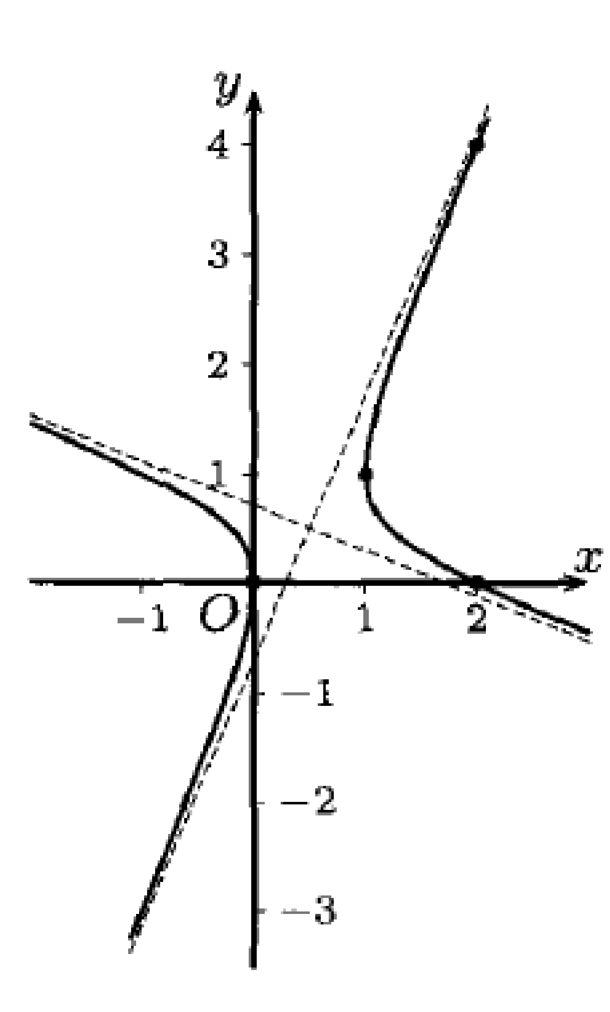
解 将方程中的 y 看成为隐函数 $y(x)$, 然后对方程求导, 得到

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 2,$$

从中解出 y', 就得到所求的导函数的表达式为

$$y'(x) = \frac{1 - x - y}{x - y}.$$

用 $x = 2, y = 4$ 代入得到 $y'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=4}} = 2\dfrac{1}{2}$. 用 $x = 2, y = 0$ 代入得到 $y'_x\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = -\dfrac{1}{2}$ (参见附图). □



习题 1048 的附图

注 由本题的方程所确定的点的全体是二次曲线中的双曲线，它是从直角双曲线 $y=1/x$ 加以旋转再平移得到的. 如附图所示, 其中心为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, 有两条相互正交的渐近线.

从 $y'(x)$ 的表达式可见在 $x=y$ 处公式不成立. 将这个条件与方程联立可解得两个点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$. 如附图所示, 在这两个点处切线垂直, 因此不可导.

容易解释在这两个点的任意邻近都不存在唯一的隐函数 $y=y(x)$. 例如, 在点 $(1,1)$ 的左侧邻近根本没有满足方程的任何点, 而在其右侧邻近则对于一个 x 有两个 y 与之对应. 对于点 $(0,0)$ 的情况也是类似的.

这里显示出隐函数求导公式的一个优点, 即其表达式有效的范围也就是隐函数存在的范围. 如图所示, 除了以上两点之外, 在任何其他满足方程的点的邻近, 一定存在满足条件的隐函数.

习题 1053 求由 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ (对数螺线) 确定的隐函数的导数 y'_x.

解 1 将方程中的 y 看成为 $y(x)$, 然后求导得到

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2},$$

整理后就得到

$$y'(x)=\frac{x+y}{x-y}.\quad\square$$

解 2 用极坐标可以将方程化为 $r=\mathrm{e}^{\varphi}$. 这时可以用 φ 为参数写出函数方程为

$$x=r\cos\varphi=\mathrm{e}^{\varphi}\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi=\mathrm{e}^{\varphi}\sin\varphi,$$

于是将问题转化为用参数表示的函数的求导计算. 这样就有

$$y'(x)=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{\mathrm{e}^{\varphi}\sin\varphi+\mathrm{e}^{\varphi}\cos\varphi}{\mathrm{e}^{\varphi}\cos\varphi-\mathrm{e}^{\varphi}\sin\varphi}=\frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{\cos\varphi-\sin\varphi},$$

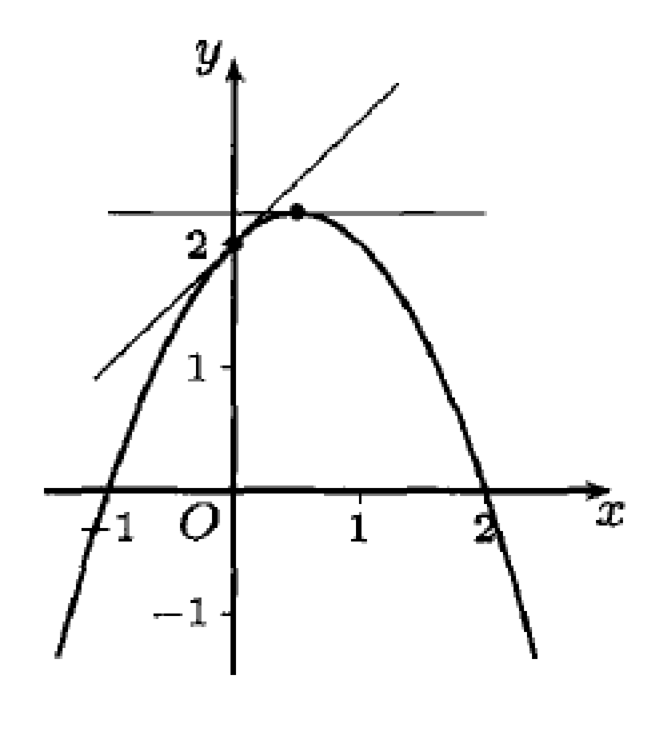
将分子分母同乘以 r 就得到与解 1 相同的形式. $\square$

注 对数螺线的图像见附录一的习题 371.1(d). 关于隐函数与用参数方程表示的函数的作图等, 可以参看本书前面的 §1.4.4 和 §1.4.5, 以及后面的 §2.12.3.

§2.3 导数的几何意义 (习题 1055–1082)

内容简介 本节的习题是学习如何利用由导数带来的各种信息, 其中包括切线的斜率和倾斜角、切线方程和法线方程、切线段长和法线段长、次切线和次法线等.

习题 1056 在曲线 $y=2+x-x^2$ 上哪些点处的切线:
(a) 与 Ox 轴平行;
(b) 与第一象限的角平分线平行?

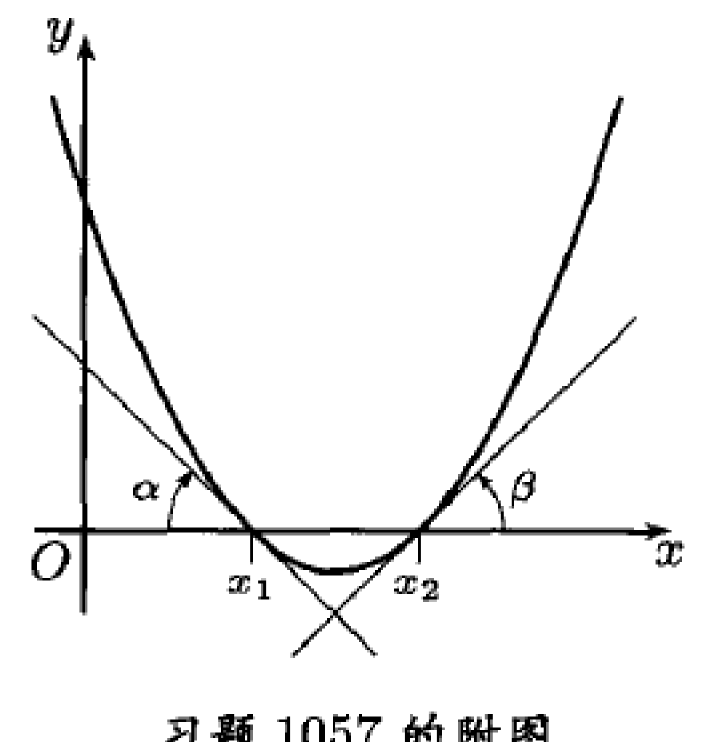


习题 1056 的附图

解 利用导数 $y'=1-2x$ 即是点 (x,y) 处的切线的斜率, 因此对于 (a) 即是要求 $y'=0$, 由此可见 $x=\dfrac{1}{2}$, 从而对应的点是 $(\dfrac{1}{2},2\dfrac{1}{4})$.

对于 (b), 即要求 $y'=1$, 可见 $x=0$, 对应的点是 $(0,2)$. (在附图中作出了所求的两条切线.) □

习题 1057 证明, 抛物线
$$y=a(x-x_1)(x-x_2)\ \ (a\neq 0, x_1<x_2)$$
与 Ox 轴相交的两个角 α 和 β $(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}, 0<\beta<\dfrac{\pi}{2})$ 彼此相等.



习题 1057 的附图

解 不妨只讨论 $a>0$ 的情况. 这时抛物线开口向上, 与 Ox 轴的交点的横坐标为 $x_1<x_2$, 因此只要求出在这两个点处的导数值就可以决定交角 α 和 β.

从 $y'=2ax-a(x_1+x_2)$ 可知, $y'(x_1)=a(x_1-x_2)<0$, $y'(x_2)=a(x_2-x_1)>0$. 在 $a>0$ 时就有
$$\beta=\arctan(y'(x_2))=\arctan(a(x_2-x_1)).$$
由于 $y'(x_1)<0$, 因此按照题设要求 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 就有
$$\alpha=-\arctan(y'(x_1))=-\arctan(a(x_1-x_2)),$$
因此就得到 $\alpha=\beta$. □

习题 1059 函数 $y=x$ 和 $y_1=x+0.01\sin 1\,000\,\pi x$ 彼此的差不超过 0.01. 问这两个函数的导数差的最大值是多少? 并作出对应的图像.

解 从 $y_1'-y'=10\pi\cos 1\,000\,\pi x$ 可见导数之差的最大值为 $10\pi\approx 31.416$.

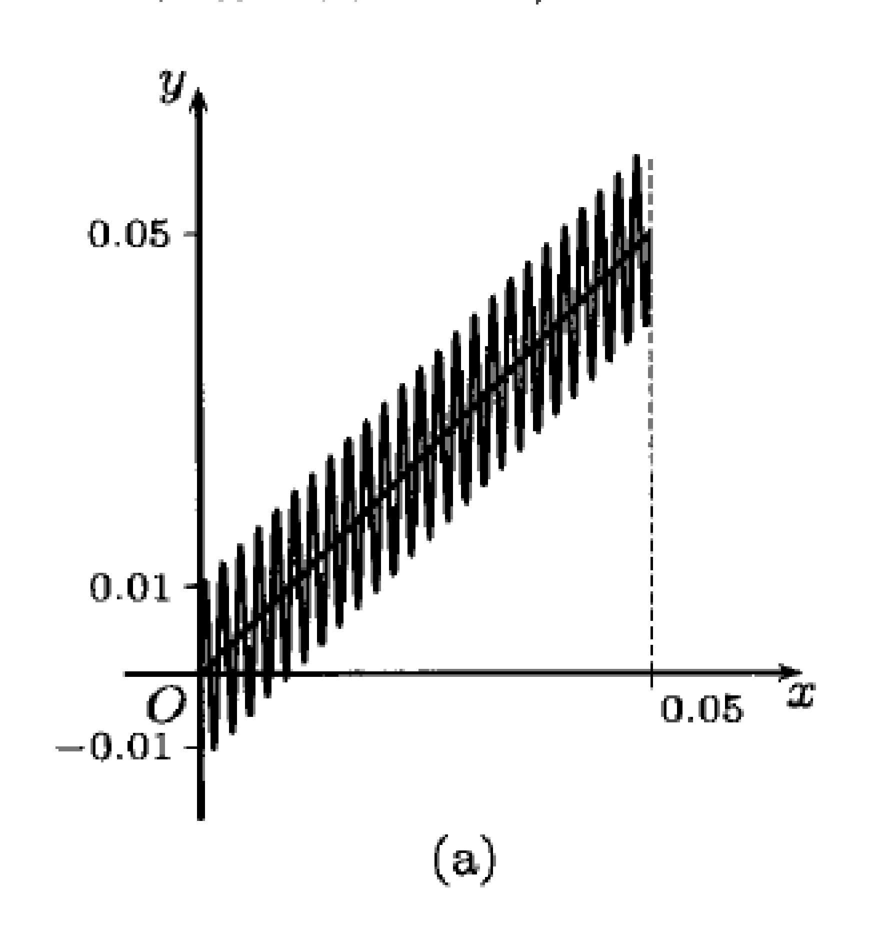
在作图时先考虑 $y(x)$ 和 $y_1(x)$ 的图像. 由于 $y(x)=x$ 只是一条直线, 而 $y_1(x)$ 的图像与直线 $y=x$ 在 y 方向的相差不超过 0.01, 这样的差别在普通标度的坐标系中是很微小的. 例如, 若在第一象限中以 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ 为顶点的单位正方形中作出 $y(x)$ 和 $y_1(x)$ 的图像, 则后者几乎也就是从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的同一条对角线, 很难察觉它们之间的差别.

为此我们采用局部放大的方法来观察这两个函数的性态.

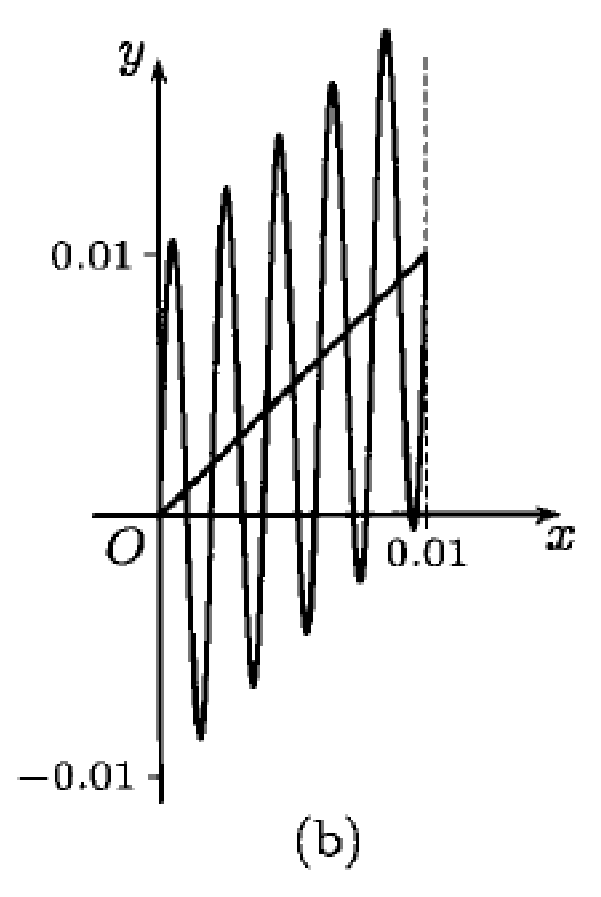
考虑到 $\sin 1\,000\,\pi x$ 的周期为 $\frac{1}{500}=0.002$, 在附图的分图 (a) 中观察在 $[0,0.05]$ 上的 $y(x)$ 和 $y_1(x)$. 前者当然只是一条直线, 后者则是上述直线与 25 个周期的正弦函数的图像的叠加. 在分图 (b) 中作出了在 $[0,0.01]$ 上的 $y(x)$ 和 $y_1(x)$, 后者是 5 个周期的正弦函数的图像与 $y=x$ 的叠加.

在分图 (c) 中作出了 $y'(x)-y_1'(x)$ 在一个周期上的图像. 由于周期长为 0.002, 而导数之差的振动范围为 $[-10\pi, 10\pi]$, 因此在两个坐标轴中采取了不同的标度.

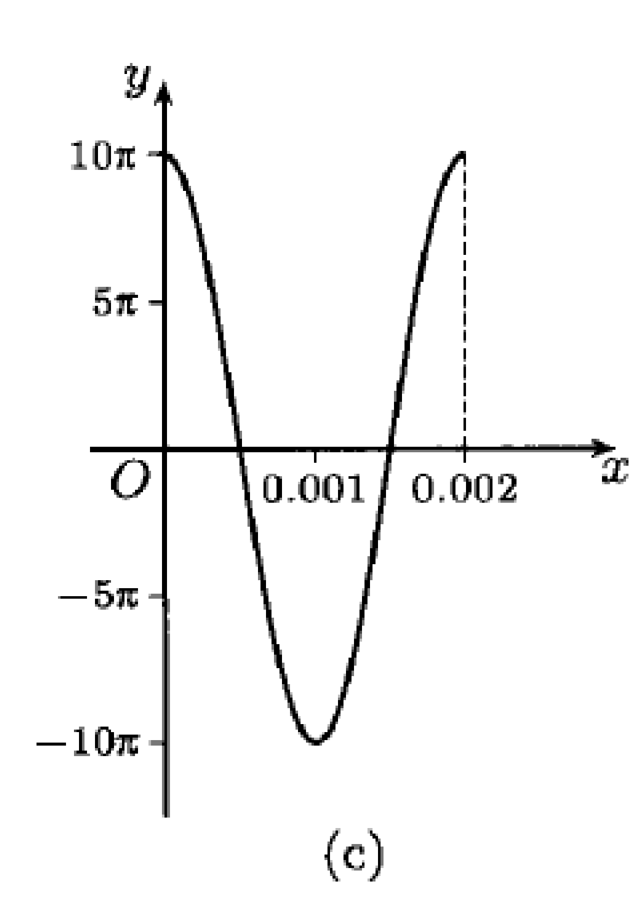
小结: 本题表明, 对函数作微小的扰动时, 其导数的扰动可以很大. □



(a)



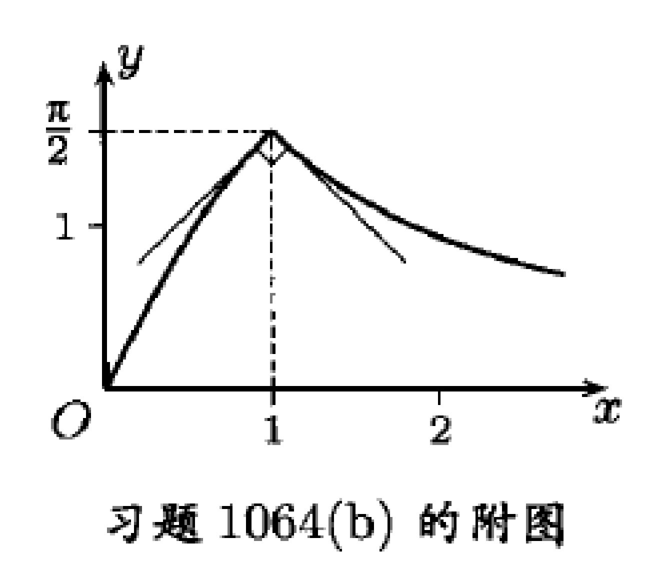
(b)



(c)

习题 1059 的附图

习题 1064(b) 求曲线 $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ 在点 $x=1$ 处的左切线与右切线之间的夹角.



习题 1064(b) 的附图

解 1 直接计算在点 $x=1$ 两侧的差商并求极限. 对于增量

$$\Delta y=\arcsin\frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2}-\arcsin 1$$

计算其正弦值, 利用 $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$, 就有

$$\begin{aligned}\sin\Delta y&=-\cos\left(\arcsin\frac{2(1+\Delta x)}{1+(1+\Delta x)^2}\right)=-\sqrt{1-\frac{4(1+\Delta x)^2}{[1+(1+\Delta x)^2]^2}}\\&=-\frac{|1-(1+\Delta x)^2|}{1+(1+\Delta x)^2}\sim-|\Delta x|\ \ (\Delta x\to 0),\end{aligned}$$

因此也有 $\Delta y\sim-|\Delta x|$. 除以 Δx 后即可求出 $y'_+(1)=-1$, $y'_-(1)=1$. 由于它们互成负倒数, 可见两条单侧切线正交 (参看附图). □

解 2 由于在 $x>0$ 时除了点 $x=1$ 之外都可以写出导函数的公式, 因此只要利用单侧导数极限定理就可以求出两个单侧导数①.

在 $x\neq 1$ 时用链式法则求导得到

① 参见 §2.6.4 的习题 1258.1.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^2}{|x^2-1|},$$

然后即可得到 $y'(1+0) = -1$ 和 $y'(1-0) = 1$, 从而有 $y'_+ = -1$ 和 $y'_- = 1$. □

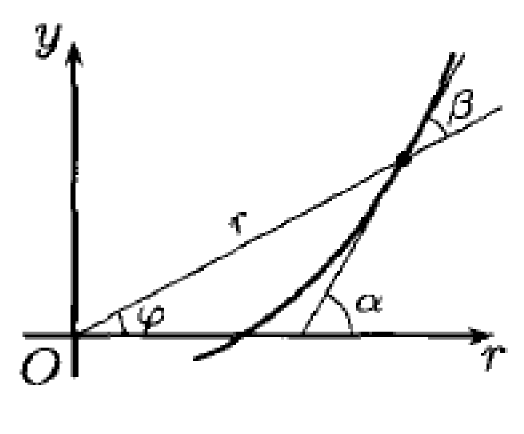
习题 1065 证明, 对数螺线 $r = a\mathrm{e}^{m\varphi}$ (a 和 m 为常数) 的切线与切点向径所成的夹角为常数.

解 对于极坐标表示的曲线 $r = r(\varphi)$, 切线与切点向径所成夹角 β 的正切有公式

$$\tan\beta = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)},$$

因此对于对数螺线即可得到 $\tan\beta = \dfrac{a\mathrm{e}^{m\varphi}}{am\mathrm{e}^{m\varphi}} = \dfrac{1}{m}$. □

注 在极坐标中研究曲线时, 切线的位置一般不用它与极轴的交角来确定, 而是用切线与切点处的向径延长线所成的夹角来确定的. 这里补充其正切的计算公式的推导.



习题 1065 的附图

设曲线方程为 $r = r(\varphi)$, 则变换为直角坐标的曲线方程为 $x = r(\varphi)\cos\varphi$ 和 $y = r(\varphi)\sin\varphi$.

于是切线的斜率为

$$y'(x) = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi}{r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi}.$$

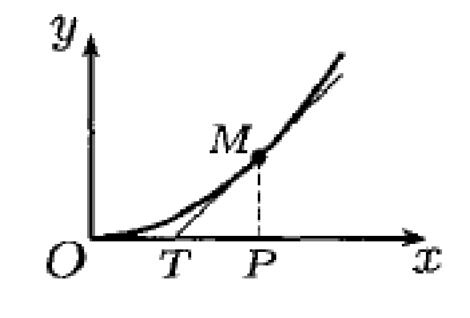
将切线的倾斜角记为 α, 则有 $y'(x) = \tan\alpha$. 如附图所示, 切线与向径延长线所成的角 β 的正切是

$$\tan\beta = \tan(\alpha-\varphi) = \frac{\tan\alpha - \tan\varphi}{1+\tan\alpha\tan\varphi}$$
$$= \frac{xy'_\varphi - yx'_\varphi}{xx'_\varphi + yy'_\varphi} = \frac{r^2}{rr'} = \frac{r}{r'}.$$

特别可看出 $r' = 0$ 是切线与向径成垂直的条件.

习题 1066 求曲线 $y = ax^n$ 的次切线长, 由此写出作这条曲线的切线的方法.

解 如附图所示, 过点 $M(x,y)$ 的切线 MT 在 Ox 轴上的投影 TP 即是次切线长. 从 $y' = nax^{n-1}$ 可求出 $TP = \dfrac{y}{y'} = \dfrac{x}{n}$. 附图中给出了 $y>0$ 和 $y'>0$ 时的作切线方法, 即从 P 确定点 T, 连接 TM 就是切线. □



习题 1066 的附图

注 在附图中是抛物线 $y = ax^2$ 的情况, $OT = TP$. 作抛物线切线的另一个类似的方法是: 在给定点 $M(x,y)$ 之后, 在 Oy 轴的负半轴上找出与原点的距离为 y 的点, 将它与点 M 连接就得到切线. 这种方法已为古希腊人所知 (见 [11] §3.5.1 的命题 33).

习题 1074 证明, 曲线 $y = f(x)$ $(f(x) > 0)$ 和 $y = f(x)\sin ax$ 在交点处彼此相切, 其中 $f(x)$ 为可导函数.

解 设交点为 $(x_0, f(x_0))$, 则必有 $\sin ax_0 = 1$. 于是有 $\cos ax_0 = 0$. 这时两条曲线在该点的切线斜率分别为 $f'(x_0)$ 和

$$[f(x)\sin ax]'\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\sin ax_0 + af(x_0)\cos ax_0 = f'(x_0),$$

可见结论成立. □

注 读者可以将本题的结论推广到 $y = f(x)\sin g(x)$, 其中 $g(x)$ 可导. 在这个推广之后, 可以回顾前面的许多习题中的图像. 例如 §2.1.3 中的习题 991 和 997 中的图像都是如此. 此外, 在 §1.4 中的大量习题中, 凡是正弦函数或余弦函数以乘积因子出现时几乎都有类似的相切现象.

习题 1078 写出曲线

$$x(t) = \frac{2t + t^2}{1 + t^3}, \quad y(t) = \frac{2t - t^2}{1 + t^3}$$

在点: (a) $t = 0$; (b) $t = 1$; (c) $t = \infty$ 处的切线方程和法线方程.

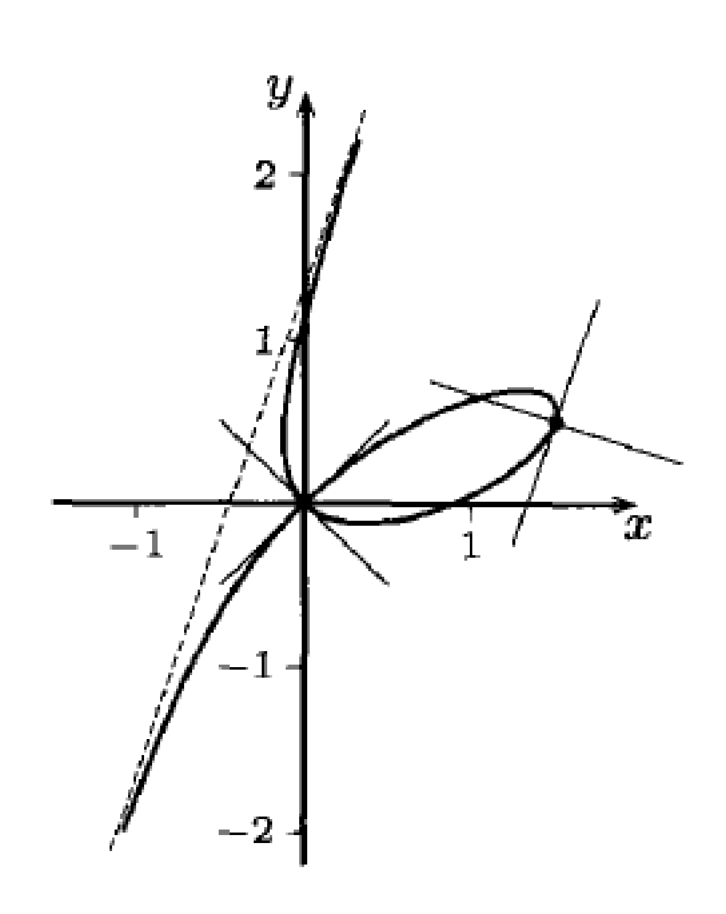
解 按照求导法则计算得到

$$y'_x = \frac{2 - 2t - 4t^3 + t^4}{2 + 2t - 4t^3 - t^4}.$$

在 $t = 0$ 时点 $(0,0)$ 处的 $y'_x = 1$, 因此切线方程为 $y = x$, 法线方程为 $y = -x$.

在 $t = 1$ 时点 $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 处的 $y'_x = 3$, 因此切线方程为 $y - \frac{1}{2} = 3(x - \frac{3}{2})$, 即 $y = 3x - 4$. 法线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}(x - \frac{3}{2})$, 即 $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

在 $t = \infty$ 时按照极限来理解仍然得到点 $(0,0)$, 其中的 y'_x 为 -1, 因此切线方程为 $y = -x$, 法线方程为 $y = x$. (参见附图.) □



习题 1078 的附图

注 为清楚起见在附图中作出了曲线的图像, 其中 $(0,0)$ 是自交点, 用虚线表示其渐近线 $y = 3x + \frac{4}{3}$. 这个图像与 §1.4.4 习题 370.1(b) (即笛卡儿叶形线) 非常相似, 实际上两者只相差一个线性变换, 特别是本题的参数方程可以改写为下列隐函数方程:

$$(x + y)^3 + 8(x - y)^3 - 8(x^2 - y^2) = 0.$$

习题 1079 写出摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

在任意点 $t = t_0$ 处的切线方程, 并给出作摆线的切线的方法.

解 直接求导得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},$$

只在 $t=0,2\pi$ 处为无穷大, 即有平行于 Oy 轴的垂直切线.

取定 $t_0\in(0,2\pi)$, 则过点 $M(x(t_0),y(t_0))$ 的切线方程为

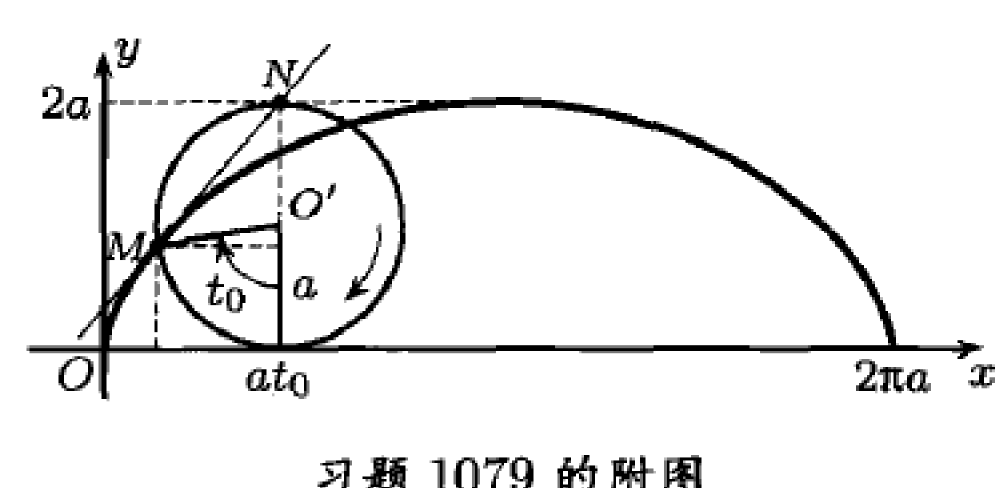
$$Y-a(1-\cos t_0)=\cot\frac{t_0}{2}[X-a(t_0-\sin t_0)],$$

整理后为

$$Y-2a=(X-at_0)\cot\frac{t_0}{2}.$$

可见切线经过点 $N(at_0,2a)$ (参见附图).

生成摆线的方法之一就是让一个圆在直线上滚动, 这时其圆周上的一个定点就生成摆线 (也因此又称它为旋轮线). 利用滚动圆就可以从上述计算结果作出摆线的切线.



习题 1079 的附图

对于摆线上的点 $M(x(t_0),y(t_0))$, 如图所示, 利用滚动圆的圆心 $O'(at_0,a)$ 与点 M 的距离为 a, 而高度也为 a, 就可从点 M 确定点 O' 的位置. 然后过 O' 作出滚动圆垂直于 Ox 轴的直径, 就得到点 $N(at_0,2a)$. 连接点 M,N 就得到摆线过点 M 的切线. □

习题 1080 证明, 曳物线

$$x=a\Big(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\Big),\quad y=a\sin t\ (a>0,0<t<\pi)$$

的切线长为常数.

解 从 $x(\pi-t)=-x(t)$ 和 $y(\pi-t)=y(t)$ 可见参数方程确定的函数 $y=y(x)$ 为偶函数. 当 t 从 0 到 $\pi/2$ 时 $x(t)<0$, 而当 t 从 $\pi/2$ 到 π 时 $x(t)>0$ ①. 下面只考虑后者.

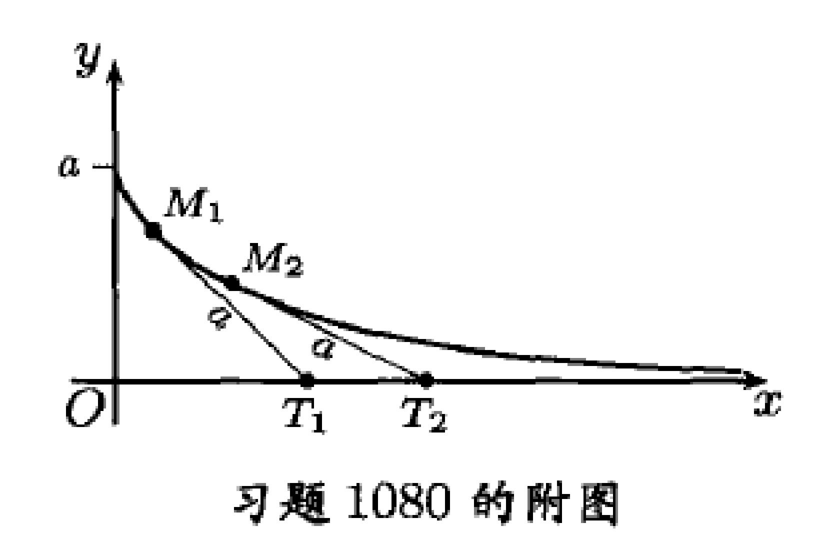
计算导数得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{a\cos t}{a\Big(\dfrac{1}{\sin t}-\sin t\Big)}=\tan t,$$

于是经过点 $(x(t),y(t))$ 的切线方程为

$$Y-a\sin t=\tan t\Big[X-a\Big(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\Big)\Big],$$

令 $Y=0$ 得到切线与 Ox 轴的交点为 $X=a\ln\tan\dfrac{t}{2}$.



习题 1080 的附图

切线在 Ox 轴上的投影 (即次切线长) 为 $X-x(t)=-a\cos t\ \ (\frac{\pi}{2}<t<\pi)$, 切点的高度是 $a\sin t$, 因此切线长为 a 是个常值, 在附图中作出了曳物线在两个点 M_1 和 M_2 处到 Ox 轴的切线, 它们的长度都是 a.

如果想象 T 是在人行道 (Ox 轴) 上向右方散步的小孩, 同时用手拖着一辆在马路 ($y>0$) 上的玩具小车 M, 则小车的轨迹就是图中的曳物线 (这是其得名的由来). 小车不会到达小孩散步的人行道, 但会与它越来越近. □

① 这里需要用 §2.7.2 中的方法或其他方法来确定 $x(t)$ 的符号.

§2.4 函数的微分 (习题 1083–1110)

内容简介 微分是一元微分学中的重要概念, 本节主要学习微分的计算以及它在近似计算等方面的应用.

由于微分概念的重要性, 在做习题之前, 适当复习一下它的意义是必要的.

对于一元函数来说导数概念比较直观, 从变化率的角度很容易理解导数在几何上就是切线的斜率. 然而微分概念的出发点与导数完全不同, 两者之间没有从属关系.

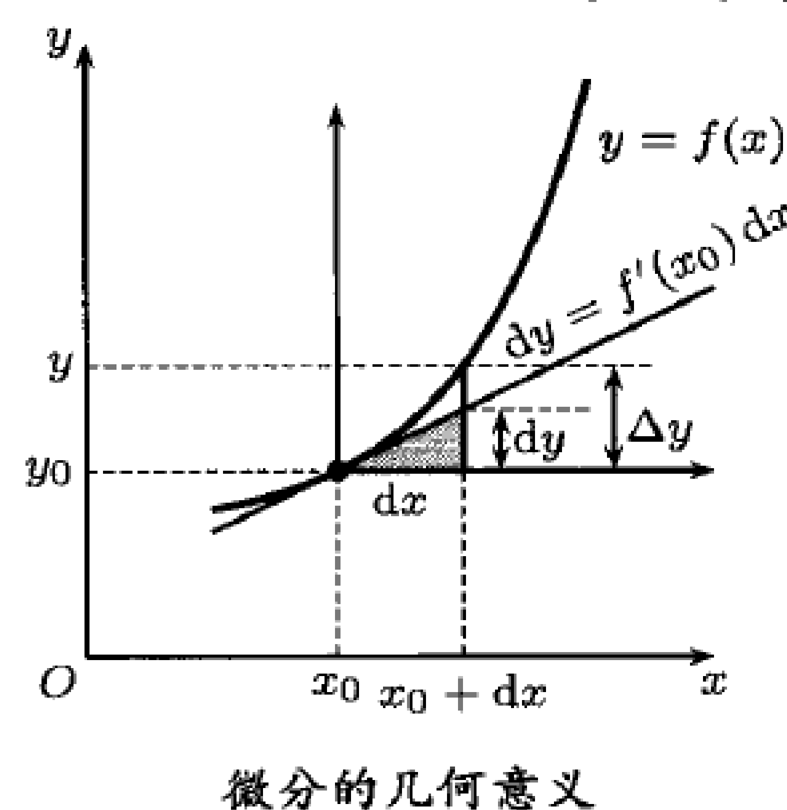
从定义来看, 函数 $y = f(x)$ 可微的意义是指由自变量的增量 Δx 引起的因变量的增量 Δy 能够分解为与 Δx 成比例的一次项和高次项 $o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$, 其中的一次项就称为微分, 记为 $\mathrm{d}y$.

由此可见, 微分概念面对的问题是如何从函数的增量 Δy 中取出关于 Δx 的线性部分. 由于在可微时微分中的比例系数就是导数 $f'(x_0)$, 因此计算微分一般比直接从函数表达式计算 Δy 要容易得多. 在 $f'(x_0) \neq 0$ 时有

$$\Delta y \sim f'(x_0)\Delta x = \mathrm{d}y,$$

因此微分 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 中的主要部分 (经常称为线性主部). 这是微分用于近似计算的依据.

另一方面, 微分还有强烈的几何意义. 如图所示, $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可微已经保证了曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 处有切线. 这条切线现在可以写为 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\mathrm{d}x = \Delta x$ 是自变量的增量. 只要将 $\mathrm{d}x$ 换为 $X - x_0$, 将 $\mathrm{d}y$ 换为 $Y - y_0$, 就得到平时习惯写出的切线方程 $Y - y_0 = f'(x_0)(X - x_0)$.



微分的几何意义

然而还有更多的信息. 可微保证了 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的主要部分. 如附图所示, 在 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之间的差不仅随着 $\Delta x \to 0$ 而趋于 0 (这只反映了连续性), 而且还是比 Δx 更为高阶的无穷小量.

在这样的意义下, $y = f(x)$ 在点 x_0 可微就是该函数在该点邻近可以用线性函数逼近, 或者说在相差为高阶无穷小量的意义上可以线性化.

几何上的意义就是切线在切点邻近与曲线越来越接近, 以致于在很多问题中可“以直代曲”.

从映射的观点来看, 实数集合 $\mathbb{R}$ 是一维空间, 一元实函数是从一维到一维的映射. 今后在研究从 n 维空间到 m 维空间的一般映射时, 可微性概念就是用线性映射来逼近一般的非线性映射, 这样的推广非常自然, 没有任何困难. 然而作为变化率的导数是差商的极限, 差商只能是两个数相除, 它的推广就很不方便. 例如在多元微分学中将导数推广为偏导数, 然而偏导数只是函数在一个方向上的变化率, 而可微则要求在一个邻域内可线性化, 因此可微比可偏导强得多.

一般认为, 微分概念以及与之相伴的线性化是微分学中最为本质的思想.

还需要注意, 一元函数的微分 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ 中 x 和 $\mathrm{d}x$ 是意义不同的两个独立变

量, 因此 $\mathrm{d}y$ 是二元函数. 微分的计算虽然比较容易, 但初学者需要注意每种类型习题的意义是什么.

由于在一元函数中可微和可导等价, 因此本书在今后对于一元函数将同时使用可微和可导两个名词. 此外, 又经常将函数存在连续的导函数称为函数"连续可微".

习题 1083 求函数 $f(x)=x^3-2x+1$ 的 $\Delta f(1)$ 和 $\mathrm{d}f(1)$, 并对两者作比较, 其中 (a) $\Delta x=1$; (b) $\Delta x=0.1$; (c) $\Delta x=0.01$.

解 一方面从 $f(x)=x^3-2x+1$ 直接得出①

$$\begin{aligned}\Delta f(1)&=f(1+\Delta x)-f(1)=3\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3-2\Delta x\\&=\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3,\end{aligned}$$

另一方面, 从 $f'(x)=3x^2-2$ 有 $f'(1)=1$, 因此有

$$\mathrm{d}f(1)=f'(1)\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}x=\Delta x.$$

这样就可以将具体的 Δx 代入计算并列表如下:

Δx	$\Delta f(1)=\Delta x+3\Delta x^2+\Delta x^3$	$\mathrm{d}f(1)=\Delta x$
1	5	1
0.1	0.131	0.1
0.01	0.010301	0.01

可以看出, 随着 Δx 越来越小, 在因变量增量 $\Delta f(1)$ 和微分 $\mathrm{d}f(1)$ 之间的差不仅变小, 而且这些差值与 Δx 之比也越来越小, 即相对误差也趋于 0:

$$\frac{4}{1}=4,\quad \frac{0.031}{0.1}=0.31,\quad \frac{0.000301}{0.01}=0.0301,$$

这就是 $\dfrac{\Delta f(1)-\mathrm{d}f(1)}{\Delta x}\to 0\ (\Delta x\to 0)$ 的具体表现. □

习题 1087 求函数 $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$ 的微分.

解 1 按照 $\mathrm{d}y=y'(x)\,\mathrm{d}x$ 只要如下计算:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\frac{1}{2a}\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\Big(\ln|x-a|-\ln|x+a|\Big)'\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 利用一阶微分的形式不变性, 引入中间变量 $u=\dfrac{x-a}{x+a}=1-\dfrac{2a}{x+a}$, 则有 $y=\dfrac{1}{2a}\ln|u|$. 于是可以如下计算:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=y'_u\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2au}\,\mathrm{d}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\\&=\frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{2a}{(x+a)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x.\quad\square\end{aligned}$$

① 按照习惯, 今后将 $(\Delta x)^n$ 记为 Δx^n, 将 $(\mathrm{d}x)^n$ 记为 $\mathrm{d}x^n$.

注 一阶微分的形式不变性是微分的重要性质, 在多元微积分中有很多应用. 虽然它在一元微分学的计算中所起的作用不大, 但如解 2 所示的计算方法含有新的思想.

习题 1091 设 u, v, w 是关于 x 的可微函数, 求函数 $y = uvw$ 的微分.

解 直接计算得到

$$\mathrm{d}y = (uvw)'_x\,\mathrm{d}x = (u'vw + uv'w + uvw')\,\mathrm{d}x,$$

又可以记为

$$\mathrm{d}y = vw\,\mathrm{d}u + uw\,\mathrm{d}v + uv\,\mathrm{d}w. \quad \square$$

注 这里不加证明地介绍多元微积分中的有关结果. 在多元微积分中引入偏导数和微分等概念之后, 就有

$$\mathrm{d}y(u,v,w) = \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial y}{\partial w}\,\mathrm{d}w, \tag{2.1}$$

其中的偏导数 $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ 就是将自变量 v, w 看成为常数时 y 对 u 的导数. 对于其余两个偏导数也作同样理解. 利用这时的微分仍然具有形式不变性, 因此 u, v, w 为 x 的可微函数时公式 (2.1) 仍然成立. 习题 1091 的答案的第二种形式就是 (2.1) 的一个特例.

习题 1094 设 u, v 是关于 x 的可微函数, 求函数 $y = \arctan\dfrac{u}{v}$ 的微分.

解 1 直接对 x 求导得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y &= \frac{1}{1+\dfrac{u^2}{v^2}}\cdot\left(\frac{u}{v}\right)'\mathrm{d}x\\ &= \frac{v^2}{u^2+v^2}\cdot\frac{u'v-v'u}{v^2}\,\mathrm{d}x = \frac{u'v-v'u}{u^2+v^2}\,\mathrm{d}x. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 利用习题 1091 的注中的公式, 则有

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{1+\dfrac{u^2}{v^2}}\cdot\left(\frac{1}{v}\,\mathrm{d}u - \frac{u}{v^2}\,\mathrm{d}v\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{u^2+v^2}.$$

若将其中的 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$ 换为 $u'\,\mathrm{d}x$ 和 $v'\,\mathrm{d}x$ 就得到与解 1 相同的结果. $\square$

习题 1096 (a) 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9)$.

解 1 本题的意思是以 $u = x^3$ 为自变量来求 y 的微分. 由于 $y = u - 2u^2 - u^3$, 因此就有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)} &= \frac{\mathrm{d}(u-2u^2-u^3)}{\mathrm{d}u}\bigg|_{u=x^3}\\ &= (1-4u-3u^2)\Big|_{u=x^3} = 1-4x^3-3x^6. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 由于导数记号 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 在引入微分概念之后可以看成为 $\mathrm{d}y$ 除以 $\mathrm{d}x$, 又利用一阶微分的形式不变性, 因此本题也可以如下计算:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(x^3)} &= \frac{\mathrm{d}(x^3-2x^6-x^9)}{\mathrm{d}(x^3)}\\ &= \frac{(3x^2-12x^5-9x^8)\,\mathrm{d}x}{3x^2\,\mathrm{d}x} = 1-4x^3-3x^6.\quad \square\end{aligned}$$

习题 1097 设扇形的半径 $R=100\,\mathrm{cm}$, 中心角 $\alpha=60°$, 在下列情形下, 这个扇形的面积分别改变了多少?

(a) 半径 R 增加 1 cm;　(b) 中心角 α 减少 $30'$.

分别给出精确解和近似解.

解　扇形面积 $S=\frac{1}{2}R^2\cdot\frac{\pi}{180}\alpha$, 其中角 α 采用度为单位.

(a) 中心角 $\alpha=60°$ 固定时,

$$\Delta S=\frac{1}{2}(101^2-100^2)\frac{\pi}{3}=100.5\cdot\frac{\pi}{3}\approx 105.243\,\mathrm{cm}^2,$$

用微分计算则为

$$\mathrm{d}S=R\cdot\frac{\pi}{3}\,\mathrm{d}R\approx 104.720\,\mathrm{cm}^2.$$

(b) 半径 $R=100\,\mathrm{cm}$ 固定时,

$$\Delta S=-\frac{5000\pi}{180}\cdot\frac{1}{2}\approx -43.633\,\mathrm{cm}^2,$$

用微分计算则因 S 为 α 的线性函数, 因此同样有 $\mathrm{d}S=\Delta S\approx -43.633\,\mathrm{cm}^2$.　$\square$

注　(a) 表明用微分计算误差一般要比用函数的表达式计算增量来得方便, (b) 则表明对于线性函数来说因变量增量与微分没有差别.

习题 1098 单摆振动的周期由公式 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 给出, 其中 l 是摆的长度, $g=9.8$ $\mathrm{m/s^2}$ 是自由落体的加速度. 将 $l=0.2\,\mathrm{m}$ 的摆改变多少时, 可以使得周期 T 增加 0.05 s?

解　如果不用微分法, 则可以先按照公式计算出改变前的 $T=0.898\,\mathrm{s}$, 然后将 T 加上 0.05 s, 再计算出这时的 $l=0.223\,\mathrm{m}$, 因此摆长应当增加 0.023 m, 即 2.3 cm.

采用微分法, 则有

$$\mathrm{d}T=\frac{\pi}{\sqrt{gl}}\,\mathrm{d}l,$$

然后取 $\mathrm{d}T=0.05\,\mathrm{s}$, 即可求出 $\mathrm{d}l=0.022\,\mathrm{m}$, 即 2.2 cm.　$\square$

习题 1099 用微分代替函数的增量, 求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解　取函数 $y=\sqrt[3]{x}$, $x=1$, $\Delta x=0.02$, 则从微分公式

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

可得到 $\mathrm{d}y\approx 0.006\,667$, 因此 $\sqrt[3]{1.02}\approx 1.006\,667$.　$\square$

注　这个近似值有几位是精确的? 用计算器可得到 $\sqrt[3]{1.02}\approx 1.006\,623$, 其中的数字都是精确的. 可见上述用微分法求出的近似值 1.006 6 的每一位数字都是精确的 (关于精确到 n 位数字的意义见 §1.1.5 开始的说明).

这里当然有一个问题, 即有什么方法可以用来估计微分代替增量带来的误差是多少? 这在学习了 §2.10 的泰勒公式之后即可解决.

习题 1104.1 证明近似公式

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\quad (a>0),$$

其中 $|x|\ll a$. (正数 A 和 B 之间的关系 $A\ll B$, 就是说 A 相对于 B 而言, A 为非常小的量.)

利用这个公式求下列各数的近似值, 并与数表作比较.

(a) $\sqrt{5}$; (b) $\sqrt{34}$; (c) $\sqrt{120}$.

解 令 $y=\sqrt{u}$, 在点 $u=a^2$ 处取 $\Delta u=x$, 则有 $y(a^2)=a$, 且有

$$\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)\Big|_{u=a^2}\mathrm{d}u=\frac{x}{2a},$$

因此就得到所要的近似公式.

以下只给出小题 (a) 的解, 请读者完成小题 (b) 和 (c).

(a) 若取 $a=2$, $x=1$, 则就有

$$\sqrt{5}\approx 2+\frac{1}{4}=2.25.$$

如果对此不满足, 则还可以取 $a=2.2$, $x=0.16$, 则有

$$\sqrt{5}\approx 2.2+\frac{0.16}{4.4}=2.2\dot{3}\dot{6}.$$

用计算器知道有 $\sqrt{5}\approx 2.236\,068$. 因此用微分法得到的 2.236 中的数字都是精确的. □

习题 1106 正方形的边长 $x=2.4\ \mathrm{m}\pm 0.05\ \mathrm{m}$. 计算这个正方形的面积, 它的最大的绝对误差和相对误差各为多少?

解 令 $S=x^2$, $x_0=2.4\ \mathrm{m}$, $|\Delta x|\leqslant 0.05\ \mathrm{m}$. 如不用微分法, 则 $\Delta S=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2$, 因此绝对误差为

$$|\Delta S|\leqslant 2\times 2.4\times 0.05+0.05^2=0.242\,5\ \mathrm{m}^2\ ,$$

而相对误差为

$$\left|\frac{\Delta S}{S}\right|\leqslant\frac{0.2425}{2.4\times 2.4}=0.042,$$

即约为 4.2%.

用微分法则有 $\mathrm{d}S=2x\,\mathrm{d}x$, 即得到绝对误差限 $|\mathrm{d}S|\leqslant 2\times 2.4\times 0.05=0.24\ \mathrm{m}^2$, 以及相对误差限 $\left|\frac{\mathrm{d}S}{S}\right|\leqslant\frac{0.24}{2.4\times 2.4}\approx 0.041\,667$. □

§2.5 高阶导数和微分 (习题 1111–1234)

内容简介 本节的计算题要比前几节的一阶导数和一阶微分的计算复杂一些. 对于 n 阶导数的计算有时需要特殊的技巧, 对于高阶微分的计算则由于不再具有形式不变性, 因此需要注意题中除了因变量之外, 哪一个变量是自变量.

2.5.1 显函数的高阶导数和微分的计算 (习题 1111–1139)

先看几个较简单的习题.

习题 1118 求函数 $y=\ln f(x)$ 的二阶导数, 其中设 f 二阶可导.

解 接连两次求导得到

$$y'=\frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$y''=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)'=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}. \quad \square$$

习题 1120 设 $y=\mathrm{e}^{\sin x}\cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$.

解 1 在 y 的表达式中令 $x=0$ 代入, 得到 $y(0)=1$.

将 y 对 x 求导得到

$$y'=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\cdot\cos(\sin x)-\mathrm{e}^{\sin x}\sin(\sin x)\cdot\cos x, \tag{2.2}$$

再令 $x=0$ 代入得到 $y'(0)=1$.

将 y' 对 x 求导得到

$$\begin{aligned}
y''&=\mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x\cdot\cos(\sin x)-\mathrm{e}^{\sin x}\sin x\cdot\cos(\sin x)\\
&\quad-\mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x\cdot\sin(\sin x)-\mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x\cdot\sin(\sin x)\\
&\quad+\mathrm{e}^{\sin x}\sin(\sin x)\cdot\sin x-\mathrm{e}^{\sin x}\cos(\sin x)\cdot\cos^2 x\\
&=-\mathrm{e}^{\sin x}\sin x\cdot\cos(\sin x)-2\mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x\cdot\sin(\sin x)+\mathrm{e}^{\sin x}\sin(\sin x)\cdot\sin x,
\end{aligned}$$

令 $x=0$ 代入即有 $y''(0)=0$. $\square$

解 2 在得到 y' 的表达式 (2.2) 之后的计算可以简化.

为此将 (2.2) 右边的第一项写为 $y\cos x$, 则对它再次求导得到

$$(y\cos x)'\Big|_{x=0}=y'(0)=1,$$

而在 (2.2) 的第二项的三个因子中, 第二个因子 $\sin(\sin x)$ 在 $x=0$ 时为 0, 因此只需对这个因子求导并令 $x=0$ 代入即可, 这就是

$$(-\mathrm{e}^{\sin x}\sin(\sin x)\cos x)'\Big|_{x=0}=(-\mathrm{e}^{\sin x}\cos(\sin x)\cos^2 x)\Big|_{x=0}=-1,$$

可见 $y''(0)=1-1=0$. $\square$

习题 1124 设 $u=u(x)$ 和 $v=v(x)$ 为二阶可微函数, 求函数 $y=u^v$ 的二阶导数.

解 用对数求导法, 即有

$$y'=y(\ln y)'=y(v\ln u)'=y\Big(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\Big)$$
$$=u^v v'\ln u+vu^{v-1}u',$$

然后再求导得到

$$y''=y\Big(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\Big)^2+y\Big(v''\ln u+2v'\frac{u'}{u}+\frac{vu''}{u}-\frac{vu'^2}{u^2}\Big)$$
$$=u^v\Big(v'^2\ln^2 u+\frac{2vv'u'\ln u}{u}+\frac{v^2u'^2}{u^2}+v''\ln u+\frac{2v'u'}{u}+\frac{vu''}{u}-\frac{vu'^2}{u^2}\Big).\quad\square$$

习题 1130 就下列两种情形, 对函数 $y=\mathrm{e}^x$ 求 d^2y:
(a) x 为自变量;　(b) x 为中间变量.

解 1　(a) 这时 $\mathrm{d}^2y=y''_{x^2}\,\mathrm{d}x^2$, 因此只要先计算出

$$y'_x=\mathrm{e}^x,\quad y''_{x^2}=\mathrm{e}^x,$$

就得到 $\mathrm{d}^2y=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x^2$.

(b) 在 x 为中间变量时, 设 $x=x(t)$, 自变量为 t, 则就有 $\mathrm{d}^2y=y''_{t^2}\,\mathrm{d}t^2$. 因此只要先计算出

$$y'_t=\mathrm{e}^x x'(t),\quad y''_{t^2}=\mathrm{e}^x[x'(t)]^2+\mathrm{e}^x x''(t),$$

然后就得到

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{e}^x[x'(t)]^2\,\mathrm{d}t^2+\mathrm{e}^x x''(t)\,\mathrm{d}t^2.\quad\square$$

解 2　(a) 先有 $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, 然后利用 x 为自变量时 $\mathrm{d}^2x=0$, 因此就得到

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x^2.$$

(b) 利用一阶微分的形式不变性, 就有 $\mathrm{d}y=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, 然后再计算得到

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x)=\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x^2+\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}^2x.\quad\square$$

注　解 2 的 (b) 比较简单, 但需要注意, 按照定义, 微分 d 总是对于最终的自变量而言的. 若在其中令 $x=x(t)$, $\mathrm{d}x=x'(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}^2x=x''(t)\,\mathrm{d}t^2$, 则得到的答案与解 1(b) 完全相同. 只是解 2 的形式还适用于 x 是多个自变量的函数等情况, 因此更为一般.

习题 1135 设 u 和 v 为关于变量 x 的二阶可微函数, 对函数 $y=\dfrac{u}{v}$ 求 d^2y.

解　利用 §2.4 的习题 1091 的注中提出的公式 (2.1), 就有

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{v}\mathrm{d}u-\frac{u}{v^2}\mathrm{d}v,$$

然后再求一次微分, 这时除了 $\mathrm{d}(\mathrm{d}u)=\mathrm{d}^2u$ 和 $\mathrm{d}(\mathrm{d}v)=\mathrm{d}^2v$ 之外, 对于其余因子仍然可以用公式 (2.1), 于是得到

$$\mathrm{d}^2y=-\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u+\frac{1}{v}\,\mathrm{d}^2u+\Big(-\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}u+\frac{2u}{v^3}\,\mathrm{d}v\Big)\,\mathrm{d}v-\frac{u}{v^2}\,\mathrm{d}^2v$$
$$=-\frac{2}{v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v+\frac{2u}{v^3}\,\mathrm{d}v^2+\frac{1}{v}\,\mathrm{d}^2u-\frac{u}{v^2}\,\mathrm{d}^2v.\quad\square$$

注　最后的结果中不出现 $\mathrm{d}u^2$ 项, 这是因为 y 关于 u 是线性函数.

2.5.2 非显函数的高阶导数和微分的计算 (习题 1140–1150)

习题 1140 对以参数形式 $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ 给定的函数 $y=y(x)$, 求导数 y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}.

解 一阶导数的计算公式见 §2.2, 即是

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3(1+t)}{2},$$

由于 y'_x 和 x 仍然是通过参数 t 发生函数关系, 因此就可以将求 y'_x 的法则用于求二阶导数, 即有

$$y''_{x^2}=\frac{(y'_x)_t}{x'_t}=\frac{\frac{3}{2}}{2-2t}=\frac{3}{4(1-t)},$$

并可以继续做下去得到

$$y'''_{x^3}=\frac{(y''_x)_t}{x'_t}=\frac{\frac{3}{4(1-t)^2}}{2-2t}=\frac{3}{8(1-t)^3}.\quad \square$$

注 本题的函数图像见附录二的习题 1532, 上述关于 y''_{x^2} 的计算为讨论该曲线的凹凸性做好了准备.

习题 1144 对以参数形式 $x=f'(t)$, $y=tf'(t)-f(t)$ 给定的函数 $y=y(x)$, 求导数 y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}. (其中设 f 三阶可微.)

解 按照公式计算得到

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=t,$$

$$y''_{x^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{1}{f''(t)},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}.\quad \square$$

注 从 $y'_x=t$ 可见, 参数 t 就是曲线 $y=y(x)$ 的切线斜率. 这个变换称为勒让德变换, 它是称为接触变换 (或切触变换) 的一大类变换中的特例. 可以看出, 有

$$t=y'_x,\quad f(t)=tf'(t)-y=xy'_x-y,$$

因此其逆变换具有相同的形式 (可参见 [6] 的第一卷的 §6.4 的 218 节之 5)).

下一个习题讨论了一般的反函数求导的计算方法.

习题 1145 设函数 $y=f(x)$ 是足够多次可微的函数, 求反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数 x', x'', x''', $x^{(4)}$ (假设这些导数存在).

解 为清楚起见, 将 x', x'' 等记为 x'_y, x''_y 等. 如 §2.2 所示, x'_y 有现成的公式

$$x'_y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=(f^{-1}(y))'_y=\frac{1}{f'(x)}\Big|_{x=f^{-1}(y)}. \tag{2.3}$$

其中写出了几个表达方式, 特别是最后一式强调在 $\frac{1}{f'(x)}$ 中的 $x=f^{-1}(y)$, 从而是以复合函数的形式成为 y 的函数. 在这样理解之后对于 y 再求导就没有困难.

在 (2.3) 的基础上用链式法则就有

$$x''_y=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}(x'_y)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3},$$

其中为简明起见没有再写出 $x=f^{-1}(y)$, 但只有记住这一点才知道在上述计算中要乘上因子 $\frac{1}{f'(x)}$. 于是有

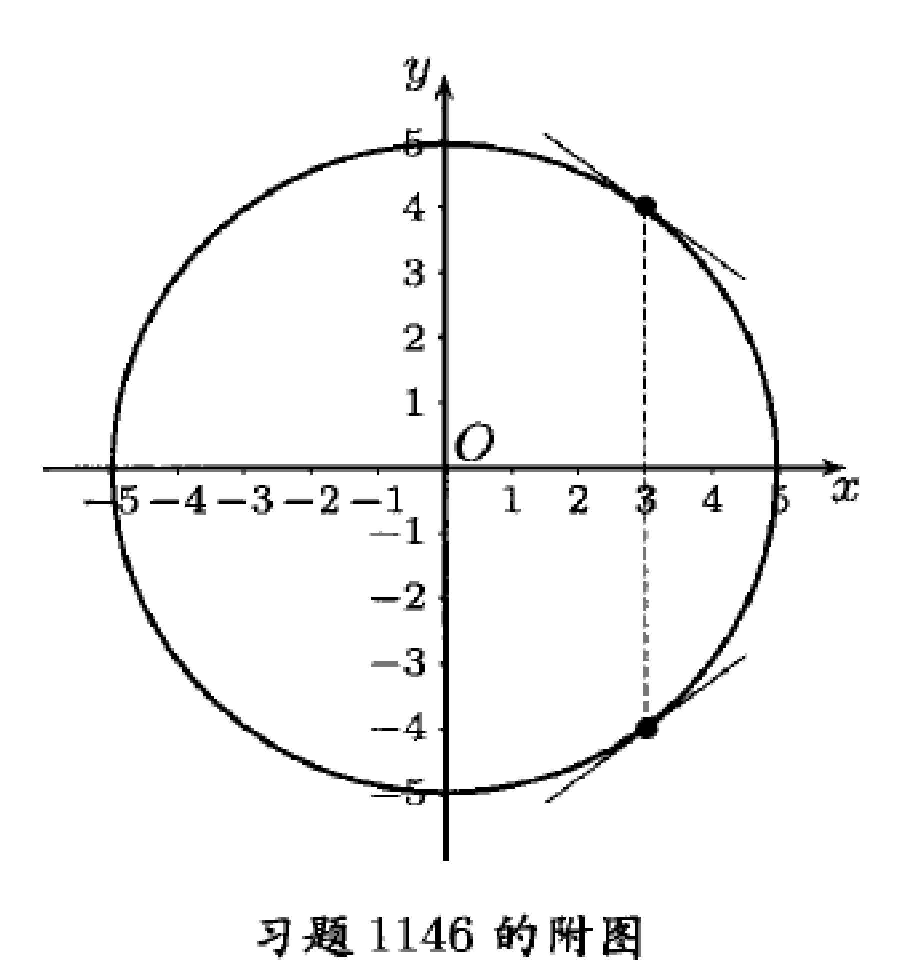
$$x'''_y=\frac{\mathrm{d}(x''_y)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(-\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^3}+\frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^4}\right)\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^4}+\frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5},$$

$$x^{(4)}_y=\frac{\mathrm{d}(x'''_y)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(-\frac{f^{(4)}(x)}{[f'(x)]^4}+\frac{10f'''(x)f''(x)}{[f'(x)]^5}-\frac{15[f''(x)]^3}{[f'(x)]^6}\right)\cdot\frac{1}{f'(x)}$$

$$=-\frac{f^{(4)}(x)}{[f'(x)]^5}+\frac{10f'''(x)f''(x)}{[f'(x)]^6}-\frac{15[f''(x)]^3}{[f'(x)]^7},$$

其中注意每次对 x 求导后还要乘上因子 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{f'(x)}$, 否则就不能得到正确的答案, 因为自变量是 y, 而不是 x. □

习题 1146 对于由 $x^2+y^2=25$ 确定的隐函数 $y=y(x)$, 求 y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}. 在点 $M(3,4)$ 处的 y', y'' 和 y''' 等于什么?



习题 1146 的附图

解 将方程中的 y 看成为 $y(x)$, 然后求导得到

$$2x+2y(x)y'(x)=0,$$

于是可解出得到 $y'(x)=-\frac{x}{y(x)}$.

对上式再求导得到

$$y''(x)=-\frac{1}{y(x)}+\frac{xy'(x)}{y^2(x)}=-\frac{25}{y^3(x)},$$

$$y'''(x)=\frac{75}{y^4(x)}\cdot y'(x)=-\frac{75x}{y^5(x)}.$$

再用 $x=3$, $y(3)=4$ 代入得到

$$y'(3)=-\frac{3}{4},\ y''(3)=-\frac{25}{64},$$

$$y'''(3)=-\frac{225}{1\,024}.\quad □$$

注 从附图可见, 在圆周上 $y\neq 0$ 的任何点 (x,y) 的邻近, 均可以从方程解出两个显表达式 $y=\sqrt{25-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{25-x^2}$. 题中求出的前三阶导数的表达式对于这两个显表达式同时适用. 例如图中标出的两个点 $(3,4)$ 和 $(3,-4)$, 分别具有斜率为 $-\frac{3}{4}$ 和 $\frac{3}{4}$ 的切线, 而这两个斜率都满足 $y'(x)=-\frac{x}{y(x)}$.

这对于由一般方程确定的隐函数也成立, 即由方程得到的隐函数导数公式对于满足方程的各个隐函数同时有效.

2.5.3 应用题 (习题 1151–1155)

习题 1151 设函数 $f(x)$ 在 $x \leqslant x_0$ 时有定义且二阶可微. 系数 a, b 和 c 应当怎样选取, 使得函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & x > x_0 \end{cases}$$

是二阶可微的?

解 在 $x > x_0$ 时的二次函数 (记为 $g(x)$) 可以将其定义域延拓到 $x = x_0$, 而且这时 g 直到其二阶导函数在点 x_0 处都是连续的.

根据条件, 应当使得 $x > x_0$ 时的二次函数当 $x \to x_0 + 0$ 时的函数值及其直到其二阶导数值的极限与 f 在点 x_0 的函数值及其直到二阶导数值分别相等, 也就是

$$g(x_0+0) = c = f(x_0),$$
$$g'(x_0+0) = b = f'_-(x_0),$$
$$g''(x_0+0) = 2a = f''_-(x_0),$$

这样就完全确定了 a, b, c.

由于 c 的选择保证了 F 在点 x_0 处连续, 根据单侧导数极限定理 (即习题 1258.1), 因此从 b 的选择就有 $F'_+(x_0) = F'_-(x_0)$, 于是 F 于点 x_0 处可微. 同时从 f 与 g 的条件又推出 F' 于点 x_0 处连续, 于是可以再次用单侧导数极限定理推出 $F''_+(x_0) = F''_-(x_0)$, 即保证了 F 于点 x_0 处二阶可微. □

注 1 以上求解可以不用导数极限定理. 实际上从 c 确定之后就可以用 $g(x)$ 的表达式直接计算出 $F'_+(x_0) = b$, 而在 c, b 确定之后可以直接计算出 $F''_+(x_0) = 2a$.

注 2 由于牛顿力学第二定律, 力与加速度直接有关, 因此在许多工程问题中的各种轨道曲线的连接点处, 不仅要求光滑 (即一阶可微), 而且还要求二阶可微, 也就是要求曲线的曲率连续过渡. (参见 §2.14 的习题 1591, 1610 等.)

接下来的习题 1152–1155 都是计算点运动的速度与加速度, 这是一阶导数和二阶导数的另一个重要的应用领域.

2.5.4 高阶导数与微分计算 (续) (习题 1156–1185)

本节到此为止的习题多数只是计算二阶或三阶导数与微分, 而下面所计算的导数或微分的阶数往往比较高, 因此需要莱布尼茨公式以及其他技巧的配合.

习题 1156 $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, 求 $y^{(6)}$ 和 $y^{(7)}$.

解 由于 $y(x)$ 是六次多项式, 而 x^6 项的系数为 4, 可见 $y^{(6)} = 4 \cdot 6! = 2880$, $y^{(7)} = 0$. □

习题 1159 $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, 求 $y^{(8)}$.

解 1 将 $y(x)$ 看成为 x^2 与 $\dfrac{1}{1-x}$ 的乘积, 用莱布尼茨公式求导只要计算 3 项:

$$\begin{aligned}y^{(8)}&=x^2[(1-x)^{-1}]^{(8)}+\mathrm{C}_8^1\cdot 2x[(1-x)^{-1}]^{(7)}+\mathrm{C}_8^2\cdot 2[(1-x)^{-1}]^{(6)}\\&=x^2\cdot\frac{8!}{(1-x)^9}+\frac{2x\cdot 8!}{(1-x)^8}+\frac{8!}{(1-x)^7}\\&=\frac{8!}{(1-x)^9}\cdot[x^2+2x(1-x)+(1-x)^2]\\&=\frac{8!}{(1-x)^9}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 将有理分式函数分解为多项式与真分式之和后求导较为方便. 先作分解:

$$y=\frac{x^2-1+1}{1-x}=-x-1+\frac{1}{1-x},$$

然后求导就得到①

$$y^{(8)}=\frac{8!}{(1-x)^9}.\quad\square$$

习题 1160 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求 $y^{(100)}$.

解 1 采用上题的分解方法, 则有

$$\begin{aligned}y^{(100)}&=\left(2(1-x)^{-\frac12}-(1-x)^{\frac12}\right)^{(100)}\\&=2(-1)^{100}\left(-\frac12\right)\left(-\frac32\right)\cdots\left(-\frac12-99\right)(1-x)^{-\frac{201}{2}}\\&\qquad-(-1)^{100}\frac12\left(-\frac12\right)\cdots\left(-\frac12-98\right)(1-x)^{-\frac{199}{2}}\\&=\frac{1}{2^{99}}(199!!)(1-x)^{-\frac{201}{2}}+\frac{1}{2^{100}}(197!!)(1-x)^{-\frac{199}{2}}\\&=\frac{(197!!)(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 直接用莱布尼茨公式也只有两项, 因此就有

$$\begin{aligned}y^{(100)}&=(1+x)((1-x)^{-\frac12})^{(100)}+100((1-x)^{-\frac12})^{(99)}\\&=\frac{(1+x)}{2^{100}}(199!!)(1-x)^{-\frac{201}{2}}+\frac{100}{2^{99}}(197!!)(1-x)^{-\frac{199}{2}}\\&=\frac{(199!!)(1+x)+200(197!!)(1-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}\\&=\frac{(197!!)(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}.\quad\square\end{aligned}$$

① 这里利用了两点: (1) 求导 (以及微分) 对于函数为线性运算, 即 $(af+bg)'=af'+bg'$, (2) 幂函数的导数计算较容易, 其中包括多项式和 x^{-1} 在内.

习题 1164 $y=\dfrac{\ln x}{x}$, 求 $y^{(5)}$.

解 1 直接用莱布尼茨公式做, 则得到 6 项, 计算似乎较繁复. 是否有其他方法?

从 $y'=\dfrac{-\ln x+1}{x^2}$, $y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3},\cdots$, 可以猜测本题的 y 的 n 阶导数具有下列特殊形式:

$$y^{(n)}=\frac{a_n\ln x+b_n}{x^{n+1}},$$

实际上这对于 $n=0,1$ 已经正确, 而从 n 到 $n+1$ 可从以下计算得到证实:

$$y^{(n+1)}=\left(\frac{a_n\ln x+b_n}{x^{n+1}}\right)'=\frac{-(n+1)(a_n\ln x+b_n)+a_n}{x^{n+2}}.$$

这同时提供了两个系数形成的数列的迭代公式:

$$a_{n+1}=-(n+1)a_n,\quad b_{n+1}=-(n+1)b_n+a_n.$$

于是就可以从 $a_0=1$ 和 $b_0=0$ 开始作如下计算:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	1	-1	2	-6	24	-120
b_n	0	1	-3	11	-50	274

即有 $y^{(5)}=\dfrac{-120\ln x+274}{x^6}$. □

注 从迭代公式不难求出数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项为

$$a_n=(-1)^n n!,\ n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=(-1)^{n-1}n!\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right),\ n=1,2,\cdots,\ b_0=0.$$

这样就解决了对任意 n 的 $y^{(n)}$ 的计算问题. (它以求 $\mathrm{d}^n y$ 的形式出现在习题 1212 中.)

解 2 ($y^{(n)}$ 的计算公式的一般性推导) 在用以上方法得到了 $y^{(n)}$ 的一般公式之后, 可以发现用莱布尼茨公式直接证明它也是容易的. 利用 k 为正整数时有

$$(\ln x)^{(k)}=\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k},\ \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=(\ln x)^{(k+1)},$$

即可计算如下:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(\ln x)^{(n-k)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k\frac{(-1)^{n-k-1}(n-k-1)!}{x^{n-k}}\cdot\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}+\mathrm{C}_n^n\ln x\cdot\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\\&=\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right)+\ln x\cdot\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},\end{aligned}$$

其中最后利用了 $\mathrm{C}_n^k(n-k-1)!k!=\dfrac{n!}{n-k}$, $k=0,1,\cdots,k-1$. □

习题 1166 $y=\dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 求 y'''.

解 为方便起见, 在用莱布尼茨公式计算之前, 先令 $1-3x=t$, 则每次对 t 求导后乘以 -3 就是对 x 求导. 于是可计算如下:

$$
\begin{aligned}
y'''_{x^3} &= -27\,[\cos(t-1)t^{-\frac{1}{3}}]'''_{t^3}\\
&= -27\sin(t-1)t^{-\frac{1}{3}} - 27\cdot 3(-\cos(t-1))\cdot(-\frac{1}{3})\,t^{-\frac{4}{3}}\\
&\quad - 27\cdot 3(-\sin(t-1))\cdot(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\,t^{-\frac{7}{3}} - 27\cdot\cos(t-1)(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})\,t^{-\frac{10}{3}}\\
&= -27\Big[\sin(t-1)t^{-\frac{1}{3}} + \cos(t-1)t^{-\frac{4}{3}} - \sin(t-1)\frac{4}{3}t^{-\frac{7}{3}} - \cos(t-1)(\frac{28}{27})t^{-\frac{10}{3}}\Big]\\
&= \cos(t-1)[-27t^{-\frac{4}{3}} + 28t^{-\frac{10}{3}}] + \sin(t-1)[-27t^{-\frac{1}{3}} + 36t^{-\frac{7}{3}}]\\
&= \cos 3x[-27(1-3x)^{-\frac{4}{3}} + 28(1-3x)^{-\frac{10}{3}}]\\
&\qquad + \sin 3x[27(1-3x)^{-\frac{1}{3}} - 36(1-3x)^{-\frac{7}{3}}]. \quad \square
\end{aligned}
$$

习题 1167 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$, 求 $y^{(10)}$.

解 为便于利用导数运算的线性性质, 先用积化和差公式将三角函数改写为

$$y=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 3x)\sin 3x=\frac{1}{4}(\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x),$$

然后求导得到

$$y^{(10)}=-2^8\sin 2x-2^{18}\sin 4x+2^8\cdot 3^{10}\sin 6x. \quad \square$$

习题 1175 $y=\cos x\cdot\cosh x$, 求 d^6y.

解 1 只要先求出 $y^{(6)}$. 利用 $\cos x$ 逐次求导具有周期 4 的规律和

$$(\cosh x)^{(2n)}=\cosh x, \quad (\cosh x)^{(2n-1)}=\sinh x,$$

即可用莱布尼茨公式求得

$$
\begin{aligned}
y^{(6)} &= \sum_{k=0}^{6}\mathrm{C}_6^k(\cos x)^{(6-k)}(\cosh x)^{(k)}\\
&= -\cos x\cosh x - 6\sin x\sinh x + 15\cos x\cosh x + 20\sin x\sinh x\\
&\qquad - 15\cos x\cosh x - 6\sin x\sinh x + \cos x\cosh x\\
&= 8\sin x\sinh x,
\end{aligned}
$$

于是得到 $\mathrm{d}^6y=8\sin x\sinh x\,\mathrm{d}x^6$. $\square$

解 2 用复数方法可计算如下:

$$\begin{aligned}
y^{(6)} &= \mathrm{Re}\Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\Big(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\Big)\Big]^{(6)}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\Big)^{(6)}\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big((1+\mathrm{i})^6\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+(-1+\mathrm{i})^6\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\Big)\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\Big((\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}})^6\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}3\pi}{4}})^6\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\Big)\\
&= 4\,\mathrm{Re}\Big(-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}+\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}\Big)\\
&= 4[\mathrm{e}^x\sin x+\mathrm{e}^{-x}(-\sin x)] = 8\sin x\sinh x,
\end{aligned}$$

于是得到 $\mathrm{d}^6y = 8\sin x\sinh x\,\mathrm{d}x^6$. □

注 在 §1.10.1 的习题 819 中已经引入了复数计算方法, 在 §1.10.2 中又定义了实变复值函数的求导规则. 由于这种方法将在今后经常使用, 我们在这里作一个简要的介绍.

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是某个区间上的实函数, 则称 $f(x)+\mathrm{i}g(x)$ 为该区间上的实变复值函数. 若 $f(x), g(x)$ 可微, 则定义

$$[f(x)+\mathrm{i}g(x)]' = f'(x)+\mathrm{i}g'(x).$$

应用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x+\mathrm{i}\sin x$, 可以按照上述定义计算得到

$$\begin{aligned}
(\mathrm{e}^{f(x)+\mathrm{i}g(x)})' &= [\,\mathrm{e}^{f(x)}(\cos g(x)+\mathrm{i}\sin g(x))]'\\
&= [\,\mathrm{e}^{f(x)}\cos g(x)]'+\mathrm{i}[\mathrm{e}^{f(x)}\sin g(x)]'\\
&= [\,\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\cos g(x)-\mathrm{e}^{f(x)}\sin g(x)\cdot g'(x)]\\
&\qquad +\mathrm{i}[\,\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\sin g(x)+\mathrm{e}^{f(x)}\cos g(x)\cdot g'(x)]\\
&= [f'(x)+\mathrm{i}g'(x)]\,\mathrm{e}^{f(x)+\mathrm{i}g(x)}.
\end{aligned}$$

特别是对于实数 α, β 有

$$(\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x})' = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}.$$

这样就证明了平时熟知的指数函数求导公式 $(\mathrm{e}^{u(x)})' = u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$ 对于 $u(x)$ 为实变复值函数的情况也成立, 特别是公式 $(\mathrm{e}^{ax})' = a\,\mathrm{e}^{ax}$ 对于 a 为复数的情况也成立.

如 §2.1.4 的习题 1024(b) 所示, 用复数计算方法往往可以将三角函数的运算转换为指数函数的运算, 从而可能 (但不一定) 带来方便.

常用的还有下面的棣莫弗公式:

$$(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n = \cos nx+\mathrm{i}\sin nx.$$

它与欧拉公式 $\cos x+\mathrm{i}\sin x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 的关系是明显的, 即是 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$.

习题 1179 设 x 为某个自变量的函数, $y = f(x)$, 求 d^2y, d^3y 和 d^4y.

解 这里只要注意, 一般来说这时对于 $k>1$ 的 $\mathrm{d}^kx \neq 0$ ①.

从 $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ 出发, 利用一阶微分的不变性和 $\mathrm{d}(\mathrm{d}^kx) = \mathrm{d}^{k+1}x$ 即可计算得到:

① 若 x 为其他自变量的线性函数, 则对于 $k>1$ 仍然有 $\mathrm{d}^kx = 0$.

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x,$$
$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x,$$
$$d^4y = f^{(4)}(x)\,dx^4 + 6f'''(x)\,dx^2\,d^2x + 4f''(x)\,dx\,d^3x + 3f''(x)(d^2x)^2 + f'(x)\,d^4x. \quad \square$$

习题 1180 在 x 不假设为自变量时, 通过对变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y = f(x)$ 的导数 y'' 和 y'''.

解 由一阶微分的形式不变性, 已有 $y' = \dfrac{dy}{dx}$. 从
$$dy = y'\,dx$$
出发再微分一次得到
$$d^2y = y''\,dx^2 + y'\,d^2x,$$
并将 $y' = \dfrac{dy}{dx}$ 代入, 即可解出
$$y'' = \frac{d^2y - y'\,d^2x}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy\,d^2x}{dx^3}.$$
对于 d^2y 再微分一次得到
$$d^3y = y'''\,dx^3 + 3y''\,dx\,d^2x + y'\,d^3x,$$
然后将 y' 和 y'' 的前述表达式代入后即可解出
$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{3d^2y\,d^2x}{dx^4} + \frac{3dy\,(d^2x)^2}{dx^5} - \frac{dy\,d^3x}{dx^4}. \quad \square$$
习题 1181–1185 均与齐次线性常微分方程有关, 即验证含有几个任意常数的表达式满足某一个微分方程.

看其中的第一题.

习题 1181 证明, 函数
$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$
(C_1 和 C_2 为任意常数) 满足方程 $y'' + y = 0$.

解 $y'' + y = 0$ 是线性齐次常微分方程, 它的任何两个解的线性组合仍然是该方程的解, 因此只要验证 $\cos x$ 和 $\sin x$ 分别是方程的解就足够了, 而从 $(\cos x)'' = -\cos x$ 和 $(\sin x)'' = -\sin x$ 就知道这是正确的. $\square$

用微分方程的术语, 题中的表达式就是微分方程的通解. 接下来的 3 个习题也是给出了二阶齐次线性常微分方程的通解, 每个表达式含有两个任意常数. 最后一个习题 1185 是四阶齐次线性常微分方程 $y^{(4)} + y = 0$ 的通解, 含有 4 个任意常数. 此题若用欧拉公式在复数域里做将比较容易.

2.5.5 n 阶导数与微分计算 (习题 1186–1234)

这里的习题都涉及计算某个函数的 n 阶导数或 n 阶微分, 所用的基本公式是

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a\ (a>0)$; $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$,

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$,

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$,

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} = \frac{m!}{n!}\cdot x^{m-n}$,

V. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

前面已经看到, 其中最后一个公式在习题 1164 的解 2 中起重要作用.

下面几个习题与前面的某些题有密切联系, 对它们只写出简单分析 (即提示).

习题 1187 设 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 求 $P^{(n)}(x)$.

分析 参见习题 1156 中对于一个六次多项式求其六阶和七阶导数. □

习题 1188 对函数 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 求 $y^{(n)}$.

分析 当 $n=1$ 时就是 §2.1.2 的习题 844. 回顾那里的三个解法, 可以发现其中的解 3 特别适合用于计算一般的 n 阶导数. □

习题 1189 对函数 $y = \frac{1}{x(1-x)}$ 求 $y^{(n)}$.

分析 回顾习题 1159, 显然在分解为简单分式后再求导就方便得多. □

习题 1195 对函数 $y = \sin^3 x$ 求 $y^{(n)}$.

解 本题与其前后的不少习题属于同一类型, 即 $y(x)$ 是正弦和余弦函数所成的多项式, 此时一般宜化为倍角函数的代数和之后再求导为好①.

先利用三角恒等式作如下变换:

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \sin x \cdot \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\\ &= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x)\\ &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,\end{aligned}$$

然后求导得到

$$y^{(n)} = \frac{3}{4}\sin(x + \frac{n\pi}{2}) - \frac{3^n}{4}\sin(3x + \frac{n\pi}{2}). \quad □$$

这里能够熟练应用有关的三角恒等式是重要的. 下一题也是如此.

习题 1201 对函数 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ 求 $y^{(n)}$.

① 与此类似的是习题 1167 , 其中对于 $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$ 计算其 10 阶导数.

解 可以如下变换函数为

$$y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x,$$

然后求导得到 $y^{(n)} = 4^{n-1}\cos(4x + \frac{n\pi}{2})$. □

如下所示, 用复数方法可以一举求出习题 1206 和 1207 的答案.

习题 1206 对函数 $y = \mathrm{e}^x \cos x$ 求 $y^{(n)}$.

解 令 $F(x) = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \sin x = \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$, 则就有

$$F^{(n)} = (\mathrm{e}^x \cos x)^{(n)} + \mathrm{i}\,(\mathrm{e}^x \sin x)^{(n)}$$
$$= (1+\mathrm{i})^n \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})]^n \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$$
$$= 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4})\cdot(\mathrm{e}^x\cos x + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \sin x).$$

取其实部就得到

$$(\mathrm{e}^x \cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x(\cos\frac{n\pi}{4}\cos x - \sin\frac{n\pi}{4}\sin x) = 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\cos(x + \frac{n\pi}{4}),$$

若取虚部则就得到

$$(\mathrm{e}^x \sin x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x(\cos\frac{n\pi}{4}\sin x + \sin\frac{n\pi}{4}\cos x) = 2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^x\sin(x + \frac{n\pi}{4}).$$

后者就是习题 1207 的答案. □

注 这两个题以及前面的许多题在有了答案之后往往也可以用数学归纳法来证明. 它的缺点是要事先能够猜出正确答案是什么后才可以做.

习题 1215 先将函数 $f(x) = \sin^{2p} x$ (p 为正整数) 化为三角多项式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx,$$

然后求 $f^{(n)}(x)$.

解 用欧拉公式 $\sin x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$, 就有

$$\sin^{2p} x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p} \mathrm{C}_{2p}^k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xk}(-1)^{2p-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(2p-k)}$$
$$= \frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p} \mathrm{C}_{2p}^k(-1)^{2p-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x(k-p)},$$

然后将其中 $k = p$ 的项单独提出, 而将 $k = 0, 1, \cdots, p-1$ 的项分别与 $k = 2p, 2p-1, \cdots, p+1$ 的项再次用欧拉公式合并, 则就得到所求的三角多项式:

$$\sin^{2p} x = \frac{(-1)^p}{2^{2p}}[(-1)^p\mathrm{C}_{2p}^p + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\mathrm{C}_{2p}^k\,(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x(p-k)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2x(p-k)})]$$
$$= \frac{1}{2^{2p}}\mathrm{C}_{2p}^p + \frac{1}{2^{2p-1}}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\mathrm{C}_{2p}^{p-k}\cos 2kx.$$

然后就可求导得到

$$(\sin^{2p} x)^{(n)} = 2^{n-2p+1}\sum_{k=1}^{p}(-1)^k k^n \mathrm{C}_{2p}^{p-k} \cos(2kx + \frac{n\pi}{2}). \quad \Box$$

习题 1217 利用恒等式 $\dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\Big(\dfrac{1}{x-\mathrm{i}} - \dfrac{1}{x+\mathrm{i}}\Big)$, 证明

$$\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\,\mathrm{arccot}\, x].$$

解 将复数 $x+\mathrm{i}$ 写为三角形式 (即极坐标形式):

$$x+\mathrm{i} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 $r = \sqrt{x^2+1}$, $\theta = \mathrm{arccot}\, x$, 则又有 $x - \mathrm{i} = r(\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta)$. 于是可以用棣莫弗公式作如下计算:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big)^{(n)} &= \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\Big(\frac{1}{(x-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(x+\mathrm{i})^{n+1}}\Big)\\ &= \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}(x^2+1)^{n+1}} \cdot [(x+\mathrm{i})^{n+1} - (x-\mathrm{i})^{n+1}]\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \cdot r^{n+1}\sin(n+1)\theta\\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \sin[(n+1)\,\mathrm{arccot}\, x]. \quad \Box\end{aligned}$$

习题 1218 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 n 阶导数.

解 由 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 与上题的结论就得到

$$(\arctan x)^{(n)} = \Big(\frac{1}{x^2+1}\Big)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin(n\,\mathrm{arccot}\, x). \quad \Box$$

下面是求函数 f 在点 $x=0$ 处的所有阶导数的练习题.

习题 1220(b) 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的 $f^{(n)}(0)$.

解 1 在习题 1218 中已经求出了 f 的所有阶导函数, 令 $x=0$ 代入就得到

$$(\arctan x)^{(n)}\Big|_{x=0} = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin\frac{n\pi}{2}.$$

于是得到

$$(\arctan x)^{(n)}\Big|_{x=0} = \begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^k(2k)!, & n=2k+1. \quad \Box\end{cases}$$

解 2 求高阶导函数的一般表达式往往相当困难, 因此不通过高阶导函数的计算而直接计算在某一个点上的所有高阶导数的方法是有意义的. 下面介绍的方法可以解决许多类似的问题.

对 $f(x)=\arctan x$ 求导得到 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, 将它改写为

$$(x^2+1)f'(x)=1,$$

然后求导就得到

$$(x^2+1)f''(x)+2xf'(x)=0,$$

于是得到 $f'(0)=1,\ f''(0)=0$.

又对于 $(x^2+1)f'(x)=1$ 用莱布尼茨公式求两边的 $(n-1)$ 阶导数, 在 $n\geqslant 3$ 时得到

$$(x^2+1)f^{(n)}(x)+\mathrm{C}_{n-1}^1 2xf^{(n-1)}(x)+\mathrm{C}_{n-1}^2 2f^{(n-2)}(x)=0.$$

令 $x=0$ 代入得到

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$$

利用 $f''(0)=0$ 可推出 $f^{(2k)}(0)=0$ 对所有正整数 k 成立, 又从 $f'(0)=1$ 可推出 $f'''(0)=-2!,\ f^{(5)}(0)=4!,\cdots$, 从而可以归纳得到

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!. \quad \square$$

习题 1223 设 $f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的邻域内有 $(n-1)$ 阶连续导数, 求 $f^{(n)}(a)$. ($n=1$ 即 §2.1.3 的习题 994.)

解 用莱布尼茨公式计算 f 的 $n-1$ 阶导函数, 并整理成以下形式:

$$f^{(n-1)}(x)=n!(x-a)\varphi(x)+(x-a)^2P(x),$$

其中

$$P(x)=\mathrm{C}_{n-1}^{n-2}\cdot\frac{n!}{2!}\varphi'(x)+\cdots+(x-a)^{n-2}\varphi^{(n-1)}(x)$$

在点 a 的邻域内连续. 在上式中用 $x=a$ 代入可见 $f^{(n-1)}(a)=0$, 因此就有

$$\begin{aligned}f^{(n)}(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}[n!\varphi(x)+(x-a)P(x)]=n!\varphi(a). \quad \square\end{aligned}$$

习题 1224 证明, 函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ (n 为正整数) 在点 $x=0$ 处有直到 n 阶的导数, 而没有 $(n+1)$ 阶导数.

解 $n=1$ 时即 §2.1.3 的习题 991.

从 $(uv)'=u'v+uv'$ 出发, 又考虑到

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x},\quad \left(\cos\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x},$$

就可以看出, 对于 $f(x)$ 的阶数 $k<n$ 的所有导函数, 当 $x\neq 0$ 时都是形式为 $x^p\sin\dfrac{1}{x}$ 与 $x^q\cos\dfrac{1}{x}$ 的若干项之和, 其中 p,q 都是不小于 2 的正整数. 我们猜测 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处直到 n 阶的 k 阶导函数 ($k=1,2,\cdots,n$) 具有以下形式:

$$f^{(k)}(x)=x^{2n-2k}[P_k(x)\sin\frac{1}{x}+Q_k(x)\cos\frac{1}{x}], \qquad (*)$$

其中 $P_k(x)$ 和 $Q_k(x)$ 为多项式, 且在 $P_k(0)$ 和 $Q_k(0)$ 中恰有一个为 0, 而另一个等于 ±1. 这是因为对 $\sin\dfrac{1}{x}$ 或 $\cos\dfrac{1}{x}$ 的 k 次求导使得 x^{2n} 的次数恰好降低 $2k$, 而且这样的项是唯一的.

用数学归纳法来证明这个猜测对于 $k=1,2,\cdots,n$ 成立. 对于 $k=1$, 有

$$f'(x)=2nx^{2n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{2n-2}\cos\frac{1}{x}=x^{2n-2}(2nx\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}),$$

即有 $P_1(x)=2nx$, $Q_1(x)=-1$, 所猜测的 (*) 成立.

现设 $k=1,2,\cdots,m\ (m\leqslant n-1)$ 时 (*) 为真, 则对于 $k+1$ 就有

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left\{x^{2n-2k}[P_k(x)\sin\frac{1}{x}+Q_k(x)\cos\frac{1}{x}]\right\}'\\&=(2n-2k)x^{2n-2k-1}[P_k(x)\sin\frac{1}{x}+Q_k(x)\cos\frac{1}{x}]\\&\quad+x^{2n-2k}[(P_k'(x)+\frac{Q_k(x)}{x^2})\sin\frac{1}{x}+(Q_k'(x)-\frac{P_k(x)}{x^2})\cos\frac{1}{x}],\end{aligned}$$

于是有

$$P_{k+1}(x)=(2n-2k)xP_k(x)+x^2P_k'(x)+Q_k(x),$$

$$Q_{k+1}(x)=(2n-2k)xQ_k(x)+x^2Q_k'(x)-P_k(x),$$

可见有 $P_{k+1}(0)=Q_k(0)$ 和 $Q_{k+1}(0)=P_k(0)$. 因此猜测 (*) 对 $k=1,2,\cdots,n$ 成立.

由 (*) 的形式可见对于 $k<n$ 均有 $\lim\limits_{x\to0}f^{(k)}(x)=0$. 从 $k=1$ 开始, 用双侧导数极限定理 (参见 §2.6.4 的习题 1258.1) 递推, 就知道 $f(x)$ 在点 $x=0$ 存在直到 $(n-1)$ 阶的导数, 且均等于 0.

当 $k=n$ 时情况有所不同.

一方面从 $f^{(n-1)}(0)=0$ 和 (*) 在 $k=n-1$ 的形式出发, 写出差商

$$\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}=O(x)\ \ (x\to0),$$

即可见当 $x\to0$ 时得到 $f^{(n)}(0)=0$.

另一方面, 当 $k=n$ 时从 (*) 可见有

$$f^{(n)}(x)=P_n(x)\sin\frac{1}{x}+Q_n(x)\cos\frac{1}{x},$$

$P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 都是多项式, 且在 $P_n(0),Q_n(0)$ 中有一个为 0, 而另一个为 ±1. 这表明在 $x\neq0$ 时的 $f^{(n)}(x)$ 的表达式中, 存在唯一的一项具有以下形式: $\pm\sin\dfrac{1}{x}$ 或者 $\pm\cos\dfrac{1}{x}$. 于是当 $x\to0$ 时其他项均趋于 0, 而上述系数为 ±1 的项在 $+1$ 到 -1 之间作无限次振动. 因此 $x=0$ 是 $f^{(n)}(x)$ 的第二类不连续点. 从而 $f(x)$ 不可能在 $x=0$ 处存在 $(n+1)$ 阶导数. □

下面是在数学分析中的一个重要例题. 它说明一个非常值函数可以在某个点上的任何阶导数等于 0.

习题 1225 证明, 函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处无限次可微, 并作此函数的图像.

解　以下计算中反复用到的关键事实是极限 $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^\alpha}{\mathrm{e}^u}=0$, 其中 α 为任何实数 (这可以从 §1.2.2 的习题 60 导出).

先计算 $f'(0)$. 按定义计算并作代换 $y=1/x$, 就有

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{y^2}}=0.$$

在 $x\neq0$ 时可求出导函数表达式 $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, 于是可再按定义计算

$$f''(0)=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^4}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0.$$

然后再求 $x\neq0$ 时的二阶导函数表达式, 如此继续下去, 可以归纳地看出函数 f 的 n 阶导函数在 $x\neq0$ 时具有以下形式:

$$f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

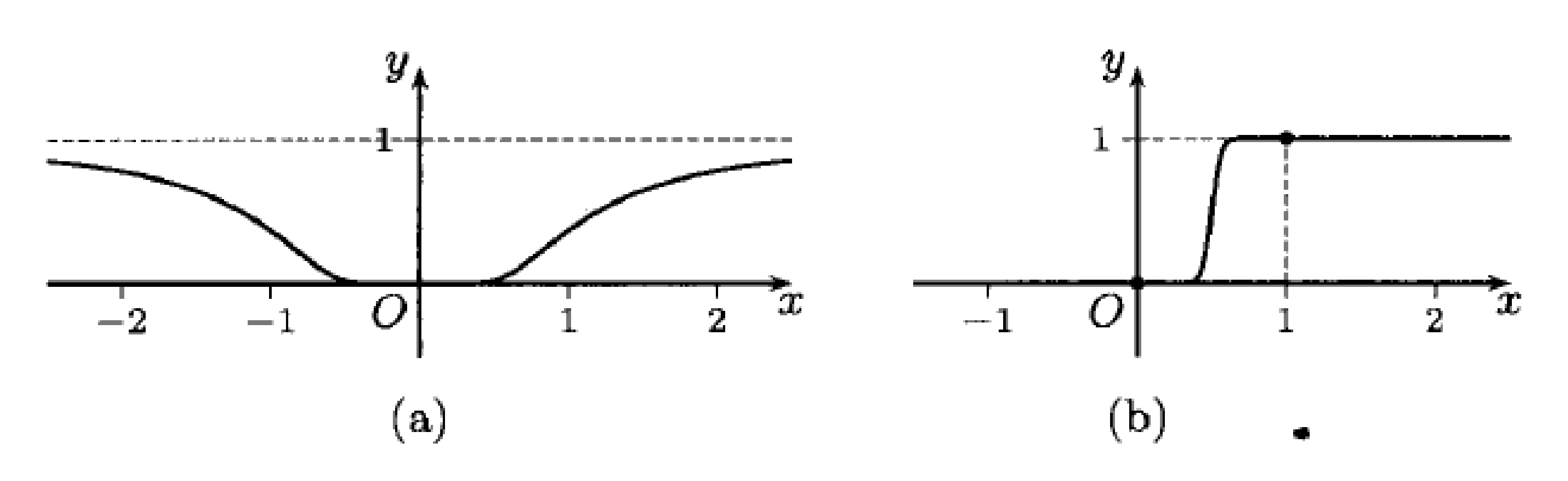
其中的 $P_n(y)$ 是 y 的多项式. 对于这个结论可以用数学归纳法作出证明, 从略. (这里可不必关心多项式 $P_n(y)$ 的次数与 n 的关系.)

在这个表达式的基础上, 可以用数学归纳法来证明所要的结论, 即对于每一个正整数 n 有 $f^{(n)}(0)=0$ 成立.

在 $n=1,2$ 时已经成立. 设在 $n=k$ 时已有 $f^{(k)}(0)=0$, 则对于 $n=k+1$ 可以利用 $n=k$ 和 $x\neq0$ 时 $f^{(k)}(x)$ 的上述表达式作以下计算:

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}P_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0.\end{aligned}$$

下面附图中的分图 (a) 是本题的 $f(x)$ 的图像, 分图 (b) 则用于解释 f 的一个应用, 将在注中作说明.



习题 1225 的附图

先看分图 (a), 其中的函数图像随着 x 接近原点而变得非常平坦, 例如可以计算出 $f(1/2)\approx0.02$, $f(1/3)\approx0.0001$ 等. 在 §1.5 的函数极限中我们将 x^n $(n\geqslant1)$ 当 $x\to0$ 时称为 n 阶无穷小量, x^n 的图像在原点附近随着 n 增加越来越平坦 (参见附录一的习题 274(a)(b)). 由于这里对所有 n 都成立

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=o(x^n)\ (x\to0),$$

也就是说当 $x \to 0$ 时 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ 是比所有 x^n 更为高阶的无穷小量, 这就是这个函数图像在 $x=0$ 附近极其平坦的意义. □

注 如前所说, 本题的 f 提供了在某一点的所有阶导数都等于 0 的非平凡例子, 这在数学分析的许多问题中有用. 这里还可指出, 这样的函数还可用于将两段曲线按照无限次可微的要求连接起来. (§2.5.3 的习题 1151 即是二次可微连接.)

如分图 (b) 所示, 其中将直线段 $\{(x,0) \mid x \leqslant 0\}$ 和直线段 $\{(x,1) \mid x \geqslant 1\}$ 用一条无限次可微的曲线连接起来, 而且还要求在连接处无限次可微. 这可以用本题的函数实现. 具体来说, 即先定义

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \end{cases}$$

然后再定义

$$h(x) = \frac{g(x)}{g(x)+g(1-x)}.$$

可以看出, 当 $x \leqslant 0$ 时 $h(x) \equiv 0$, 当 $x \geqslant 1$ 时 $h(x) \equiv 1$, 而当 x 从 0 递增到 1 时, $g(1-x)$ 从 $g(1) > 0$ 递减到 0, 因此 $h(x)$ 从 0 递增到 1.

下一个习题给出了复合函数 $f(\varphi(x))$ 的高阶导数的一般形式.

习题 1229 设 $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 为 n 阶可微函数. 证明

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \sum_{k=1}^{n} A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ $(k=1,\cdots,n)$ 与函数 $f(u)$ 无关.

解 用数学归纳法. 对于 $n=1$ 从链式法则即有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$, 可见成立[①]. 现在假设对于 n 时结论已经成立, 则对于 $n+1$ 就有

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^{n+1} y}{\mathrm{d}x^{n+1}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k(x) f^{(k)}(\varphi(x))\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [A_k'(x) f^{(k)}(\varphi(x)) + A_k(x) f^{(k+1)}(\varphi(x))\varphi'(x)], \end{aligned}$$

将最后一式写成为 $\sum\limits_{k=1}^{n+1} B_k(x) f^{(k)}(u)$ 的形式, 其中 $B_1(x) = A_1'(x)$, 对于 $2 \leqslant k \leqslant n$ 有 $B_k(x) = A_k'(x) + A_{k-1}(x)\varphi'(x)$, 最后 $B_{n+1}(x) = A_n(x)\varphi'(x)$, 它们都与 $f(u)$ 无关. 这样就完成了数学归纳法的证明. □

注 由证明可见, 题中的 $A_k(x)$ $(k=1,\cdots,n)$ 与 n 有关, 因此写为 $A_{n,k}(x)$ $(k=1,\cdots,n)$ 更为合理. 本题的要点在于证明这些系数完全由 $\varphi(x)$ 和 n 所决定. 在接下来的习题 1230 和 1231 中分别要计算 $f(x^2)$ 和 e^{-x^2} 的 n 阶导数, 后者是 $f(u) = \mathrm{e}^{-u}$ 和 $u = x^2$ 的复合, 因此这两个习题中的系数相同. 具体计算从略.

① 这里与习题中的公式一样, 在写为 $f'(u)\varphi'(x)$ 时其中的 u 应当理解为 $u = \varphi(x)$.

习题 1232.2 (a) 证明公式

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n \ln x) = n!\Big(\ln x + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big) \quad (x>0).$$

解 直接用莱布尼茨公式就得到

$$\begin{aligned}(x^n \ln x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (x^n)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)} \\ &= n!\ln x + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\Big(\frac{n!}{k!}x^k\Big)\Big(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\Big) \\ &= n!\ln x + n!\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k},\end{aligned}$$

最后对于上式右边的第二项利用关于二项式系数的一个恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \tag{2.4}$$

就得到所要的结果. □

注 关于二项式系数有许多恒等式, 例如可以参看 [5] 的 §2.8, (2.4) 是其中的第 19 个恒等式. 在二项式系数方面更新的资料可以参看 [12] 的 §1.2.6.

对于 (2.4) 除了可以用数学归纳法证明之外, 下面给出用积分工具的一个证明.

写出恒等式

$$\begin{aligned}1+(1-x)+(1-x)^2+\cdots+(1-x)^{n-1} &= \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}[1-(1-x)^n] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1},\end{aligned}$$

然后在等式两边关于 x 在 $[0,1]$ 上积分即得所求的

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k(-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

习题 1232.2 (b) 证明公式

$$\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x],$$

其中

$$\begin{aligned}C_n(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}, \\ S_n(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.\end{aligned}$$

解 直接用莱布尼茨公式写出

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^{(2n)} &= \sum_{k=0}^{2n}\mathrm{C}_{2n}^k(\sin x)^{(k)}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{(2n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k}(\sin x)^{(2k)}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{(2n-2k)} + \sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k-1}(\sin x)^{(2k-1)}\Big(\frac{1}{x}\Big)^{(2n-2k+1)}.\end{aligned}$$

利用 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的逐次导数出现周期为 4 的循环现象, 又有 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$, 分别处理以上两个和式, 就可以得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k}(\sin x)^{(2k)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(2n-2k)}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\cdot(-1)^k\sin x\cdot\frac{(2n-2k)!}{x^{2n-2k+1}}\cdot(-1)^{2n-2k}\\&=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\sin x\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_{2n}^{2k-1}(\sin x)^{(2k-1)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(2n-2k+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n)!}{(2k-1)!(2n-2k+1)!}\cdot(-1)^{k-1}\cos x\cdot\frac{(2n-2k+1)!}{x^{2n-2k+2}}\cdot(-1)^{2n-2k+1}\\&=\frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\cos x\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.\quad\square\end{aligned}$$

习题 1233 设 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=D$ 表示微分算子①, 且 $f(D)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x)D^k$ 为微分符号多项式, 其中 $P_k(x)$ $(k=0,1,\cdots,n)$ 为 x 的某些连续函数. 证明,

$$f(D)\{\mathrm{e}^{\lambda x}u(x)\}=\mathrm{e}^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

解 由于 $f(D)$ 是 D^k $(k=0,1,\cdots,n)$ 的线性组合, 因此只要对每一个 $k=0,1,\cdots,n$ 证明

$$D^k\{\mathrm{e}^{\lambda x}u(x)\}=\mathrm{e}^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).$$

而这只要直接用莱布尼茨公式就可得到证明:

$$\begin{aligned}D^k\{\mathrm{e}^{\lambda x}u(x)\}&=\lambda^k\mathrm{e}^{\lambda x}u(x)+\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}u'(x)+\cdots+\mathrm{C}_k^k\mathrm{e}^{\lambda x}u^{(k)}(x)\\&=\mathrm{e}^{\lambda x}(D+\lambda)^k u(x).\quad\square\end{aligned}$$

习题 1234 证明, 如果在方程 $\sum_{k=0}^{n}a_k x^k y_x^{(k)}=0$ 中, 设 $x=\mathrm{e}^t$, 其中 t 为自变量, 那么这个方程有形式:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y=0,$$

其中 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

① 在数学中经常将从函数映到函数的映射称为算子, 微分算子 D 就是从 $f(x)$ 到 $f'(x)$ 的映射. $D^k f(x)$ 就是 $f^{(k)}(x)$ 的一种记法.

解 只要对每一个 $k=1,2,\cdots,n$ 证明

$$D(D-1)\cdots(D-k+1)y=x^k y_x^{(k)}.$$

用数学归纳法. 当 $k=1$ 时有

$$Dy=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(\mathrm{e}^t)=\mathrm{e}^t y'_x(\mathrm{e}^t)=xy'_x.$$

现设 k 时结论已经成立, 则当 $k+1$ 时有

$$\begin{aligned}D(D-1)\cdots(D-k)y&=D(D-1)\cdots(D-k+1)\{(D-k)y\}\\&=D(D-1)\cdots(D-k+1)\{xy'_x-ky\}\\&=D(D-1)\cdots(D-k+1)\{xy'_x\}-kD(D-1)\cdots(D-k+1)y\\&=x^k(xy'_x)^{(k)}-kx^k y_x^{(k)}\\&=x^k(xy_x^{(k+1)}+ky_x^{(k)})-kx^k y_x^{(k)}=x^{k+1}y_x^{(k+1)}.\quad\square\end{aligned}$$

注 本题方程的和式中当 $k=0$ 时应当理解为即是 a_0y. 在上式推导中的最后一式是从前一式用莱布尼茨公式得到的.

§2.6 罗尔定理. 拉格朗日定理和柯西定理 (习题 1235–1267)

内容简介 这是微分学中的三个基本定理. 它们都可以称为中值定理, 即将函数在有限区间上的增量与区间内某个点 (即所谓中值) 处的导数相联系, 从而突破了导数概念本身的局部性, 为微分学的应用提供了有力的工具.

为方便起见, 将习题分几个小节来叙述.

2.6.1 罗尔定理 (习题 1235–1243)

罗尔定理的几何意义是很清楚的, 即在函数 $y = f(x)$ 的图像中, 在连接高度 (指 y 值) 相同的两点的光滑曲线段中, 一定会在某点处有水平切线.

也可以从运动学上来解释罗尔定理, 即当质点从某个起点作直线运动时, 如果在此后会回到出发点的话, 则在其间一定有某个时刻的瞬时速度为 0.

下面的第一个习题表面上只是罗尔定理的两次平凡应用, 然而可以引申出许多一般性的结论和方法. (参见其附图.)

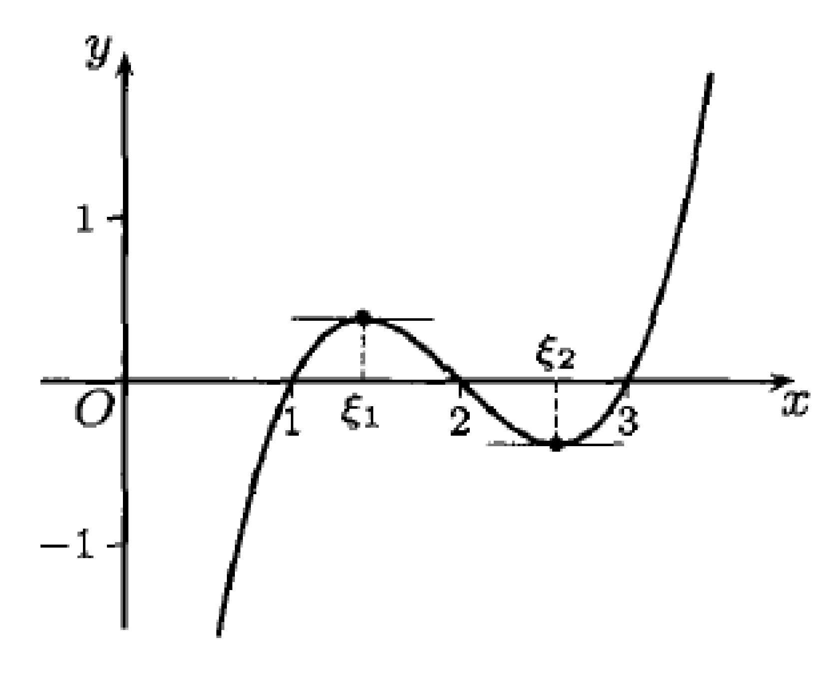
习题 1235 用函数

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

来验证罗尔定理的正确性.

解 利用 $f(1) = f(2) = f(3) = 0$ 和 f 处处可导, 就可以在闭区间 $[1,2]$ 和 $[2,3]$ 上分别两次应用罗尔定理, 从而知道一定存在 $\xi_1 \in (1,2)$ 和 $\xi_2 \in (2,3)$, 使得满足

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0.$$



习题 1235 的附图

为验证这个结论, 只要写出 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, 求导得到 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$. 从 $f'(1) = 2$, $f'(2) = -1$, $f'(3) = 2$, 即可从连续函数的零点存在定理知道前述 ξ_1 和 ξ_2 是存在的. □

注 我们来讨论一下本题有哪些方面可以推广?

从附图可见本题有明显的几何意义, 而且很容易推广到有若干个实根的可微函数上, 知道在任何两个相异实根之间一定有导函数的零点.

由于本题的函数处处二阶可微, 因此又可以对于区间 $[\xi_1, \xi_2]$ 上的导函数 f' 再用罗尔定理, 就知道存在点 $\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (1,3)$, 使得成立 $f''(\eta) = 0$. 在 §2.8 学习了凹凸性知识后还会知道点 $(\eta, f(\eta))$ 是 f 的图像的一个拐点.

对于三次多项式的上述结论自然可以推广到一般的多项式上去. 下面的习题 1240 就是如此. 该题中设一个 n 次多项式的所有根都是实数, 要求证明它的逐次导函数 (它们当然都是多项式) 的根也都是实数. 本题只是该题中 $n=3$ 且无重根情况的一个特例.

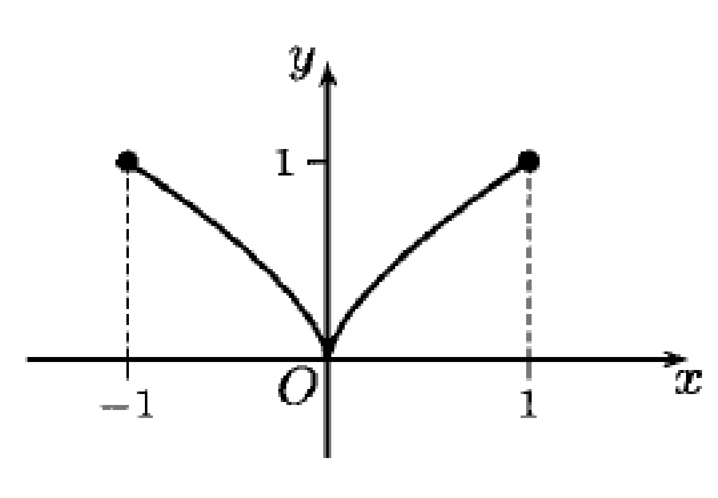
此外, 在一定的条件下对 f 多次使用罗尔定理, 以及对 f' 再使用罗尔定理等等, 这些方法都很有用, 在下面许多习题中将会反复使用.

下一个习题也很容易, 但同样可以说明不少重要问题.

习题 1236 当 $x_1 = -1$ 和 $x_2 = 1$ 时, 函数

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

的值为 0, 但是当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $f'(x) \neq 0$. 试解释这与罗尔定理的表面上的矛盾.



习题 1236 的附图

解 这在附图中是非常清楚的. 从导函数表达式

$$f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ x \neq 0,$$

和 $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$, 可知 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内无零点, 罗尔定理的结论不成立. 原因也是清楚的, 对照罗尔定理的条件, 除了 $f(-1) = f(1)$ 和 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续之外, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 不可导, 违反了 f 必须在 $(-1,1)$ 内处处具有有限导数的条件. □

注 此题说明罗尔定理中的可导条件的重要性, 哪怕只在一个点上违反了条件, 定理的结论就可能不成立. 实际上对罗尔定理还可以举出针对其他条件的例子, 说明只要有某一个条件不满足时, 定理的结论就不一定成立.

此外, 初学者要知道这也是数学中普遍遵守的惯例, 即去除一切多余的条件. 换言之, 在数学中的一个定理的每一个条件都是不可或缺的, 只要有一个条件不成立, 就一定能够举出使得定理结论不成立的例子. 这就称为反例. 一般来说, 在习题中也是如此. 如果你在解答一个习题中有某个条件没有用到, 则在大多数情况下你的解答可能是错误的. 当然也不排除或者这道题本身就有错, 或者出题的人考虑不周也是可能的.

以下是罗尔定理的一些推广.

习题 1237 设函数 $f(x)$ 在有限区间或无限区间 (a,b) 内的每一点处有有限导数 $f'(x)$, 且

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to b-0} f(x),$$

证明 $f'(c) = 0$, 其中 c 为区间 (a,b) 内的某个点.

解 从可微条件可知 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

若 a,b 都是有限实数, 则只要将 $f(x)$ 按照 $f(a+0) = f(b-0) = A$ 的条件, 补充定义 $f(a) = f(b) = A$ (即连续延拓), 就可以在 $[a,b]$ 上用罗尔定理得到所要的结论.

余下还有有三种可能的区间, 即设 a,b 中至少有一个是非有限数时得到的 $(-\infty,b)$, $(a,+\infty)$ 和 $(-\infty,+\infty)$. 它们的证明大同小异, 因此下面只对于 $(-\infty,b)$ 给出证明.

若 f 在该区间上为常值函数, 则任意取区间内的点 c 都满足 $f'(c) = 0$ 的要求. 否则, 记 $A = f(-\infty) = f(b-0)$, 则 f 必定能够取到异于 A 的值. 不妨设存在 $d \in (-\infty,b)$ 使得 $f(d) > A$. (对于 $f(d) < A$ 情况的证明是类似的.)

任取 $B \in (A, f(d))$, 我们将证明存在 $c_1 \in (-\infty, d)$ 和 $c_2 \in (d, b)$, 使得成立

$$f(c_1) = f(c_2) = B.$$

这在几何上是很直观的, 即是说水平直线 $y = B$ 一定和 $y = f(x)$ 的几何图像有交点, 而且可取到其横坐标分别在点 d 两侧的两个交点.

为证明 c_1 的存在性, 取 $\varepsilon = B - A$, 则从 $f(-\infty) = A$ 可知存在 $M_1 < d$, 使得当 $x \leqslant M_1$ 时成立

$$|f(x) - A| < B - A \Longleftrightarrow A - B < f(x) - A < B - A,$$

于是有 $f(M_1) < B$. 在有界闭区间 $[M_1, d]$ 上用连续函数的介值定理, 知道存在 $c_1 \in (M_1, d)$, 使得成立 $f(c_1) = B$.

为证明 c_2 的存在性, 对于点 b 补充定义 $f(b) = A$, 则 $f(x)$ 在点 b 处左连续. 在 $[d, b]$ 上用连续函数的介值定理, 可见存在 $c_2 \in (d, b)$, 使得 $f(c_2) = B$.

最后, 在区间 $[c_1, c_2]$ 上用罗尔定理就得到本题所要求的 $c \in (c_1, c_2) \subset (-\infty, b)$, 使得 $f'(c) = 0$. □

习题 1238 设 (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_0, x_n]$ 上有定义, 且有连续的 $(n-1)$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) $f(x)$ 在开区间 (x_0, x_n) 内有 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$; (3) 满足等式

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n),$$

证明, 在开区间 (x_0, x_n) 内至少存在一点 ξ, 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$.

分析 若 $n = 1$, 则就是罗尔定理. 若 $n = 2$, 则与习题 1235 类似. 如该题后的注中所示, 从 f 的三个零点即可推出二阶导函数在某一点处为 0. 用类似的方法即可证明本题. 请读者写出详细的证明过程. □

下一题是罗尔定理的另一种推广.

习题 1239 设 (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义, 且有连续的 $(p+q)$ 阶导数 $f^{(p+q)}(x)$; (2) $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有 $(p+q+1)$ 阶导数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3) 满足等式

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0, \quad f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0,$$

证明, 在这种情况下有

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为开区间 (a, b) 内的某一点.

解 分两步来做, 先讨论 $p = q$ 的情况, 然后讨论 $p \neq q$ 的情况.

(1) 设 $p = q$, 对 q 用数学归纳法.

经过试探, 发现为了顺利完成数学归纳法的第二步, 需要提出比结论更强的命题, 即在 $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(q)}(a) = 0$ 和 $f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$ 的条件下, 存在 $q+1$ 个点 $c_i\ (i = 1, 2, \cdots, q+1)$, $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_{q+1} < b$, 使得 $(q+1)$ 阶的导函数 $f^{(q+1)}(x)$ 在这 $q+1$ 个点上等于 0.

如果这个命题成立, 则只要对 $f^{(q+1)}(x)$ 用习题 1238 的结论, 就知道存在 c, 使得

$$[f^{(q+1)}(x)]^{(q)}\Big|_{x=c} = f^{(2q+1)}(c) = 0.$$

现在来证明这个命题.

若 $p = q = 0$, 则 $p + q + 1 = 1$. 从条件 $f(a) = f(b) = 0$ 推出存在某个点 c, 使得 $f'(c) = 0$, 这就是罗尔定理. 因此命题成立.

现在设 $p = q = k$ 时命题已经成立, 则对于 $p = q = k + 1$ 可推导如下.

首先从归纳假设, 存在 $a < c_1 < \cdots < c_{k+1} < b$ 使得 $f^{(k+1)}(c_i) = 0$ $(i = 1, \cdots, k+1)$. 然后再利用条件 $f^{(k+1)}(a) = f^{(k+1)}(b) = 0$, 在 $k + 2$ 个区间

$$[a, c_1], [c_1, c_2], \cdots, [c_{k+1}, b]$$

上分别用罗尔定理, 就可以得到 $k+2$ 个点, 使得 $f^{(k+2)}(x)$ 在这 $k+2$ 个点上为 0. 这样就完成了数学归纳法的证明. 如前所说, 这个命题加上习题 1238 就可以完成 $p = q$ 情况的证明.

(2) 对于 p, q 不相等的情况, 不妨只讨论 $p > q$, 并记 $p - q = n$.

利用在 (1) 中已经证明的命题, 在 (a, b) 内存在 $q+1$ 个点, 使得 $f^{(q+1)}(x)$ 在这 $q+1$ 个点上等于 0.

利用条件 $f^{(q+1)}(a) = 0$, 将 a 作为最左边的点加入到上述 $q + 1$ 个点中, 就可以对这 $q + 2$ 个点形成的 $q + 1$ 个区间分别用罗尔定理, 推出在 (a, b) 内存在 $q + 1$ 个点, 使得 $f^{(q+2)}(x)$ 在这 $q + 1$ 个点上等于 0.

若 $q + 1 < p$, 则又可利用 $f^{(q+2)}(a) = 0$ 推出在 (a, b) 内存在 $q + 1$ 个点, 使得 $f^{(q+3)}(x)$ 在这 $q + 1$ 个点上等于 0.

如此继续进行下去, 就推出在 (a, b) 内存在 $q+1$ 个点, 使得 $f^{(p+1)}(x)$ 在这 $q+1$ 个点上等于 0.

最后对于导函数 $f^{(p+1)}(x)$ 利用习题 1238 的结论, 就知道存在 c, 使得

$$[f^{(p+1)}(x)]^{(q)}\Big|_{x=c} = f^{(p+q+1)}(c) = 0. \quad \square$$

注 这里如果不利用习题 1238 的结论而直接使用数学归纳法就很困难. 而为了能够利用它又需要将数学归纳法要证明的命题适当加强, 这在数学中是常见的.

习题 1240 证明, 如果实系数 a_k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 的多项式

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \ \ (a_0 \neq 0)$$

的所有根都是实数, 那么它的逐次导数 $P_n'(x), P_n''(x), \cdots, P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实数根.

解 设 $P_n(x) = 0$ 的相异实根为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, 其中 x_i 为 n_i 重根, $i = 1, 2, \cdots, k$, 则 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, 且多项式可在实数域内因式分解为

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \cdots (x - x_k)^{n_k},$$

于是有

$$P_n'(x) = a_0 \sum_{i=1}^{k} n_i(x - x_i)^{n_i - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (x - x_j)^{n_j},$$

于是当 $n_i > 1$ 时 x_i 是 $P_n'(x)$ 的 $n_i - 1$ 重根, $i = 1, \cdots, k$.

除此之外, 若设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, 则在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 1, \cdots, k-1)$ 上用罗尔定理, 就得到导函数 $P_n'(x)$ 在这些根之间的 $k-1$ 个根. 于是导函数的实根一共有

$$\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + (k-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k + (k-1) = n - 1,$$

由于 $P_n'(x)$ 是 $n-1$ 次多项式, 因此它的根全为实数.

依此类推可知多项式 $P_n(x)$ 的直到 $(n-1)$ 阶的所有导函数都只有实根. □

习题 1241–1243 都是罗尔定理的应用, 即证明勒让德多项式、切比雪夫–拉盖尔多项式和切比雪夫–埃尔米特多项式的所有根都是实根. (在 §2.5 的习题 1227, 1228 和 1231 中已经分别指出它们满足相应的二阶常微分方程.) 下面解答其中的第一题.

习题 1241 证明, 勒让德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x^2-1)^n]$$

的所有根都是实数, 且包含于开区间 $(-1, 1)$ 内.

解 1 由于本题只讨论该多项式的根, 因此前面的系数不必管它.

从多项式 $(x^2-1)^n$ 为 $2n$ 次, 且其根 ± 1 分别为 n 重根, 因此从习题 1240 就推出它的 n 阶导函数的所有根也都是实数. 又因为 ± 1 已经不再是 $P_n(x)$ 的根, 因此所有实根都在区间 $(-1, 1)$ 内. □

解 2 记 $p_n(x) = (x^2-1)^n$, 则在 $[-1, 1]$ 上根据罗尔定理知道 $p_n'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有根. 由于它是 $2n-1$ 次多项式, 而 ± 1 分别是它的 $n-1$ 重根, 因此从 $2(n-1)+1 = 2n-1$ 知道在 $(-1, 1)$ 内只有一个单根. (当然可以直接求导得到 $p_n'(x) = n(x^2-1)^{n-1} \cdot 2x$, 知道这个单根就是 $x = 0$.

同理推出 $p_n''(x)$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 内各有一个单根,

用数学归纳法可以如下证明 $p_n^{(k)}(x)$ $(k = 1, \cdots, n)$ 在 $(-1, 1)$ 内恰有 k 个单根.

从上已知这对于 $n = 1, 2$ 成立. 若对于 $1 \leqslant k < n$ 已知 $p_n^{(k)}(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有 k 个单根, 记为 $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, 则用罗尔定理知道在区间

$$(-1, x_1), (x_1, x_2), \cdots, (x_k, 1)$$

内 $p_n^{(k+1)}(x)$ 分别有 $k+1$ 个根. 由于 ± 1 分别是 $2n-k-1$ 次多项式 $p_n^{(k+1)}(x)$ 的 $n-k-1$ 重根, 而

$$2(n-k-1) + k + 1 = 2n - k - 1,$$

因此在 $(-1, 1)$ 内的上述 $k+1$ 个根都是单根. 数学归纳法证明完毕.

于是 $k = n$ 时的 n 次多项式 $P_n^{(n)}(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有 n 个实数根, 且都是单根. □

注 第二个解法不需要习题 1240 的结论, 而且证明了所有实根都是单根.

2.6.2 拉格朗日中值定理 (习题 1244–1251)

拉格朗日中值定理将函数的自变量的增量和因变量的增量与导数相联系, 是微分学中最为核心的内容, 因此也称为微分 (学) 中值定理.

作为罗尔定理的推广, 拉格朗日定理同样有明显的几何意义, 即在满足条件时的曲线 $y=f(x)$ 上任意两点的连接线 (即曲线上的一条弦) 必定和曲线段在这两点之间的某一点的切线平行. 从运动学上看, 这就是质点作直线运动时, 它在一段时间上的平均速度必定与该段时间内某个时刻的瞬时速度相等.

下面的第一题虽然简单, 但也很有意思.

习题 1244 在曲线 $y=x^3$ 上求一点, 使得过这一点的切线与连接点 $A(-1,-1)$ 和 $B(2,8)$ 的弦平行.

解 如附图所示, 先计算出连接点 A,B 的弦的斜率为

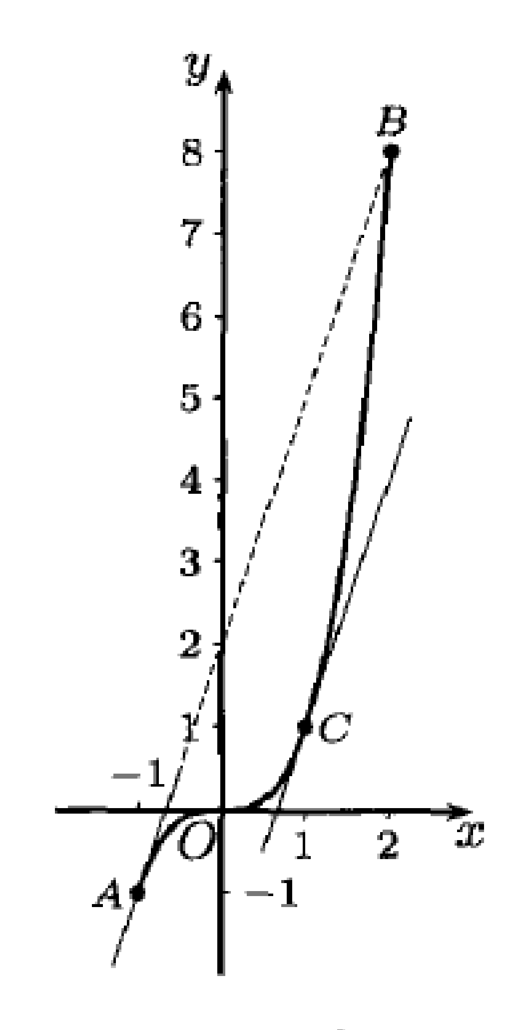
$$k=\frac{y(2)-y(-1)}{2-(-1)}=\frac{8-(-1)}{3}=3,$$

然后求出 $y'(x)=3x^2$ 并求解方程

$$3x^2=3,$$

这样就得到 $x=\pm 1$, 对应的曲线上的点是 $A(-1,-1)$ 和 $C(1,1)$. □

注 本题表明与曲线的弦平行的切线可以不止一条, 同时至少有一条切线的切点满足拉格朗日中值定理的中值点 $\xi\in(a,b)$ 的要求, 在这里就是点 C, 它的横坐标 $1\in(-1,2)$.



习题 1244 的附图

中值定理本身对于“中值”除了其存在性之外, 并未给出更多的信息. 在

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

中有 $a<\xi<b$, 而在另一种写法的

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$$

中有 $0<\theta<1$. 以下的若干习题表明, 在很多情况下中值 ξ 或 θ 是可以计算或研究的.

习题 1246.1(a) 求函数 $\theta=\theta(x,\Delta x)$, 使得

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\, f'(x+\theta\Delta x)\ \ (0<\theta<1),$$

其中 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$.

解 直接计算函数的增量

$$\begin{aligned}\big(a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c\big)-\big(ax^2+bx+c\big)&=2ax\Delta x+a\Delta x^2+b\Delta x\\&=\Delta x(2ax+b+a\Delta x),\end{aligned}$$

与 $f'(x)=2ax+b$ 比较, 即可见 $\theta=\dfrac{1}{2}$. □

注 本题与下面的习题 1246.3 可以说是互为逆命题.

在新版的《习题集》中增加了如下的两个证明题, 即在中值满足一定条件的情况下可以确定函数只能是线性函数或二次函数.

习题 1246.2 设 $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$, 且对任意的 x 和 h 都有恒等式

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'(x),$$

证明 $f(x) = ax + b$, 其中 a 和 b 是常数.

解 固定某一个 x_0, 并取 $h = x - x_0$, 则就得到

$$f(x_0 + (x - x_0)) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0),$$

整理后就可看出 f 为线性函数:

$$f(x) = f'(x_0)x + [f(x_0) - x_0 f'(x_0)]. \quad \square$$

习题 1246.3 设 $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$, 且对任意的 x 和 h 都有恒等式

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\Big(x + \frac{h}{2}\Big),$$

证明 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 其中 a, b 和 c 是常数.

解 利用 f 为二阶可微, 将题中的恒等式对 h 求导, 得到

$$f'(x+h) = f'\Big(x + \frac{h}{2}\Big) + \frac{h}{2}f''\Big(x + \frac{h}{2}\Big),$$

然后将 $x + \dfrac{h}{2}$ 重记为 x, 将 $\dfrac{h}{2}$ 重记为 h, 就得到

$$f'(x+h) - f'(x) = hf''(x).$$

利用上一题的结果, 可见存在常数 a, b 使得 $f'(x) = ax + b$, 为了由此证明 f 是二次三项式, 可以定义辅助函数

$$F(x) = \frac{1}{2}ax^2 + bx - f(x),$$

然后就有 $F'(x) = 0$, 可见 F 为常值函数, 因此 f 为二次三项式. $\square$

习题 1249 设 $f(x) - f(0) = xf'(\xi(x))$, 其中 $0 < \xi(x) < x$. 证明, 如果

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\ln x), & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

那么函数 $\xi = \xi(x)$ 在任意小的区间 $(0, \varepsilon)$ 内是不连续的, 其中 $\varepsilon > 0$.

解 1 先注意到有 $f'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \ln x)$.

用反证法. 设对于某个 $\varepsilon > 0$ 在区间 $(0, \varepsilon)$ 上存在连续函数 $\xi(x)$, 满足条件 $0 < \xi(x) < x$, 同时成立

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin(\ln x) = f'(\xi(x)) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \ln\xi(x)). \tag{2.5}$$

由于 $\ln x \to -\infty$ $(x \to +0)$, 可见连续函数 $\ln\xi(x)$ 在 $(0, \varepsilon)$ 上的值域包含了区间 $(-\infty, \ln\xi(\varepsilon))$, 因此一定存在无穷多个负整数 k, 使得 $\ln\xi(x)$ 取到 $2k\pi + \frac{\pi}{4}$. 但这时 (2.5) 的右边为 $\sqrt{2}$, 而左边的 $\sin(\ln x)$ 小于 1, 引出矛盾. $\square$

注 解 1 似乎很简单, 但很不清楚它是如何来的, 说明了什么. 在看懂之后也不一定明白本题究竟是什么意思. 为此先作一些分析, 然后给出另一个解法. 它也许比较长, 但可能会告诉我们更多的内容.

首先观察题意. 从 $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$ 和 $0<\xi(x)<x$ 可见, $\xi(x)$ 是在区间 $[0,x]$ 上对 f 用拉格朗日中值定理得到的中值 (之一).

从中值定理知道, 在 $[0,x]$ 内的中值 ξ 与区间端点有关, 但对每一个 $x>0$ 不一定只有一个 ξ. 从下面的解法会知道, 在本题中对每一个 $x>0$ 存在无穷多个 ξ.

由此可见, 问题在于是否存在一个连续函数 $\xi(x)$, 使得它满足中值定理给出的等式 $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$. 换言之, 函数 $\xi(x)$ 是从与 x 对应的无穷多个中值中挑选出来的单值函数, 且要求它在 $x=0$ 右侧的一个任意小区间上连续. 可能吗?

解 2 当 x 从 0 单调递增趋于 $+\infty$ 时, $\ln x$ 从 $-\infty$ 单调递增趋于 $+\infty$. 由此可见题中的函数 $f(x)$ 的行为与函数

$$g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的图像是类似的 (见 §1.7.2 的习题 680 的附图), 即在 $y=x$ 和 $y=-x$ 之间作无限次摆动, 只不过 $g(x)$ 在 $x>\frac{\pi}{2}$ 之后就不再摆动而趋于水平渐近线 $y=1$, 而本题的 $f(x)$ 却是在 $(0,+\infty)$ 上始终在 $y=\pm x$ 之间摆动.

这从 $f(x)$ 的表达式也直接可以看出, 即在区间 $[0,x]$ 上连接点 $(0,0)$ 和 $(x,f(x))$ 的弦的斜率为

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\sin(\ln x),$$

因此无论是 $x\to 0$ 还是 $x\to+\infty$ 曲线总是在 -1 到 $+1$ 之间作无限次摆动. 这决定了 $\xi(x)$ 必须满足

$$|f'(\xi(x))|\leqslant 1.$$

另一方面, 在 $x>0$ 时直接计算得到 f 的导函数为

$$f'(x)=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\ln x),$$

因此其导数值在 $-\sqrt{2}$ 到 $\sqrt{2}$ 之间摆动. 然而满足拉格朗日中值定理的 $\xi(x)$ 则必须在导函数的绝对值不大于 1 的范围中来挑选. 下面会看到, 集合

$$S=\{x>0\mid |f'(x)|\leqslant 1\}$$

是无穷多个彼此分隔开的闭区间的并集. 这就决定了在 $x=0$ 的右侧无论多么小的邻域上要挑选出连续的 $\xi(x)$ 是不可能的.

下面用 f' 的表达式计算集合 S. 为了使得 $|\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\ln x)|\leqslant 1$ 成立, 先从

$$(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}+\ln x\leqslant(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$$

解出

$$a_k=\exp(2k\pi+\frac{\pi}{2})\leqslant x\leqslant\exp[(2k+1)\pi]=b_k, \tag{2.6}$$

再从

$$2k\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{\pi}{4} + \ln x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

解出

$$c_k = \exp[2k\pi - \frac{\pi}{2}] \leqslant x \leqslant \exp(2k\pi) = d_k, \tag{2.7}$$

其中 k 取所有的整数. 可直接看出 $f(a_k) = a_k$, $f'(a_k) = 1$, $f(c_k) = -c_k$, $f'(c_k) = -1$.

于是得到

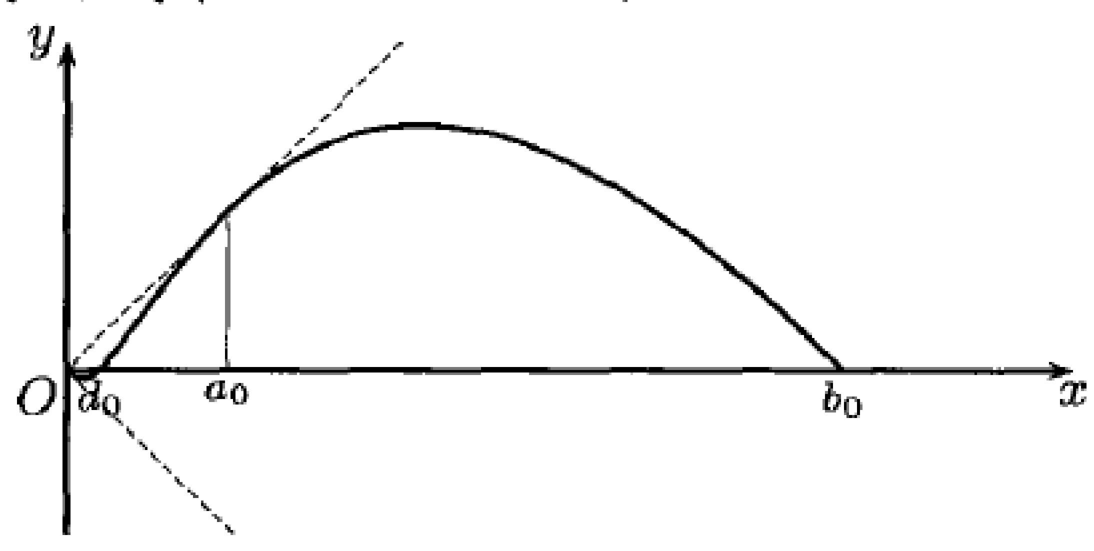
$$S = \{x > 0 \mid |f'(x)| \leqslant 1\} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \big([c_k, d_k] \cup [a_k, b_k]\big).$$

由于对任何整数 k 都有

$$\frac{b_k}{a_k} = \frac{a_k}{d_k} = \frac{d_k}{c_k} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.810\,5,$$

因此不妨对于 $k = 0$ 来观察区间 $[c_0, d_0]$ 和 $[a_0, b_0]$ (参见下面的附图).

取端点的近似值后, 这两个区间近似为 $[0.2079, 1]$ 和 $[4.8105, 23.1407]$, 因此只能看清楚点 d_0 和区间 $[a_0, b_0]$. 在这个区间上对应的曲线段的任何切线的斜率都在 -1 到 1 之间. 而在两个区间之间的 (d_0, a_0) 对应的曲线段的任何切线的斜率的绝对值都大于 1.



习题 1249 的附图

小结 由于中值 ξ 处的导数绝对值不能超过 1, 而集合 $S = \{x > 0 \mid |f'(x)| \leqslant 1\}$ 是无穷多个彼此分隔开的闭区间的并, 在 $x = 0$ 的右侧任意邻近都有无穷多个这样的闭区间, 因此不可能在与 $x > 0$ 对应的无穷多个中值中挑选出关于 x 的连续函数 $\xi(x)$. □

习题 1250 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$, 对 (a, b) 内的所有的点 ξ, 是否可以找到这个区间内的另外两个点 x_1 和 x_2, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \ \ (x_1 < \xi < x_2)?$$

考察例子: $f(x) = x^3$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, 其中 $\xi = 0$.

分析 有了上述例子后, 答案当然就是不一定. 这里的问题可以从几何上来理解. 即拉格朗日定理之逆是否成立: 曲线上的每一条切线是否平行于连接曲线上两个点的弦? 这里要求曲线上的切点在弦的两个端点之间. 读者还可以参考后面 §2.8.2 的习题 1316, 以便对于上述问题获得更多的了解. □

下一题有 4 个小题, 它们表明拉格朗日中值定理是证明某些不等式的有力工具. 只看其中的第一小题.

习题 1251 (a) 证明不等式: $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$.

解 1 若 $x = y$ 则已经成立. 对于 $x \neq y$ 可不妨设 $x < y$. 在区间 $[x, y]$ 上对正弦函数用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x, y)$, 使得成立

$$\sin y - \sin x = \cos\xi(y - x),$$

于是取绝对值后就得到

$$|\sin y - \sin x| = |\cos\xi|\cdot|y-x| \leqslant |y-x|. \quad \square$$

解 2 作为对比, 可以用初等方法给出证明. 利用三角函数的和差化积公式就有

$$\begin{aligned}|\sin x - \sin y| &= |2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}| \\ &\leqslant 2|\sin\frac{x-y}{2}| \leqslant |x-y|.\end{aligned}$$

这里最后一步利用了 $|\sin x| \leqslant |x|$. (参见 §1.5.5 的命题 1.8(1) 的证明, 它可以用几何方法或其他方法得到.) □

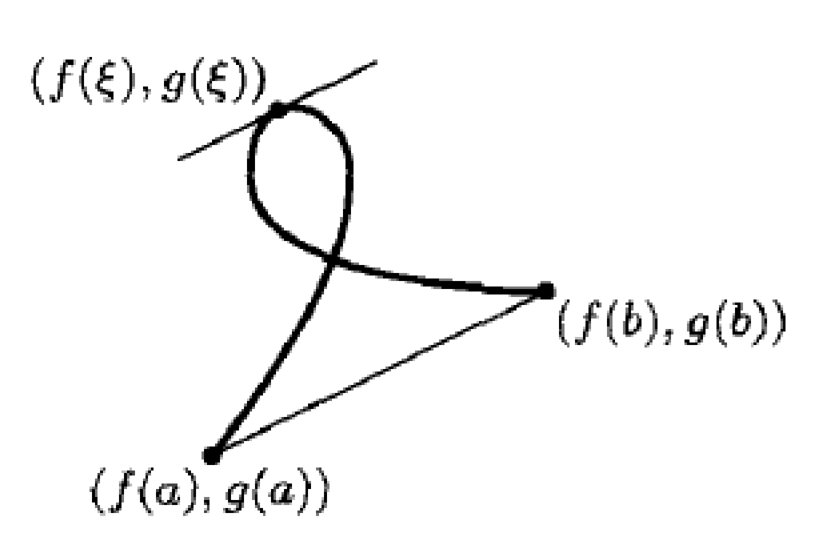
2.6.3 柯西中值定理 (习题 1252–1253)

柯西中值定理是拉格朗日中值定理在两个函数情况的推广. 在需要同时考虑两个函数的增量时, 例如洛必达法则和泰勒公式余项的研究中, 这个定理起重要作用.

如果将自变量改写为参数 t, 将两个函数写为 $x = f(t)$ 和 $y = g(t)$, 则柯西中值定理就可以有直观的几何解释. 写出这时的等式

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(\xi)}{f'(\xi)},$$

其左边就是附图中连接曲线的两个端点的直线段的斜率, 而右边就是曲线在参数 $t=\xi$ 所对应的点 $(f(\xi), g(\xi))$ 处的切线的斜率.



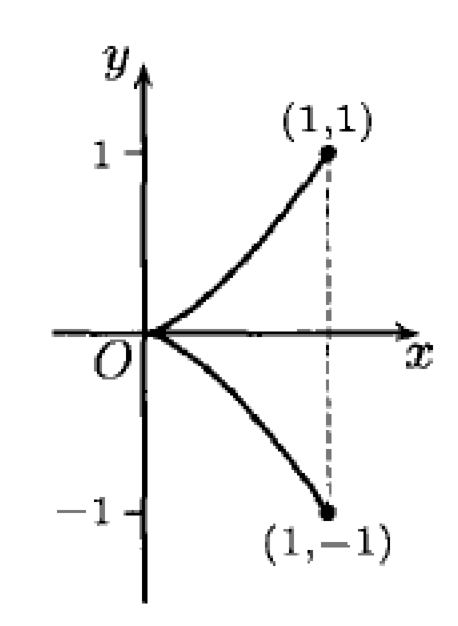
柯西中值定理的几何意义

也可以从运动学来理解柯西中值定理. 设想有两个质点在同样的时间段内分别作直线运动, 则柯西定理表明, 一定存在一个时刻, 使得它们的平均速度之比等于该时刻的瞬时速度之比.

习题 1252 试解释, 柯西公式对函数

$$f(x) = x^2 \text{ 和 } g(x) = x^3$$

在区间 $[-1,1]$ 上为什么不成立?



习题 1252 的附图

解 这时 $a=-1, b=1$, 柯西中值定理的左边为

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} = \frac{0}{2} = 0,$$

而两个函数的导函数之比为

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x}{3x^2},$$

它在 $x=0$ 处没有定义, 而在 $x \neq 0$ 时不会等于 0. 因此柯西中值定理不成立.

其原因是容易理解的. 正是由于在 $x=0$ 处两个函数的导数同时等于 0, 因此违反了在 $-1<x<1$ 时的条件:

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0.$$

从几何上来看这是明显的. 如附图所示, 改用 t 为参数, 令 $x = t^2$, $y = t^3$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, 就得到图中的曲线. 当 $t = 0$ 时出现尖点. 因此在整条曲线上找不到切线平行于 y 轴的切点. □

注 与 §2.6.1 的习题 1236 相联系, 可见在中值定理的可微条件中"一点"也不能少. 在数学命题中一般都是如此, 即条件不能相差"一点", 否则即可举出反例.

习题 1253 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微, 且 $x_1x_2 > 0$, 证明

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

解 将左边分子的行列式展开, 然后分子分母同除以 x_1x_2, 这样就得到

$$\frac{\dfrac{f(x_2)}{x_2} - \dfrac{f(x_1)}{x_1}}{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}}.$$

于是就可以考虑对于两个函数 $\dfrac{f(x)}{x}$ 和 $\dfrac{1}{x}$ 来用柯西中值定理.

由于 $x_1x_2 > 0$ 和 $x_1 < x_2$, 定理的各项条件都满足, 因此存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得上式等于

$$\left.\frac{\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}\right|_{x=\xi} = \frac{\dfrac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \quad \square$$

2.6.4 中值定理的其他应用 (习题 1254–1265)

在 §2.6.1 中已经包含了罗尔定理的一些应用. 在 §2.6.2 中的习题除了证明几个简单的不等式之外, 主要是与拉格朗日定理的"中值" ξ (或 θ) 有关的内容. 本小节则包含了以拉格朗日中值定理为主要工具的许多应用, 其中有一部分是今后常用的定理.

习题 1254 证明, 如果函数 $f(x)$ 可微, 但在有限区间 (a, b) 内无界, 那么它的导数 $f'(x)$ 在区间 (a, b) 内也无界. 逆定理不成立 (举例说明).

解 用反证法. 设 $f'(x)$ 于 (a, b) 上有界, 则有 $M > 0$, 使得当 $x \in (a, b)$ 时成立 $|f'(x)| \leqslant M$.

任意取定一点 $x_0 \in (a, b)$, 则就可以对于 $x \in (a, b)$ 和 $x \neq x_0$ 应用拉格朗日定理得到

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0),$$

其中 $0 < \theta < 1$.

由于 $|x - x_0| < (b - a)$, 因此就可以用上式作出下列估计:

$$|f(x)| \leqslant |f(x_0)| + M(b-a),$$

可见 f 有界, 从而引出矛盾.

有界可微函数的导函数可以无界, 例如在 $(0,1)$ 上的 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, 其导函数为

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x},$$

当 $x = \dfrac{1}{2n\pi}$ 时有 $f'(\dfrac{1}{2n\pi}) = -4n^2\pi^2$, 可见 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上无界. □

注 前半题已经出现在 §2.1.3 的习题 1019(b) 中. 由于当时没有中值定理, 证明比较困难. 但是那里的方法本身还是有价值的 (参看该习题的附图).

习题 1255 证明, 如果函数在有限或无限区间 (a,b) 内有有界的导数 $f'(x)$, 那么 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

分析 这是判定可微函数在某个区间上一致连续的一个非常方便的充分条件. 证明留给读者. □

习题 1256 证明, 如果函数 $f(x)$ 在无限区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微, 且

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0,$$

那么

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0,$$

即当 $x \to +\infty$ 时有 $f(x) = o(x)$.

分析 可以先从条件 $f'(+\infty) = 0$ 出发, 用拉格朗日中值定理证明

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1) - f(x)] = 0,$$

然后用 §1.5.7 的习题 608(a) 的结论即可. 当然本题的独立证明也不很难, 如果有困难还可以参考习题 608(a) 的证明. 此外, 学过洛必达法则的读者一定会看出, 本题只是这个法则的特例. □

习题 1257 证明, 如果函数 $f(x)$ 在无限区间 $(x_0,+\infty)$ 内可微, 且当 $x \to +\infty$ 时有

$$f(x) = o(x),$$

那么

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

特别地, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$ 存在, 那么 $k = 0$.

解 用反证法. 设 $\varliminf\limits_{x\to+\infty} |f'(x)| = \varepsilon > 0$, 则存在 $M > x_0$, 使得当 $x > M$ 时成立 $|f'(x)| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.

对于任何 $x > M$, 在 $[M,x]$ 上对 f 用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (M,x)$, 使得

$$f(x) - f(M) = f'(\xi)(x - M),$$

于是有估计

$$|f(x)| \geqslant |f(x) - f(M)| - |f(M)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}(x - M) - |f(M)|,$$

但这时就有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x)|}{x} \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

这与 $f(x) = o(x)$ $(x \to +\infty)$ 相矛盾.

关于存在 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = k$ 的情况, 从上面即可推出 $k = 0$. 若要独立证明也不难, 读者可以一试. □

习题 1258.1 (单侧导数极限定理) 证明, 如果

(1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_0, X]$ 上有定义且连续;

(2) $f(x)$ 在开区间 (x_0, X) 内有有限的导数 $f'(x)$;

(3) 有限极限或无限极限 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f'(x) = f'(x_0 + 0)$ 存在,

那么分别存在有限或无限的单侧导数 $f'_+(x_0)$, 且

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0).$$

分析 这是关于右侧的导数极限定理, 同样有关于左侧的导数极限定理以及关于双侧的导数极限定理. 它们刻画了导函数的一个经常有用的基本性质.

首先要对最后一个结论的两边有清晰的了解. 左边 $f'_+(x_0)$ 是函数 f 在点 x_0 的右侧导数, 右边是导函数在点 x_0 的右侧极限. 例如, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在点 $x = 0$ 处存在导函数的右侧极限, 但不存在右侧导数. 反之, 如前面的习题 991, 997–998 等, 都在点 $x = 0$ 处可导, 但却不存在 $f'(+0)$.

本题的意义在于建立了存在 $f'_+(x_0)$ 的一个充分条件, 同时在导数极限为有限的情况下还保证了导函数在点 x_0 处右连续.

此外, 在习题中若 $f'(x_0 + 0) = \infty$, 则只可能是带有符号的 $+\infty$ 或 $-\infty$. 这可以从导函数的介值定理 (即 §2.6.5 的命题 2.1 的达布定理) 知道. □

解 若 $f'(x_0 + 0) = A$ 为有限数, 则对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, 成立

$$|f'(x) - A| < \varepsilon.$$

写出点 x_0 的差商 $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, 并限定 $\Delta x > 0$, 则对分子用拉格朗日中值定理后就有 $0 < \theta < 1$, 使得 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x$.

于是当 $0 < \Delta x < \delta$ 时就有

$$\left| \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - A \right| = |f'(x_0 + \theta \Delta x) - A| < \varepsilon,$$

按照右侧导数的定义这就是 $f'_+(x_0) = A$.

若 $f'(x_0 + 0)$ 为无穷大, 则如前面的分析中指出, 只有 $+\infty$ 和 $-\infty$ 两种可能, 不妨只给出第一种情况的证明.

这时对于任意给定的正数 $G>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, 成立 $f'(x)>G$.

于是当 $0<\Delta x<\delta$ 时就与前面类似地可以证明

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x)>G,$$

这样就证明了 $f'_+(x_0)=+\infty$. □

习题 1258.2 证明, 函数

$$f(x)=\begin{cases}\arctan\dfrac{1+x}{1-x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1\end{cases}$$

存在有限的极限 $\lim\limits_{x\to1}f'(x)$, 但函数 $f(x)$ 没有单侧导数 $f'_-(1)$ 和 $f'_+(1)$. 试给出这个事实的几何说明. 然而在这一点存在广义的单侧导数 (其定义见习题 1009.2).

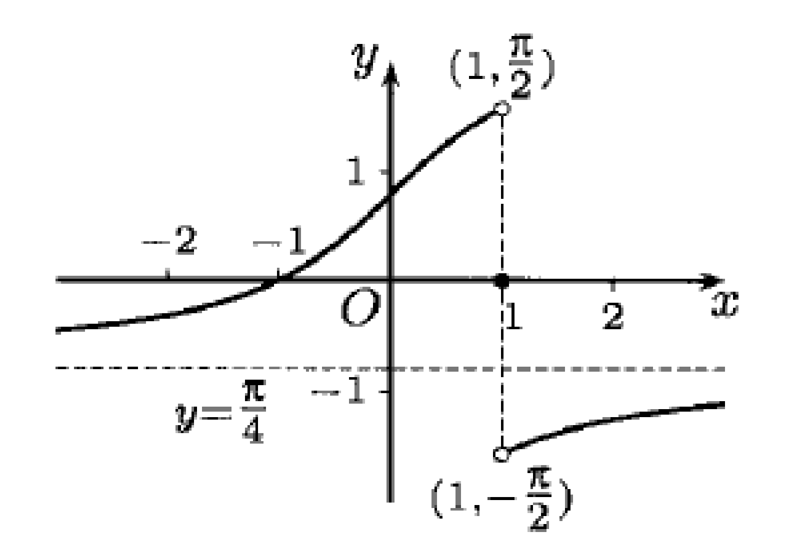
解 在 $x\neq1$ 时可以直接对表达式求导得到

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

因此存在 $\lim\limits_{x\to1}f'(x)=\dfrac{1}{2}$.

由于 $f(1+0)=-\dfrac{\pi}{2}$ 和 $f(1-0)=\dfrac{\pi}{2}$, 因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处双侧均不连续, 不可能存在两个单侧导数.

如附图所示, 当 $x\to1\pm0$ 时, 函数 f 和导函数 f' 都存在极限, 但在点 $x=1$ 处函数 f 不连续. □



习题 1258.2 的附图

下面的习题是后面许多习题的基础, 也是不定积分理论的支柱. 由于数学分析教科书中都有它的证明, 从略.

习题 1259 证明, 如果当 $a<x<b$ 时有 $f'(x)=0$, 那么 $f(x)$ 为常数 $(a<x<b)$.

在习题 1259 的基础上可以得到以下结论.

习题 1260 证明, 导数 $f'(x)=k$ 为常数的唯一函数 $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ 是线性函数 $f(x)=kx+b$.

解 作辅助函数 $F(x)=f(x)-kx$, 则就处处成立 $F'(x)=0$, 因此 F 为常值函数. 记 $F(x)=b$, 就得到 $f(x)=kx+b$. □

用数学归纳法可以讨论 f 的 n 阶导函数恒等于 0 时, f 一定是次数小于 n 的多项式. 这就是下一个习题. 请读者写出证明.

习题 1261.1 如果 $f^{(n)}(x)=0$, 那么关于 $f(x)$ 可以得到什么结论?

下一题有点难, 其证明中有很好的构思.

习题 1261.2 设 $f(x)\in C^{(\infty)}(-\infty,+\infty)$, 且对每一个 x, 存在正整数 n_x $(n_x\leqslant n)$, 使得

$$f^{(n_x)}(x)=0,$$

证明函数 f 是多项式函数.

解 任意取一个点 x_0, 又任取一个严格单调递减数列 $\{x_k\}$, 使得 $x_k\to x_0$ $(k\to\infty)$. 如题设条件所示, 对每一个 x_k, 存在正整数 $n_{x_k}\leqslant n$, 使得 $f^{(n_{x_k})}(x_k)=0$. 由于这无穷多个 n_{x_k} 都只在 $1,\cdots,n$ 中取值, 因此存在正整数 $p\leqslant n$, 使得其中有无穷多个 $n_{x_k}=p$.

不妨将上述数列中 $n_{x_k}\neq p$ 的其他项去掉, 并重记余下的项为严格单调递减数列 $\{x_k\}$, 于是它仍然收敛于 x_0, 同时有

$$f^{(p)}(x_k)=0,\ k=1,2,\cdots.$$

由于 f 无穷次可微, 因此 $f^{(p)}(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数. 于是就推出

$$f^{(p)}(x_0)=\lim_{k\to\infty}f^{(p)}(x_k)=0.$$

对每一个 k, 在区间 (x_{k+1},x_k) 上用罗尔定理, 这样就得到收敛于 x_0 的新的严格单调递减数列, 记为 $\{x_k'\}$, 它具有性质

$$f^{(p+1)}(x_k')=0,\ k=1,2,\cdots.$$

利用 $f^{(p+1)}(x)$ 的连续性, 又得到 $f^{(p+1)}(x_0)=0$.

如此继续就可以证明 $f^{(n)}(x_0)=0$. 由于 x_0 是任意取的, 这样就证明了在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f^{(n)}(x)=0$ 处处成立. 最后用上一题的结论即可. □

注 从微分学角度看, 多项式函数的一个特征就是: 在每个点处的足够高阶的导数一定等于 0. 而且这个阶数对所有点是一致的. 这是因为对于 n 次多项式, 其 $(n+1)$ 阶导函数就恒等于 0. 本题则表明, 如果高阶导数为 0 的阶数有界, 则这样的函数也只能是多项式.

习题 1262 证明, 满足方程 $y'=\lambda y$ (λ 为常数) 的唯一函数

$$y=y(x)\ \ (-\infty<x<+\infty)$$

是指数函数

$$y=Ce^{\lambda x},$$

其中 C 是任意常数.

解 将方程改写为 $y'-\lambda y=0$, 然后乘以 $e^{-\lambda x}$, 就得到

$$e^{-\lambda x}(y'-\lambda y)=\frac{d}{dx}(e^{-\lambda x}y)=0.$$

根据习题 1259 的结论, 存在常数 C, 使得 $e^{-\lambda x}y=C$, 这就是 $y=Ce^{\lambda x}$. □

注 本题的方法是对微分表达式 $y'-\lambda y$ 乘以一个适当的因子, 使它成为某个表达式的导数. 这种技巧也可称为凑微分法, 它有很多应用.

下面的几个习题都是微分法在恒等式证明中的应用, 其中 1263 题只列出题, 其中的 $f(x)$ 与前面的习题 1258.2 中的函数相同 (只是后者在 $x=1$ 处定义为 0), 从略.

习题 1263 验证函数

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x} \text{ 和 } g(x)=\arctan x$$

在区间 (1) $x<1$, (2) $x>1$ 内有相同的导数, 并导出这些函数之间的关系.

在习题 1264 的两个小题中给出第一小题的解答, 并解释恒等式的意义.

习题 1264(a) 证明下列恒等式

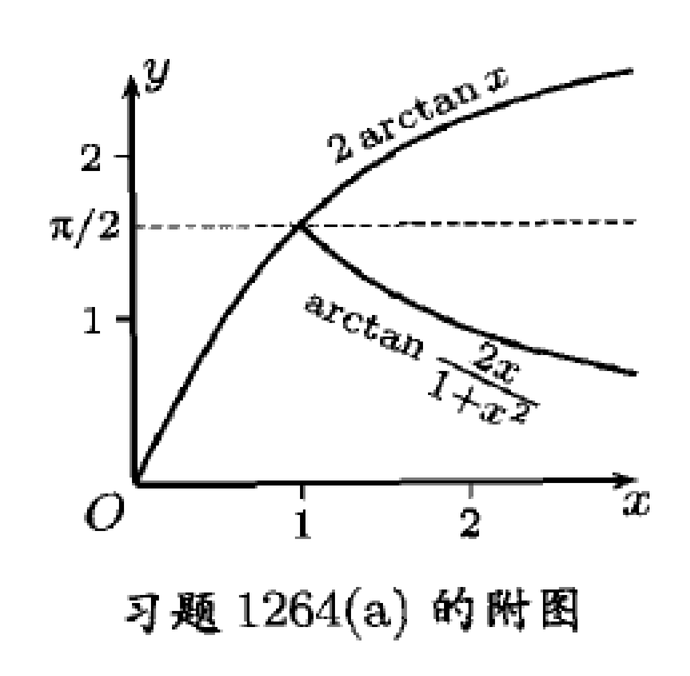
$$2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x\ \ (|x|\geqslant 1).$$

解 在 $|x|>1$ 时对恒等式的左边求导得到

$$\left(2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}\right)'=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1+x^2}{x^2-1}\cdot\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=0,$$

又利用恒等式左边的表达式为连续函数, 因此在 $x\geqslant 1$ 和 $x\leqslant -1$ 时分别为常值函数. 在这两个区间上分别用 $x=1$ 和 $x=-1$ 代入就得到要求证的结果. □



习题 1264(a) 的附图

注 微分法很容易证明了上述恒等式, 但它没有告诉我们这个恒等式是什么意思, 以及为什么在 $|x|\geqslant 1$ 时才成立这个恒等式. 我们又可以问: 在 $|x|<1$ 时发生了什么?

由于恒等式左边的两项都是奇函数, 下面只看 $x\geqslant 0$. 如附图所示, 在 $x\leqslant 1$ 时这两个函数恒等, 而在 $x\geqslant 1$ 时关于 $y=\frac{\pi}{2}$ 对称, 它们的和为 π.

现在不用微分法来证明这两个结论. 计算第一项的正弦值, 就有

$$\sin(2\arctan x)=2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x)$$
$$=2\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{2x}{1+x^2}.$$

在 $|x|\leqslant 1$ 时, $|\arctan x|\leqslant\frac{\pi}{4}$, 其两倍不超过 $\pi/2$, 因此就得到

$$\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=2\arctan x\ \ (|x|\leqslant 1),$$

当然这也可以用微分法来证明 (参看附录一的习题 323(b) 和附录二的习题 1519).

当 $x>1$ 时, $2\arctan x$ 介于 $\pi/2$ 与 π 之间, 而反正弦函数的值不超过 $\pi/2$, 因此两项不会相等. 这种情况在 §1.8 已经多次遇到. 利用

$$\sin(\pi-2\arctan x)=\sin(2\arctan x)=\frac{2x}{1+x^2},$$

而这时的 $0<\pi-2\arctan x<\pi/2$, 就得到下列等式, 它也就是所要证明的恒等式:

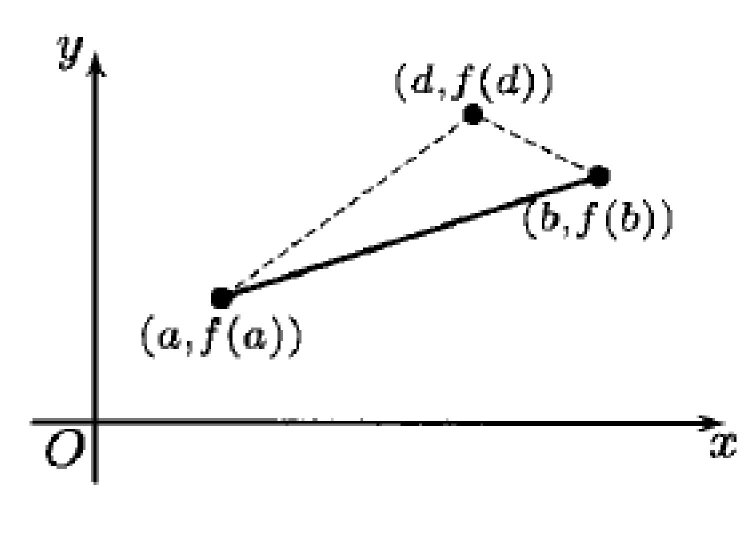
$$\pi-2\arctan x=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

习题 1265 证明, 如果函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续; (2) 在它的内部有有限导数 $f'(x)$; (3) 不是线性函数, 那么在开区间 (a,b) 内至少能找到一点 c, 使得

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,$$

试给出这个事实的几何说明.

分析 本题可从几何上来思考. 如附图所示, 作出了连接点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线段, 它的斜率就是 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 图中画的是斜率大于 0 的情况.



习题 1265 的附图

由于函数 $f(x)$ 不是线性函数, 因此在它的图像(没有画出)上一定有不在上述直线段上的点. 不妨如图所示, 设有点 $(d,f(d))$ 在直线段的上方. 用两条虚线将它与直线段的两个端点相连接, 则可以看出其中有一条的斜率大于直线段的斜率.

根据拉格朗日中值定理, 在区间 $[a,d]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像中一定存在这样的点, 使得该处的切线斜率等于连结点 $(a,f(a))$ 和 $(d,f(d))$ 的虚线的斜率.

对于函数图像上有点在该直线段下方的情况, 留给读者考虑.

于是已经明白了这道题的意思是什么, 下面就是如何写出一个严格的证明.

此外, 从运动学角度也可以给出解释. 设想 x 为时间, 则从时刻 a 到时刻 b 的质点直线运动中, 如果不是匀速运动的话, 一定有某个时刻的瞬时速度大于 (和小于) 全程的平均速度. □

解 由于 f 不是线性函数, 因此存在点 $d\in(a,b)$, 使得

$$f(d)\neq f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(d-a),$$

不妨只讨论上式的 "$\neq$" 为大于的情况. 这时从

$$f(d)>f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(d-a),$$

即可推出不等式

$$\frac{f(d)-f(a)}{d-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

和

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(d)}{b-d}&<\frac{1}{b-d}\cdot\left(f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(d-a)\right)\\&=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\end{aligned}$$

最后在 $[a,d]$ 和 $[d,b]$ 上分别用拉格朗日中值定理, 就知道存在点 ξ,η, 使得 $a<\xi<d<\eta<b$, 且有

$$f'(\xi)=\frac{f(d)-f(a)}{d-a},\quad f'(\eta)=\frac{f(b)-f(d)}{b-d}.$$

综合以上就找到了两个点 ξ 和 η, 使得

$$f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > f'(\eta),$$

可见在 ξ, η 中一定有一个点的导数绝对值大于 $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$, 将该点取为 c 即可. □

本节的最后两个习题将放在补注小节中作介绍.

2.6.5 补注 (习题 1266–1267)

1. 达布定理与导函数的不连续点

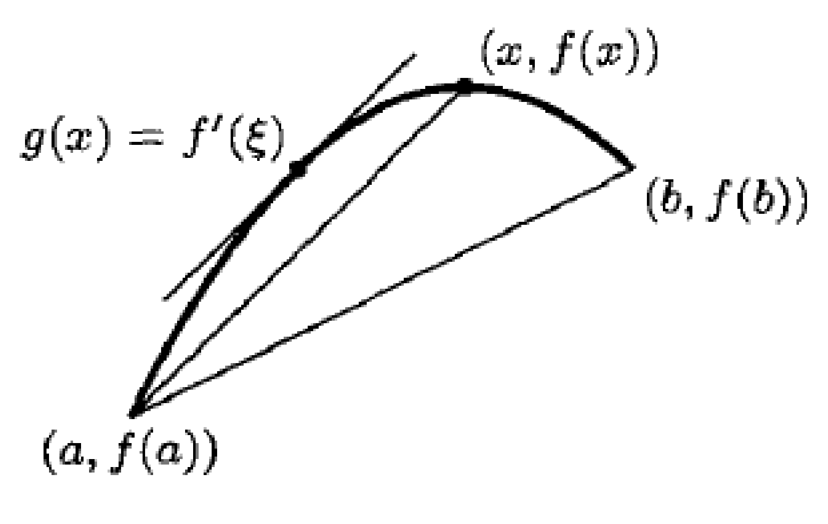
在习题 1258.1 中已经给出了导函数的一个重要性质 (即导数极限定理), 这里再补充有关导函数的一些基本性质. 首先是达布定理, 然后证明区间上的导函数不可能有第一类不连续点.

若 $f'(x)$ 连续, 则它显然具有介值性质. 达布定理则表明: 导函数的介值性质与其是否连续没有关系. 这也称为导函数具有达布性质.

命题 2.1 (导函数的介值定理, 达布定理) 导函数在区间上的值域一定是区间.

(下面给出两个证明. 其中证 1 出现于 2004 年, 证 2 是比较传统的方法.)

证 1 只要证明: 若在区间 $[a,b]$ 上的函数 f 处处可导, 且有 $f'(a) \neq f'(b)$, 则 f' 就能取到介于 $f'(a), f'(b)$ 之间的每个值. 这等价于 f' 的值域包含区间 $[f'(a), f'(b)]$ [①].



达布定理的附图 1

如附图 1 所示用割线斜率定义辅助函数:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a < x \leqslant b, \\ f'(a), & x = a, \end{cases}$$

则 $g \in C[a,b]$. 为简明起见记

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

则函数 g 的值域包含区间 $[f'(a), k]$.

根据拉格朗日中值定理的几何意义, 当 $a < x \leqslant b$ 时割线斜率 $g(x)$ 的值一定等于 f 在 (a,x) 中某点 ξ 的导数值 (见附图 1), 因此导函数 f' 的值域必定包含了函数 g 的值域, 从而包含了区间 $[f'(a), k]$.

同样可证: 导函数 f' 的值域也包含区间 $[k, f'(b)]$. 由于不论 k 如何, 总有

$$[f'(a), k] \cup [k, f'(b)] \supset [f'(a), f'(b)],$$

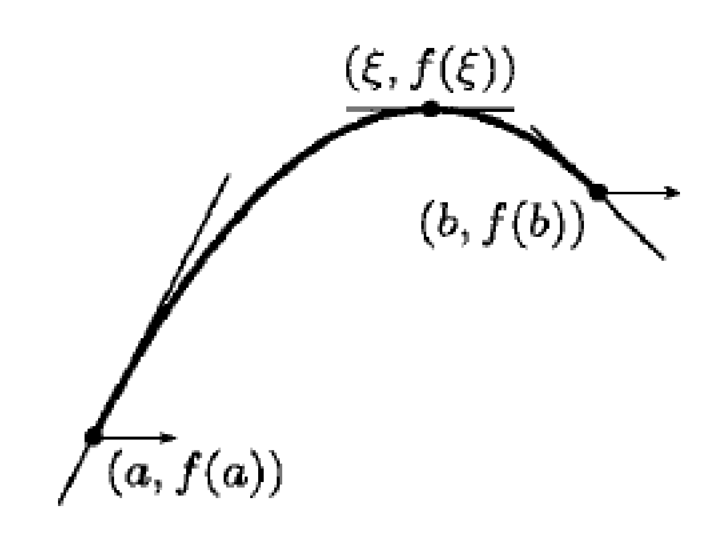
因此导函数 f' 的值域一定包含区间 $[f'(a), f'(b)]$. □

证 2 与证 1 相同只需证明: 若 $a < b$, 且在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(a) \neq f'(b)$, 则 f' 能够在 $[a,b]$ 上取到介于 $f'(a), f'(b)$ 之间的每个值.

---

① 为了叙述简明起见, 约定在记号 $[f'(a), f'(b)]$ 中允许 $f'(b) < f'(a)$. 这个约定还延伸到下面整个证明中出现的各个区间记号.

先讨论 $f'(a)f'(b) < 0$ 的特殊情况, 且不妨设有 $f'(a) > 0$ 和 $f'(b) < 0$ (见附图 2). 从导数的定义可知, 在点 a 右侧邻近的函数值大于 $f(a)$, 而在点 b 左侧邻近的函数值大于 $f(b)$, 于是连续函数 f 在 $[a,b]$ 上的最大值点 ξ 只能是某个内点 $\xi \in (a,b)$, 从而 ξ 一定是极大值点. 根据费马定理, 必有 $f'(\xi) = 0$.



达布定理的附图 2

对于 $f'(a) \neq f'(b)$ 的一般情况, 若 c 介于这两个导数值之间, 则作辅助函数

$$F(x) = f(x) - cx,$$

于是就有 $F'(a)F'(b) = (f'(a) - c)(f'(b) - c) < 0$. 根据前面已经讨论过的特殊情况, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 这也就是 $f'(\xi) = c$. □

从达布定理可以得到下列有用的推论.

推论 设 $f(x)$ 在区间 I 上可微, 且 $f'(x)$ 处处不为 0, 则 $f(x)$ 严格单调.

证 从达布定理知 $f'(x)$ 保号. 不妨设在 I 上处处有 $f'(x) > 0$, 则当 $x_1 < x_2$ 时, 就有 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

即 $f(x)$ 为严格单调递增函数. 同样可知若在 I 上处处有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 严格单调递减. □

命题 2.2 在区间上有定义的导函数不会有第一类不连续点.

证 1 (用导数极限定理证明)

用反证法. 设导函数 f' 在区间 I 上有定义. 若 x_0 为 I 的内点①, 且为 f' 的第一类不连续点, 则导函数于点 x_0 处存在两个有限的单侧极限 $f'(x_0+0)$ 和 $f'(x_0-0)$.

又由于存在导数 $f'(x_0)$, 因此 f 在点 x_0 处连续. 应用导数极限定理, 可见 f 在点 x_0 处存在两个单侧导数 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$, 且有

$$f'_+(x_0) = f'(x_0+0), \quad f'_-(x_0) = f'(x_0-0).$$

由于存在 $f'(x_0)$, 因此有 $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

综合以上可见 $f'(x_0) = f'(x_0-0) = f'(x_0+0)$, 于是 f' 于点 x_0 处连续, 引出矛盾. □

证 2 (用达布定理证明)

用反证法. 设导函数 f' 在区间 I 上有定义. 若 x_0 为 I 的内点, 且为 f' 的第一类不连续点, 则导函数于点 x_0 处存在两个有限的单侧极限 $f'(x_0+0)$ 和 $f'(x_0-0)$. 这时其中至少有一个不等于 $f'(x_0)$.

不妨只讨论 $f'(x_0) \neq f'(x_0+0)$ 的情况. (这样也已经将端点情况包含在内了.) 记 $a = f'(x_0)$, $b = f'(x_0+0)$, 且 $a \neq b$. 取 $\varepsilon = |b-a|/2$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$ 时, 导函数 f' 的取值除了 $a = f'(x_0)$ 之外, 只能落在区间

① 这里只需要讨论内点, 因为端点情况已经为导数极限定理所包含了.

$$(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$$

之内. 由于 $\varepsilon = |b-a|/2$, $a = f'(x_0)$, 因此 f' 在区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+\delta$ 上的值域不是区间, 这与达布定理矛盾. □

注 从本命题知道, 不是每一个函数都可以成为某个函数的导函数的, 例如 $\operatorname{sgn}(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上就不可能是任何函数的导函数.

从习题 991 知道在区间上的导函数可有不连续点. 当然那是第二类不连续点.

2. 习题 1266–1267

习题 1266 有一定的难度, 它的意义也不很简单, 因此放在补注中讨论.

习题 1266 证明, 如果 (1) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有二阶导数 $f''(x)$; (2) $f'(a)=f'(b)=0$, 那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 c, 使得

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\cdot|f(b)-f(a)|.$$

又若满足条件 (1),(2) 的 $f(x)$ 不是常值函数, 则在 (a,b) 内至少存在一点 c, 使得

$$|f''(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}\cdot|f(b)-f(a)|.$$

分析 若 f 为常值函数, 则结论显然成立. 以下只考虑 f 不是常值函数的情况.

将 $f''(x)$ 的绝对值的上确界记为

$$K = \sup_{a<x<b}|f''(x)|.$$

这时 $K\neq 0$. 否则, 从 $K=0$ 推出 $f'(x)$ 为常值函数. 配合条件 $f'(a)=f'(b)=0$ 则可见 $f'(x)\equiv 0$, 这与 $f(x)$ 是非常值函数的假定矛盾.

若 $K=+\infty$, 则结论已经成立. 以下设 K 为大于 0 的有限实数.

本题涉及 f, f', f'', 既可以从几何上考虑, 也可以从运动学上考虑. 先从后者来看, 这与中学物理的匀加速度的质点直线运动公式 $s=\dfrac{1}{2}at^2$ 有密切联系. 其中 t 是时间, a 是加速度, s 是所经过的路程.

现在将 x 看成为时间, 从 a 增加到 b, 则所要证明的结论就等价于关于路程、时间和加速度之间的一个不等式:

$$|f(b)-f(a)| < \frac{1}{4}K(b-a)^2, \tag{$*$}$$

其中 K 是加速度的绝对值的最小上界.

现在换一个角度, 设 K 给定, 则上述不等式表明无论什么样的运动, 只要加速度的绝对值不超过 K, 则在时间 $[a,b]$ 上经过的路程必须满足它.

于是可以考虑, 如何使得路程达到最大? 不妨只考虑 $f(b)>f(a)$ 的情况. 这时显然应当使得 $f'(x)\geqslant 0$ 成立. 从初始速度 $f'(a)=0$ 开始, 当然应当全加速前进. 但不要

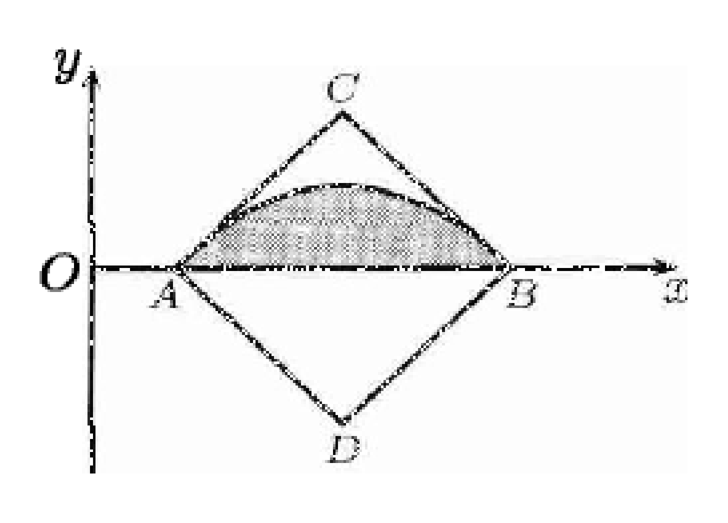
忘了最后还要停下来, 即要满足 $f'(b)=0$ (即所谓软着陆), 因此一个合适的策略就是在前一半时间中取 $f''(x)\equiv K$, 而在后一半时间中取 $f''(x)\equiv -K$ ①. 这时的路程是

$$2\cdot\frac{1}{2}K\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}K(b-a)^2,$$

即恰好是所要证明的不等式 $(*)$ 的右边.

再考虑到上述策略在加速度从 K 转换为 $-K$ 时的跳跃, 而我们要求 f 处处二阶可导, 因此实际上只可能成立严格的不等式 $(*)$. 还可以注意到, 在软着陆要求下, 最大路程不超过匀加速情况下的路程 $\frac{1}{2}K(b-a)^2$ 的一半.

下面我们再从几何上来考虑问题. 这时要求读者知道积分学中的牛顿–莱布尼茨公式等内容. 若目前还没有学到, 则可在以后再读下一段内容.



习题 1266 的附图

如附图所示, 连接点 $A(a,0)$ 和 $B(b,0)$ 的曲线是 $f'(x)$. 直线段 AC 和 DB 的斜率为 K, CB 和 AD 的斜率为 $-K$. 由于 $|f''(x)|\leqslant K$, 曲线 $f'(x)$ 完全落在平行四边形 $ACBD$ 内.

根据牛顿–莱布尼茨公式, 曲线 $f'(x)$ 与 x 轴包围的图形, 即在附图中的阴影区域, 其面积就是 $|f(b)-f(a)|$. 它不会超过三角形 ACB 或 ADB 的面积. 后者就是 $(*)$ 的右边.

由于只有当 $f'(x)$ 的图像与折线 ACB 或者 ADB 重合时, 才能使得 $(*)$ 两边相等, 而 $f'(x)$ 处处可导决定了不可能取这样的折线, 因此 $(*)$ 成立严格的不等号. □

现在开始写出本题的解. 为了便于理解, 将证明中的一些细节独立写成为引理②, 它们本身也是拉格朗日中值定理的简单应用. 引理 1 的内容简单, 证明从略.

引理 1 设函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续, 于 (a,b) 上可微.

(1) 若在 (a,b) 上成立 $f'(x)\geqslant 0$, 则 $f(b)\geqslant f(a)$;

(2) 又若在 (a,b) 上成立 $f'(x)\geqslant 0$ 但不恒等于 0, 则 $f(b)>f(a)$.

引理 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 于 (a,b) 上可微.

(1) 若对某个常数 K 在 (a,b) 上成立不等式 $|f'(x)|\leqslant K(x-a)$, 则有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{K}{2}(b-a)^2;$$

(2) 若在 (a,b) 上成立 $|f'(x)|\leqslant K(x-a)$, 但不恒成立等号, 则有

$$|f(b)-f(a)|<\frac{K}{2}(b-a)^2.$$

证 (1) 将条件改写为两个不等式:

$$-K(x-a)\leqslant f'(x)\leqslant K(x-a),$$

① 这种策略在控制论中称为 Bang–Bang 控制原理. 这里的分析已经表明, 在固定时间内要使得路程最大, 就应当采用这样的策略. 又可以看出, 为了完成既定路程, 采取 Bang–Bang 控制方式即是使得时间最省 (即快速最佳控制) 的策略.

② 对于学过下一节的单调性和不等式的读者来说, 这两个引理都是"容易"的. 若学过积分学, 则就更为"平凡"了.

然后定义辅助函数

$$F(x) = \frac{K}{2}(x-a)^2 - [f(x) - f(a)],$$

则有 $F(a) = 0$, $F'(x) = K(x-a) - f'(x) \geqslant 0$. 从引理 1 得出 $F(b) \geqslant 0$, 即是

$$f(b) - f(a) \leqslant \frac{K}{2}(b-a)^2.$$

又定义辅助函数

$$G(x) = [f(x) - f(a)] + \frac{K}{2}(x-a)^2,$$

则同样有 $G(a) = 0$, $G'(x) = f'(x) + K(x-a) \geqslant 0$, 并从引理 1 得出 $G(b) \geqslant 0$, 即是

$$f(b) - f(a) \geqslant -\frac{K}{2}(b-a)^2.$$

合并以上就得到 $|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{K}{2}(b-a)^2$.

(2) 若至少在某个 x_0 时有 $|f'(x_0)| < K(x_0 - a)$, 则在以上证明中用引理 1 之 (2) 即可得到所要的结论. □

习题 1266 的解 如分析中开始所说, 只需讨论 $K = \sup\limits_{a<x<b} |f''(x)|$ 为大于 0 的有限实数的情况. 定义辅助函数

$$g(x) = \begin{cases} K(x-a), & a \leqslant x \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ K(b-x), & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant b. \end{cases}$$

如附图所示, $g(x)$ 的图像就是折线 ACB, 它是 $[a,b]$ 上的分段线性函数, 在中点 $x = \frac{a+b}{2}$ 处有角点.

在 $a \leqslant x \leqslant \frac{a+b}{2}$ 时利用 $f'(a) = 0$, 对 $f'(x)$ 在 $[a,x]$ 上用拉格朗日中值定理, 而在 $\frac{a+b}{2} \leqslant x \leqslant b$ 时利用 $f'(b) = 0$, 对 $f'(x)$ 在 $[x,b]$ 上用拉格朗日中值定理, 就可以建立不等式

$$|f'(x)| \leqslant g(x), \ a \leqslant x \leqslant b.$$

由于 $f'(x)$ 是在 $[a,b]$ 上的可微函数, 而 $g(x)$ 在中点 $\frac{a+b}{2}$ 处没有导数, 因此上述不等式不可能在 $[a,b]$ 上恒成立等号.

对于区间 $[a, \frac{a+b}{2}]$ 和 $[\frac{a+b}{2}, b]$ 分别用引理 2 之 (1), 就得到下列两个不等式:

$$\left|f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\right| \leqslant \frac{K}{8}(b-a)^2,$$

$$\left|f(\frac{a+b}{2}) - f(b)\right| \leqslant \frac{K}{8}(b-a)^2,$$

又利用引理 2 之 (2), 可见上述两个不等式不可能同时成立等号. 将两式相加, 就得到成立严格不等号的不等式:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \left|f(b) - f(\frac{a+b}{2})\right| + \left|f(\frac{a+b}{2}) - f(a)\right| < \frac{K}{4}(b-a)^2. \quad \square$$

§2.7 函数的递增与递减. 不等式 (习题 1268–1297)

内容简介 本节的习题是用微分学工具解决函数的单调性分析, 并对于不等式的证明提供一种常用的方法.

2.7.1 单调性分析 (习题 1268–1287)

在第一章中的许多问题, 例如 §1.4 中的作图等, 都依赖于对函数的单调性分析. 微分学为单调性判定给出了普遍有效的方法. 下面列出这方面的主要定理:

(1) 在区间 I 上有定义的可微函数 $f(x)$ 为单调递增 (递减) 的充分必要条件是其导函数在 I 上非负 (非正);

(2) 在区间 I 上有定义的可微函数 $f(x)$ 为严格单调递增 (递减) 的充分必要条件是其导函数在 I 上非负 (非正), 且在数集

$$\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$$

中不包含任何子区间. (当 $f'(x) = 0$ 的点都是孤立点时这个条件总是满足的.)

习题 1270 求函数 $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ 的严格单调 (递增或递减) 区间.

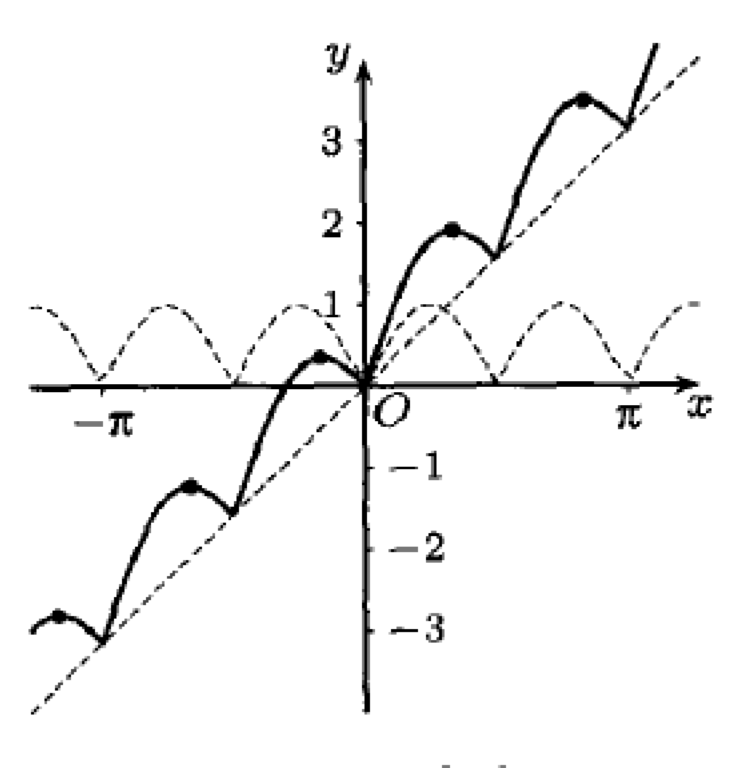
解 求导得到

$$y' = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

于是导函数的符号完全由 $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$ 确定. 由于 $y' = 0$ 的根为 ± 1, 因此就知道 $y(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上严格单调递减, 在 $[-1, 1]$ 上严格单调递增, 在 $[1, +\infty)$ 上严格单调递减, 其图像见 §1.4.1 的习题 257 (牛顿蛇形线). 列表如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小值 -1	↗	极大值 1	↘

□



习题 1273 的附图

习题 1273 求函数 $y = x + |\sin 2x|$ 的严格单调 (递增或递减) 区间.

分析 如前所说, 在对于函数作出单调性分析后就可以得到比较准确的图像, 那么在用微分学工具作单调性分析时, 是否可以用 §1.4 中作草图的方法来相互配合呢? 我们认为应当如此.

如附图所示, 用虚线作出 $y = x$ 和 $y = |\sin 2x|$ 的图像, 然后叠加得到本题函数的图像, 于是单调性的大致情况已经清楚.

解 注意到 $\sin 2x$ 是最小周期为 π 的周期函数, 就可以看出 $|\sin 2x|$ 是最小周期为 $\pi/2$ 的周期函数. 虽然 $y(x) = x + |\sin 2x|$ 不是周期函数, 但在其可导域上导函数 $y'(x) = 1 + (|\sin 2x|)'$ 却是最小周期为 $\pi/2$ 的周期函数, 因此只要在 $[0, \pi/2]$ 上作出单调性分析后将其结论"周期延拓"即可. 此外还可以注意到在 $\sin 2x = 0$ 的点处 $y(x)$ 的导数不存在, 但两个单侧导数都是存在的.

在 $[0, \pi/2]$ 上 $\sin 2x > 0$, 因此就得到

$$y'(x) = 1 + 2\cos 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

上述表达式对于在端点 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 处的右导数和左导数也适用. 这可从导数极限定理 (即习题 1258.1) 推出.

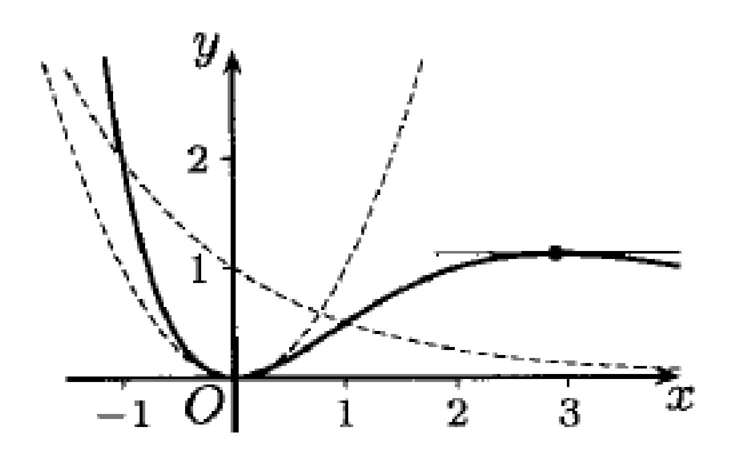
在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内解出 $y'(x) = 0$ 的根为 $x = \frac{\pi}{3}$. 于是 $y(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{3}]$ 上严格单调递增, 而在 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调递减.

最后答案为: 对一切整数 n, $y(x)$ 在 $[\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}]$ 上严格单调递增, 在 $[\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$ 严格单调递减 (附图中标出作为单调曲线段分界点的极大值点). □

习题 1275 求函数 $y = \dfrac{x^2}{2^x}$ 的严格单调 (递增或递减) 区间.

解 直接求导得到

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 \cdot 2^{-x})' = 2x \cdot 2^{-x} - x^2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{-x} \\ &= x \cdot (2 - x\ln 2) \cdot 2^{-x}, \end{aligned}$$



习题 1275 的附图

可求出 $y' = 0$ 的根为 0 和 $\dfrac{2}{\ln 2} \approx 2.885$, 于是可以确定出三个单调区间和极值点的准确位置, 列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2/\ln 2)$	$2/\ln 2 \approx 2.885$	$(2/\ln 2, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{(\ln 2)^2} \cdot 2^{-\frac{2}{\ln 2}} \approx 1.127$	↘

这里就显示出微分法的优点. 虽然本题的图像也容易用曲线相乘作出 (见附图), 但用 §1.4 的方法一般只能作出草图, 难以准确地求出单调区间和极值点的位置. □

习题 1278 求函数 $f(x) = x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sin\ln x\right)$ 的严格单调 (递增或递减) 区间, 其中 $x > 0$, $f(0) = 0$.

解 直接求导得到在 $x > 0$ 的导函数表达式:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin\ln x + \cos\ln x = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

利用对数函数 $\ln x$ 严格单调递增, 令 $t = \frac{\pi}{4} + \ln x$, 并先在 $[0, 2\pi]$ 上比较 $\sin t$ 与 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 可见当 $t \in [\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi]$ 时 $\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 将这个结论"周期延拓", 就知道对于每个整数

n, 当 $t \in [2n\pi + \frac{4}{3}\pi, 2n\pi + \frac{5}{3}\pi]$ 时 $\sin t < -\frac{\sqrt{3}}{2}$. 从 $t = \frac{\pi}{4} + \ln x$ 回复到自变量 x, 就可确定出在区间

$$[\exp[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{12}], \exp[(2k+1)\pi + \frac{5\pi}{12}]]$$

上 $f(x)$ 严格单调递减.

不必再作计算就知道在区间

$$[\exp[(2k+1)\pi + \frac{5\pi}{12}], \exp[(2k+3)\pi + \frac{\pi}{12}]]$$

上 $f(x)$ 严格单调递增. □

注 本题的函数 $f(x)$ 就是 §2.6.2 的习题 1249 中的 $x\sin(\ln x)$ 再加上 $x\sqrt{\frac{3}{2}}$. 因此根据那里的讨论与附图已经可以知道 $f(x)$ 的图像从 0 到 $+\infty$ 有无穷多次振荡, 因此存在无穷多个单调性区间.

习题 1279 证明, 圆内接正 n 边形的周长 p_n 随边数 n 的增大而增大, 而圆外切正 n 边形的周长 P_n 反而随边数 n 的增大而减小. 利用这个结论证明, 当 $n \to \infty$ 时, p_n 和 P_n 有相同的极限.

解 不妨设圆半径为 1, 于是就有

$$p_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}, \quad P_n = 2n\tan\frac{\pi}{n}, \quad n = 3, 4, \cdots.$$

为了研究数列 $\{p_n\}$ 的单调性, 可以将 n 换为连续的自变量 $x \geqslant 3$. 在此范围上定义函数 $p(x) = 2x\sin\frac{\pi}{x}$, 求导得到

$$\begin{aligned} p'(x) &= 2\sin\frac{\pi}{x} + 2x\cos\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \\ &= 2\cos\frac{\pi}{x}\left(\tan\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

同样可以对于数列 $\{P_n\}$ 定义$P(x) = 2x\tan\frac{\pi}{x}$, 其中 $x \geqslant 3$, 然后求导得到

$$\begin{aligned} P'(x) &= 2\tan\frac{\pi}{x} + 2x\sec^2\frac{\pi}{x}\cdot\left(-\frac{\pi}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}}\left(\sin\frac{2\pi}{x} - \frac{2\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

由此可见, 为了证明 $p'(x) > 0$ 和 $P'(x) < 0$, 只要建立当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时的两个不等式 $\sin t < t < \tan t$ 即可. 证明这两个不等式的最简单的方法是利用正弦和正切的几何定义. 在多数的教科书中证明基本极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 时就是这样做的, 此处从略[①].

于是已经证明了 $\{p_n\}$ 严格单调递增, $\{P_n\}$ 严格单调递减. 然后从

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n$$

可推出 $\{p_n\}$ 有上界, $\{P_n\}$ 有下界, 从而都收敛. 在 p_n, P_n 的表达式中令 $n \to \infty$ 可见极限相同. □

① 目前用拉格朗日中值定理或其他工具很容易证明这两个不等式, 只是微分学的建立不可能离开 $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$ 这个基本极限, 因此这类证明有循环论证之嫌疑.

注　若利用 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, 则一开始就可以计算出 $p_n\to 2\pi$, 即单位圆的周长. 同样可以得到 $P_n\to 2\pi$.

习题 1280　证明函数 $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 上递增.

解　用对数求导法就有

$$\begin{aligned}y'=y(\ln y)'&=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]'\\&=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]\\&=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right],\end{aligned}$$

于是问题归结为证明最后一式的方括号内的表达式大于 0. 为方便起见, 在该因子中引入变量 $t=\dfrac{1}{x}$, 得到函数

$$g(t)=\ln(1+t)-\frac{t}{1+t},$$

同时关于 x 的区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(0,+\infty)$ 分别转换为关于 t 的区间 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$. 问题只是证明 $g(t)$ 在这两个区间上都是大于 0 的.

计算出导数

$$g'(t)=\frac{1}{1+t}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{t}{(1+t)^2},$$

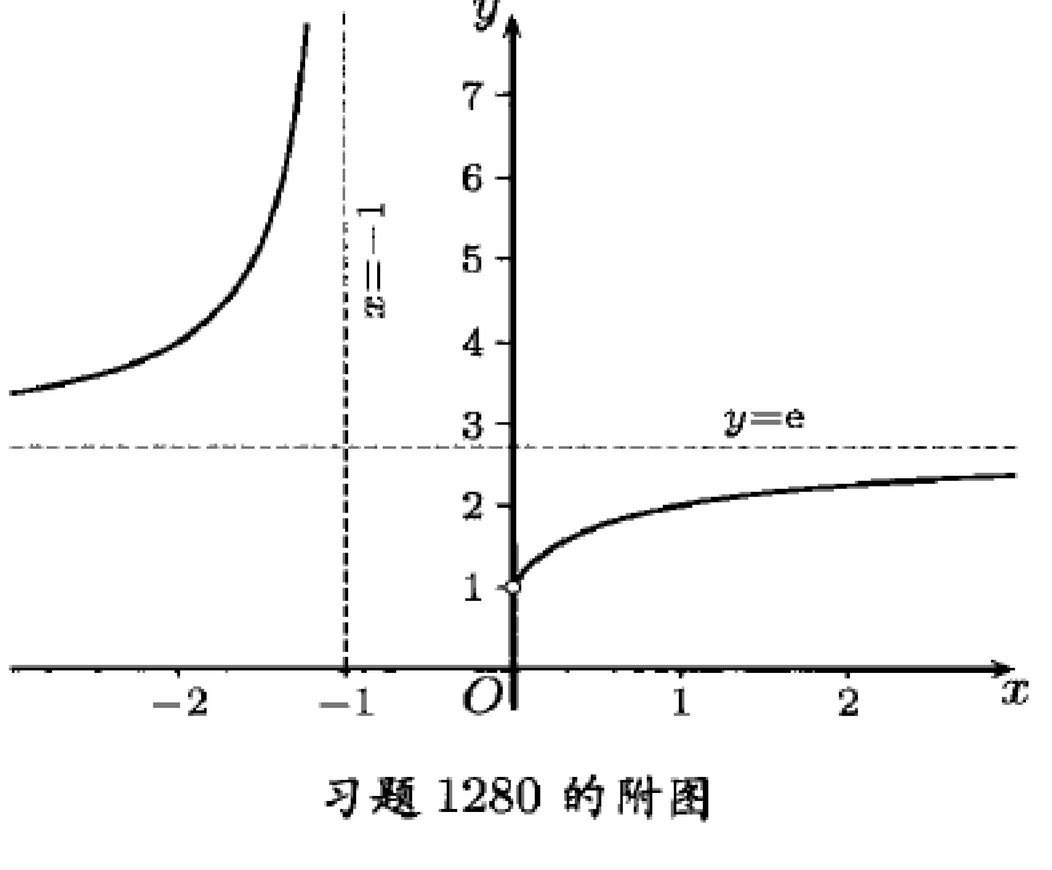
可见 $g'(t)$ 与 t 同号.

利用 $g(0)=0$, 就可以在区间 $[0,t]$ 上用拉格朗日中值定理得到

$$g(t)-g(0)=g(t)=tg'(\theta t),$$

其中 $0<\theta<1$, 并允许 $-1<t<0$.

由此可见, 在 $t>0$ 和 $-1<t<0$ 时都有 $g(t)>0$.



习题 1280 的附图

综合以上讨论就已经证明在指定的两个区间上函数 $y'>0$, 因此 y 在两个区间上分别为严格单调递增函数 (见附图). □

注　不用微分法也可解决本题. 回顾前面在 §1.4.7 中关于函数

$$y=(t+1)^{\frac{1}{t}}$$

的单调性分析及其附图, 可见从该函数在 $(-1,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上的严格单调递减就恰好等价于本题要求证的结论. 此外, 也不难看出, 该处的函数图像在 $t=\dfrac{1}{x}$ 的变量变换下就得到本题的函数图像.

比较这两种方法可以看出, 微分学给出了普遍有效的工具, 而在前面的方法则依赖于许多特殊的结果和工具. 因此在有了微分学之后, 我们可以回过去对许多在当时感到较困难的问题给出很容易的解法. 这不仅仅限于单调性分析, 还包括前面的许多其他问

题. 只是要注意不要出现循环论证的错误. 这方面的一个典型例子就是用后面的 §2.9 的洛必达法则去证明 §1.5 中的基本极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

习题 1281 证明, 有理整函数

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\ \ (n\geqslant 1, a_n\neq 0)$$

在区间 $(-\infty,-x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 内是严格单调的, 其中 x_0 为足够大的正数.

解 1 求导得到

$$\begin{aligned}P'(x)&=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1\\&=na_nx^{n-1}\cdot\left[1+\frac{(n-1)a_{n-1}}{na_n}\cdot\frac{1}{x}+\cdots+\frac{a_1}{na_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\right],\end{aligned}$$

可见在上式的方括号内除了第一项 1 之外, 其余 $n-1$ 项当 $|x|\to+\infty$ 时都是无穷小量. 因此存在 $x_0>0$, 使得当 $|x|>x_0$ 时导函数 $P'(x)$ 的符号完全由 a_nx^{n-1} 确定, 因此在 $(-\infty,-x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上 $P(x)$ 严格单调. □

解 2 $P'(x)$ 作为 $n-1$ 次多项式或者没有实根, 或者, 根据韦达定理, 至多有 $n-1$ 个实根, 因此存在 $x_0>0$, 使得当 $|x|>x_0$ 时 $P'(x)$ 没有实根, 从而在 $(-\infty,-x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上分别保号, 这就保证了 $P(x)$ 在这两个区间上分别严格单调. □

习题 1282 证明, 不恒等于常数的有理函数

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}\ \ (a_nb_m\neq 0)$$

在区间 $(-\infty,-x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 内严格单调, 其中 x_0 为足够大的正数.

解 将 $R(x)$ 的表达式的分子和分母分别记为 $P(x)$ 和 $Q(x)$, 则就有

$$R'(x)=\frac{P'(x)Q(x)-Q'(x)P(x)}{Q^2(x)},$$

可见导函数 $R'(x)$ 的符号是由上式的分子决定的. 由于这个分子是多项式, 利用上题的结论, 因此存在 $x_0>0$, 使得该多项式在 $(-\infty,-x_0)$ 和 $(x_0,+\infty)$ 上分别保号, 且使 $Q(x)\neq 0$. 这就推出 $R(x)$ 在这两个区间上分别严格单调. □

习题 1284 证明, 如果 $\varphi(x)$ 为单调递增的可微函数, 且当 $x\geqslant x_0$ 时有

$$|f'(x)|\leqslant\varphi'(x),$$

那么

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\varphi(x)-\varphi(x_0)\ \ (x\geqslant x_0).$$

对这一事实给出几何说明.

解 将条件改写为

$$-\varphi'(x)\leqslant f'(x)\leqslant\varphi'(x),\ x\geqslant x_0,$$

也就是在 $x\geqslant x_0$ 上同时成立 (1) $f'(x)-\varphi'(x)\leqslant 0$ 和 (2) $f'(x)+\varphi'(x)\geqslant 0$.

作辅助函数

$$F(x) = f(x) - \varphi(x),\ x \geqslant x_0,$$

于是从条件 (1) 有 $F'(x) = f'(x) - \varphi'(x) \leqslant 0$, 从而 F 在 $x \geqslant x_0$ 时单调递减, 就有

$$F(x) = f(x) - \varphi(x) \leqslant F(x_0) = f(x_0) - \varphi(x_0),$$

整理后就是

$$f(x) - f(x_0) \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

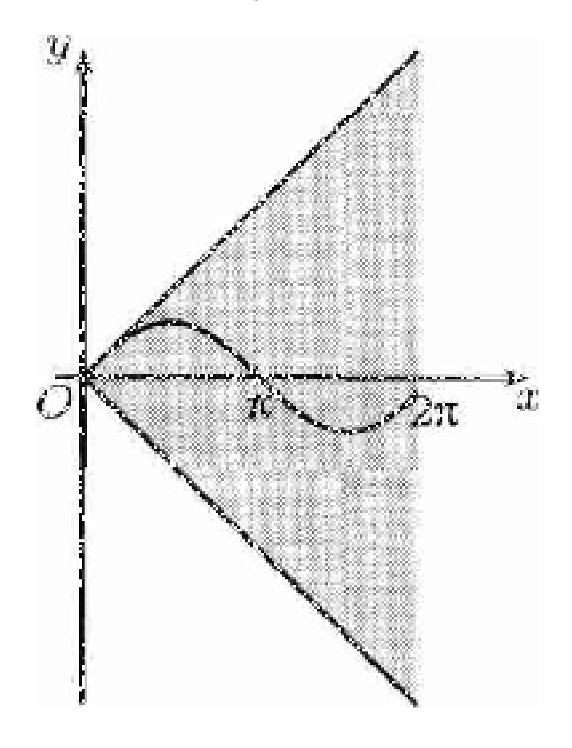
同样可作辅助函数 $G(x) = f(x) + \varphi(x)$, 并根据条件 (2) 得到 $G'(x) = f'(x) + \varphi'(x) \geqslant 0$ $(x \geqslant x_0)$, 因此 G 在 $x \geqslant x_0$ 上单调递增, 然后从 $G(x) \geqslant G(x_0)$ 得到

$$f(x) - f(x_0) \geqslant -[\varphi(x) - \varphi(x_0)].$$

合并以上就得到在 $x \geqslant x_0$ 时成立 $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

本题在不等式证明和关于常微分方程的解的估计中很有用. 它表明, 在条件 $|f'(x)| \leqslant \varphi(x)$ $(x \geqslant x_0)$ 满足时, 函数 f 从 x_0 到 x 的增量的绝对值不超过 φ 的增量.

为了说明本题的几何意义, 我们举一个具体例子. 如附图所示, 取 $f(x) = \sin x$, $x \geqslant 0$, $\varphi(x) = x$, $x \geqslant 0$, 则从 $f'(x) = \cos x$ 和 $|\cos x| \leqslant 1 = \varphi'(x)$ 就可以知道函数 $f(x) = \sin x$, $x \geqslant 0$ 的图像一定处于图中的阴影区内, 它是由 $y = \pm x$ $(x \geqslant 0)$ 所限制的区域.



习题 1284 的附图

这同时也就是得到了不等式

$$|\sin x| \leqslant x \ \ (x \geqslant 0)$$

或者写成

$$-x \leqslant \sin x \leqslant x \ \ (x \geqslant 0). \quad \square$$

下一题提出了点单调的概念, 其中的证明需要用实数系的基本定理.

习题 1286 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内函数增量

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

的符号与自变量增量 $\Delta x = x - x_0$ 的符号一致, 那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 递增.

证明, 如果函数 $f(x)$ $(a < x < b)$ 在某个有限或无限区间 (a, b) 内的每一点递增, 那么它在这个区间内递增.

注 本题的结论可改进为 f 在 (a, b) 上严格单调递增. 下面的几个证明都按此要求来给出.

解 1 (用确界存在定理) 只要对于任意两点 c, d, 满足 $a < c < d < b$, 证明 $f(c) < f(d)$ 即可.

对点 c 按条件有 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (c, c + \delta)$ 时有 $f(c) < f(x)$.

定义数集

$$S = \{x \in (c, d] \mid f(c) < f(x)\},$$

于是只要证明 $d \in S$ 就得到所要求证明的 $f(c) < f(d)$.

因 S 是非空有上界的数集, 根据确界存在定理, S 有上确界, 记为 $\beta = \sup S$.

以下分两步.

(1) 证明 $\beta = d$.

用反证法. 若 $\beta < d$, 则对于点 β 用题设的条件, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得在邻域 $|x-\beta| < \delta_1$ 内, $f(x) - f(\beta)$ 与 $x - \beta$ 同号. 特别有 $f(\beta) < f(\beta + \dfrac{\delta}{2})$.

由于 $\beta = \sup S$, 因此在 $(\beta - \delta_1, \beta]$ 内存在某个点 $x_1 \in S$, 于是有 $f(c) < f(x_1)$.

合并以上就有

$$f(c) < f(x_1) \leqslant f(\beta) < f(\beta + \frac{\delta}{2}),$$

因此点 $\beta + \dfrac{\delta}{2} \in S$. 这与 $\beta = \sup S$ 相矛盾.

(2) 在 $\beta = d = \sup S$ 的基础上证明 $f(c) < f(d)$.

对于点 d 用题设条件, 即存在 $\delta_2 > 0$, 使得在邻域 $|x - d| < \delta_2$ 内, $f(x) - f(d)$ 与 $x - d$ 同号.

利用 d 是 S 的上确界, 因此在 $(d - \delta_2, d]$ 内存在点 $x_2 \in S$, 于是有

$$f(c) < f(x_2) \leqslant f(d). \quad \square$$

注 这里所用的方法就是在 §2.1.3 的习题 1019 中使用过的勒贝格方法.

解 2 (用闭区间套定理) 任意取定 c, d, 满足 $a < c < d < b$, 我们来证明 $f(c) < f(d)$.

用反证法. 设有 $f(c) \geqslant f(d)$. 记 $c_1 = c$, $d_1 = d$, 并考察 $f(\dfrac{c+d}{2})$.

这时在两个不等式

$$f(c) \geqslant f(\frac{c+d}{2}),$$
$$f(\frac{c+d}{2}) \geqslant f(d)$$

之中至少有一个成立. 若第一个不等式成立, 则记 $c_2 = c$, $d_2 = \dfrac{c+d}{2}$; 若第一个不等式不成立, 则记 $c_2 = \dfrac{c+d}{2}$, $d_2 = d$. 于是得到 $[c_2, d_2]$, 它是 $[c_1, d_1]$ 的子区间, 其长度为 $[c_1, d_1]$ 的一半, 且成立不等式 $f(c_2) \geqslant f(d_2)$.

继续如此做下去就得到区间套 $\{[c_n, d_n]\}$, 其长度 $d_n - c_n \to 0$, 且对每一个 n 满足条件 $f(c_n) \geqslant f(d_n)$.

根据闭区间套定理, 该区间套存在公共点, 记为 ξ.

对 ξ 用题设条件, 存在 $\delta > 0$, 使得在邻域 $|x - \xi| < \delta$ 内, $f(x) - f(\xi)$ 与 $x - \xi$ 同号.

由于 $c_n \uparrow \xi$, $d_n \downarrow \xi$, 因此存在 N, 使得

$$[c_N, d_N] \subset (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

于是成立两个不等式

$$f(c_N) \leqslant f(\xi) \leqslant f(d_N).$$

由于 $f(c_N) - f(\xi)$ 与 $c_N - \xi$ 同号, $f(\xi) - f(d_N)$ 与 $\xi - d_N$ 同号, 而 $c_N < d_N$, 因此以上两个不等式不可能同时成立等号. 这样就得到 $f(c_N) < f(d_N)$. 但这与该闭区间套所具有的特殊性质 $f(c_n) \geqslant f(d_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 相矛盾. $\square$

习题 1287 证明, 函数

$$f(x)=\begin{cases}x+x^2\sin\dfrac{2}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

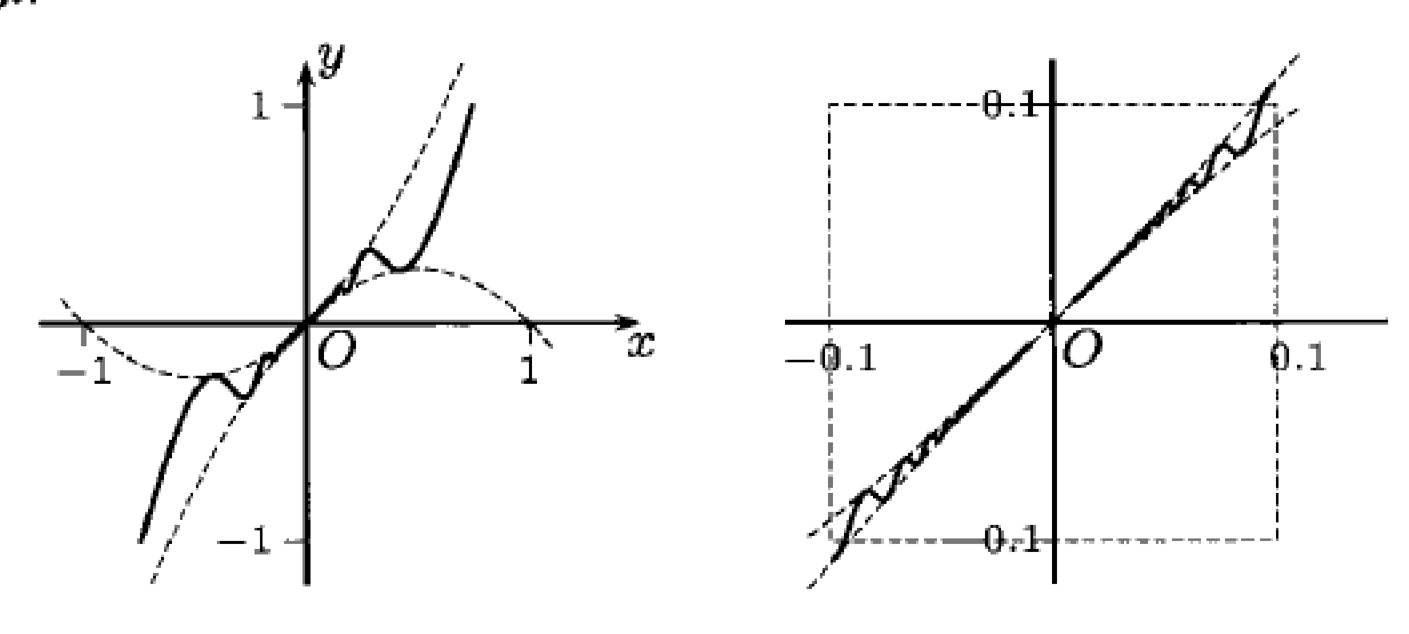
在点 $x=0$ 处递增, 但在包含此点的任何区间 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内不是递增的, 其中 $\varepsilon>0$ 为任意小量. 并作这个函数的草图.

解 在 $x=0$ 处的导数可以按照定义计算如下:

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\&=1+\lim_{x\to 0}x\sin\frac{2}{x}=1,\end{aligned}$$

因此当 $|x|$ 充分小时, 差商 $f(x)/x$ 大于 0, 从而 f 于 $x=0$ 处递增.

接下来先作此函数的草图. 在 f 的表达式中的第二项与 §2.1.3 的习题 991 中的函数 $x^2\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ 差不多, 在与 $y=x$ 叠加之后就得到附图中的图像. 它夹在两条抛物线 $y=x\pm x^2$ 之间, 在 $x=0$ 附近有无限多次振荡, 只是幅度随着与原点的接近而以二阶无穷小量的速度变小. 在附图的两个分图中分别按照两种尺度作出了函数 $f(x)$ 在原点附近的图像.



习题 1287 的附图

当然不可能从附图中看清楚在原点邻近的 $f(x)$ 的性态. 为此还是需要用分析方法求导数, 这样就得到

$$f'(x)=1+2x\sin\frac{2}{x}-2\cos\frac{2}{x}\ \ (x\neq 0),$$

而且可以看出, 在邻域 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 内前两项的绝对值不超过 $1+2\varepsilon$. 于是只要取 $\varepsilon>0$ 足够小, $f'(x)$ 在点 $x=\dfrac{2}{n\pi}$ 处的符号就完全由第三项 $-2\cos\dfrac{2}{2/n\pi}=2(-1)^{n+1}$ 决定, 其中 n 取一切非零整数. 由于 $f'(x)$ 的符号在 $x=0$ 的任何邻近都是不断变化的, 从而 f 不可能是邻域 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 上的单调递增函数. □

注 由上可见, 函数在一点递增 (或递减) 确实是一种新的局部性概念, 可称为"点单调". 与此对比, 平时所说的单调概念却是具有整体性质的概念, 因为它必须是对于某一个区间而言的, 姑且称为"区间单调". 这与上一章中的连续和一致连续概念之间的差异是类似的.

2.7.2 不等式 (习题 1288–1295, 1297)

这里给出了用单调性来证明不等式的许多习题. 实际上前面的习题 1284 就是如此. 下面是证明不等式时的常用定理.

习题 1288 证明定理, 如果:

(1) 函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ n 阶可微;

(2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$;

(3) 当 $x>x_0$ 时有 $\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$,

那么当 $x>x_0$ 时不等式

$$\varphi(x)>\psi(x)$$

成立.

解 1 作辅助函数 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, $x\geqslant x_0$.

这时的条件 (3) 即是在 $x>x_0$ 时成立 $F^{(n)}(x)>0$, 因此就推出函数 F 的 $n-1$ 阶导函数 $F^{(n-1)}(x)$ 在 $x\geqslant x_0$ 时严格单调递增.

然后再利用条件 (2) 中的 $k=n-1$, 即 $F^{(n-1)}(x_0)=0$, 这样就得到在 $x>x_0$ 时的不等式 $F^{(n-1)}(x)>F^{(n-1)}(x_0)=0$.

继续如此做下去就得到 $x>x_0$ 时成立 $F(x)>0$, 即 $\varphi(x)>\psi(x)$. □

解 2 作辅助函数 $F(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, $x\geqslant x_0$. 这时的条件 (2) 是 $F^{(k)}(x_0)=0$ $(k=0,1,\cdots,n-1)$, 条件 (3) 是当 $x>x_0$ 时 $F^{(n)}(x)>0$.

在区间 $[x_0,x]$ 上对于函数 F 用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_1\in(x_0,x)$, 使得成立

$$F(x)=F(x)-F(x_0)=F'(\xi_1)(x-x_0),$$

然后在区间 $[x_0,\xi_1]$ 上对 F' 用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi_2\in(x_0,\xi_1)$, 同时利用上面的等式, 使得成立

$$\begin{aligned}F(x)&=[F'(\xi_1)-F'(x_0)](x-x_0)\\&=F''(\xi_2)(\xi_1-x_0)(x-x_0).\end{aligned}$$

如此继续下去, 就得到 $x_0<\xi_n<\cdots<\xi_2<\xi_1<x$, 使得成立

$$F(x)=F^{(n)}(\xi_n)(\xi_n-x_0)\cdots(\xi_2-x_0)(\xi_1-x_0)(x-x_0).$$

最后利用条件 (3) 即可推出 $F(x)>0$ $(x>x_0)$, 也就是所要求证的 $\varphi(x)>\psi(x)$ $(x>x_0)$. □

注 解 1 是直接利用单调性来证明. 实际上本节一开始列出的用导数来判定单调性的定理也可以由拉格朗日中值定理得到. 因此两个解法本质上相同.

下一题中含有 5 个小题, 我们只讨论其中的两个. 注意这些习题中的不等式本身也是微分学中的常用工具.

习题 1289(a) 证明不等式 $e^x > 1 + x \ (x \neq 0)$.

解 1 令 $F(x) = e^x - 1 - x$, 则有 $F(0) = 0$, $F'(x) = e^x - 1$. 在 $x > 0$ 时 $F'(x) > 0$, 而在 $x < 0$ 时 $F'(x) < 0$, 可见 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增, 而在 $(-\infty, 0]$ 上严格单调递减, 因此 $F(x) > F(0) = 0$ 对一切 $x \neq 0$ 成立. □

解 2 当 $x \neq 0$ 时在区间 $[0, x]$ (其中对 $x < 0$ 采取相同记法) 对 $e^x - 1 - x$ 用拉格朗日中值定理, 就有 $0 < \theta < 1$, 使得成立

$$e^x - 1 - x = (e^{\theta x} - 1) \cdot x,$$

可见无论 $x \neq 0$ 是正还是负, 右边都大于 0. □

注 回顾在 §1.2.9 中对于习题 75(b) 的初等证明及其附图, 可以看出有与没有微分学工具的差别.

习题 1289(e) (延森不等式) 证明不等式

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (x > 0, y > 0, 0 < \alpha < \beta).$$

解 1 利用不等式两边是 x, y 的齐次函数, 将右边记为 $A = (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, 除以两边, 就得到等价的不等式

$$\left[\left(\frac{x}{A}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{A}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} > 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{A}\right)^\alpha > 1.$$

右边的不等式只要利用 $x < A, y < A$ 和 $0 < \alpha < \beta$, 然后将下面的两个不等式

$$\left(\frac{x}{A}\right)^\alpha > \left(\frac{x}{A}\right)^\beta, \quad \left(\frac{y}{A}\right)^\alpha > \left(\frac{y}{A}\right)^\beta$$

相加即可得到. □

解 2 将 x, y 看成为参数, 将 α, β 看成为自变量的两个值, 于是只要证明函数

$$F(t) = (x^t + y^t)^{\frac{1}{t}} \quad (t > 0)$$

为严格单调递减函数即可.

用对数求导法得到

$$\begin{aligned} F'(t) &= F(t) \cdot \left(\frac{\ln(x^t + y^t)}{t}\right)_t' \\ &= F(t) \cdot \left(\frac{x^t \ln x + y^t \ln y}{t(x^t + y^t)} - \frac{\ln(x^t + y^t)}{t^2}\right) \\ &= F(t) \cdot \frac{1}{t^2(x^t + y^t)} \cdot \left[x^t \ln x^t + y^t \ln y^t - (x^t + y^t) \ln(x^t + y^t)\right], \end{aligned}$$

下面只要关心右边的方括号内的表达式的符号.

为观察方便起见, 记 $u = x^t, v = y^t$, 它们都是大于 0 的. 然后就可将它写成

$$\ln(u^u v^v) - \ln(u + v)^{u+v},$$

而 $u^u v^v \leqslant (u + v)^u (u + v)^v = (u + v)^{u+v}$ 显然成立, 因此这个表达式小于 0. 这样就证明了 $F'(t) < 0$, 即 $F(t)$ 是严格单调递减函数. □

注　本题的不等式可以推广到以下更为一般的形式:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

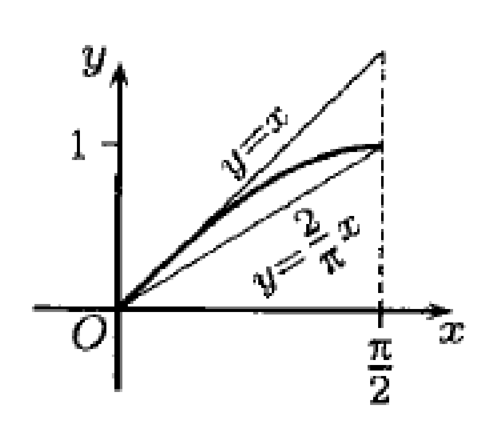
其中 $x_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$, $0 < \alpha < \beta$. $n = 2$ 的两个证明对这个一般情况也都有效.

下一个习题的结论很有用, 我们先作分析, 然后给出两个不同的解.

习题 1290 证明不等式 $\frac{2}{\pi} \cdot x < \sin x < x$, 其中 $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

分析　其中右边的不等式已在 §1.5.5 的命题 1.8(1) 的证明中提到, 也出现在 §2.7.1 的习题 1284 的讲解中. 左边的不等式常称为若尔当不等式, 有多种证明方法.

如附图 1 所示, 本题的两个不等式表明在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上的正弦曲线夹在 $y = x$ 和 $y = \frac{2}{\pi}x$ 的两条直线段之间, 从而提供了简单的线性估计.　□



习题 1290 的附图 1

解 1　将左边的不等式改写为 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, 然后在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上定义辅助函数

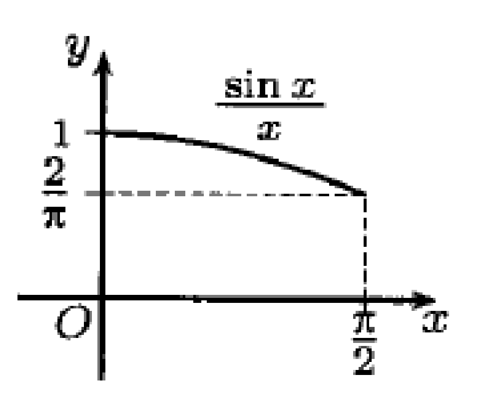
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

以下对 F 作单调性分析 (参见附图 2).

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上计算得到

$$F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2} \cdot (x - \tan x) < 0,$$

可见 $F(x)$ 是 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的严格单调递减函数, 因此在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上 $F(x) > F(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$.　□



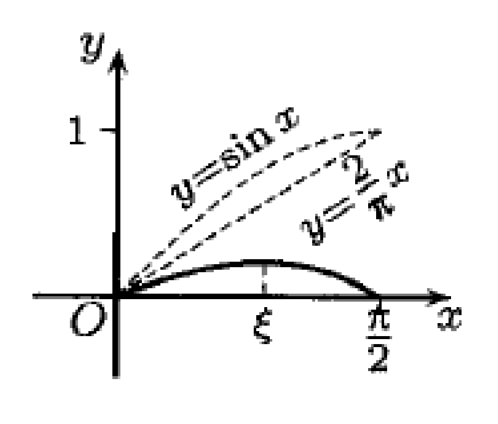
习题 1290 的附图 2

解 2　(参见附图 3) 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上作辅助函数

$$G(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x,$$

然后对 G 作单调性分析. 由于 $G(0) = G(\frac{\pi}{2}) = 0$, 它当然不是单调函数. 计算导数得到

$$G'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi},$$



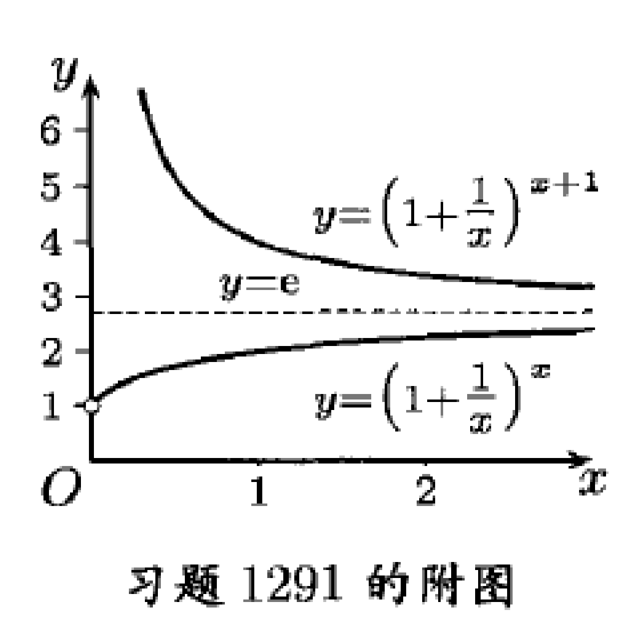
习题 1290 的附图 3

可见 G' 有唯一零点 $\xi = \arccos\frac{2}{\pi} \approx 0.8807$. 在 $[0, \xi)$ 上 $G'(x) > 0$, 于是 $G(x)$ 严格单调递增, 而在 $(\xi, \frac{\pi}{2}]$ 上 $G'(x) < 0$, 于是 $G(x)$ 严格单调递减, 点 ξ 是 G 的极大值点. 再结合 $G(0) = G(\frac{\pi}{2}) = 0$ 就知道在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上 $G(x) > 0$.　□

注　解 2 是对于非单调函数作单调性分析的典型例子. 这种情况在不等式证明中也是常见的.

习题 1291 证明, 当 $x>0$ 时有不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$



习题 1291 的附图

分析 在前面的习题 1280 中已经证明了上式左边的函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增. 又已知当 $x\to+\infty$ 时该函数的极限为 e, 因此左边的不等式成立. 用相同的方法可以证明右边的不等式成立, 留给读者完成. 若取 $x=n$ 为正整数, 则就是 §1.2.3 中的习题 69 (参见附图). □

习题 1292 设等差数列和等比数列的项数、首项与末项对应相等, 且各项均为正数. 证明, 等差数列的各项之和大于或等于等比数列的各项之和.

解 设项数为 $n+1$, n 为正整数. 记等差数列为 $x_0,x_1,\cdots,x_n$, 等比数列为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$, 设首项为 a, 末项为 b, 即有 $x_0=y_0=a$, $x_n=y_n=b$. 若 $a=b$ 或者 $n=1$, 则等差数列之和与等比数列之和相等. 以下讨论 $a\neq b$ 且 $n>1$ 的情况.

不妨假设 $a<b$, 否则可以将数列的顺序颠倒, 首项改为末项, 末项改为首项, 而两个数列的和不变.

于是可计算出等差数列和等比数列的各项分别为

$$x_0=a,\quad x_1=a+\frac{b-a}{n},\quad x_2=a+2\cdot\frac{b-a}{n},\quad\cdots,\quad x_n=a+n\cdot\frac{b-a}{n}=b,$$

$$y_0=a,\quad y_1=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\quad y_2=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n}},\quad\cdots,\quad y_n=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n}}=b.$$

以下可以证明除了首末两项之外, 其他对应项都有 $x_i>y_i$, $i=1,\cdots,n-1$. 于是在 $a\neq b$ 和项数 $n+1>2$ 的情况, 等差数列之和一定严格大于等比数列之和.

在 $0<i<n$ 时要证明的不等式是

$$x_i=a+i\cdot\frac{b-a}{n}>y_i=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}},$$

两边除以 a 并整理成为

$$1+\frac{i}{n}\left(\frac{b}{a}-1\right)>\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}},$$

再令 $x=\dfrac{b}{a}-1$, 可见只需要证明当 $0<\alpha<1$ 时, 对于 $x>-1$ 成立不等式①

$$1+\alpha x\geqslant(1+x)^\alpha,\tag{2.8}$$

其中仅当 $x=0$ 时成立等号.

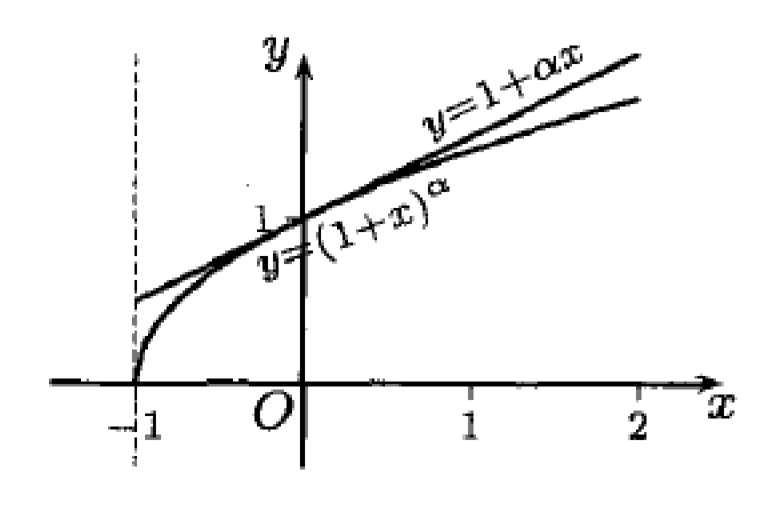
这里的不等式 (2.8) 是连续变量且指数 $\alpha\in(0,1)$ 的伯努利不等式.

① 在 §1.1.1 的习题 7 已经见到离散情况的伯努利不等式 $(1+x)^n\geqslant1+nx$, 其中 $x>-1$, 指数 n 为正整数. 除了 (2.8) 之外, 还有指数 $\alpha<0$ 和 $\alpha>1$ 时的连续变量的伯努利不等式

$$(1+x)^\alpha\geqslant1+\alpha x\quad(x>-1),$$

其中仅当 $x=0$ 时成立等号. 它们的证明和 (2.8) 的证明是类似的.

在右边的附图中作出了直线 $y=1+\alpha x$ 和曲线 $y=(1+x)^\alpha$, 其中取 $\alpha=0.5$.



习题 1292 的附图

作辅助函数

$$F(x)=1+\alpha x-(1+x)^\alpha,$$

则有 $F(0)=0$. 求导得到

$$F'(x)=\alpha-\alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

则有 $F'(0)=0$. 再次求导得到

$$F''(x)=-\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

可见在 $0<\alpha<1$ 和 $x>-1$ 时始终有 $F''(x)>0$. 由此反推可见一阶导函数 $F'(x)$ 在 $x>-1$ 时严格单调递增. 由于 $F'(0)=0$, 可知在 $x>0$ 时 $F'(x)>F'(0)=0$, 而在 $-1<x<0$ 时 $F'(x)<F'(0)=0$. 由此可见函数 $F(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 时严格单调递增, 而在 $-1<x\leqslant 0$ 时严格单调递减. 利用 $F(0)=0$, 即可知不等式 (2.8) 成立, 且仅当 $x=0$ 时成立等号. □

习题 1293 由不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k x+b_k)^2\geqslant 0,$$

其中 x, a_k, b_k $(k=1,\cdots,n)$ 为实数, 证明柯西不等式

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k b_k\Big)^2\leqslant \sum_{k=1}^n a_k^2\sum_{k=1}^n b_k^2.$$

解 1 将给定的不等式左边展开, 得到关于变量 x 的二次三项式

$$x^2\sum_{k=1}^n a_k^2+2x\sum_{k=1}^n a_k b_k+\sum_{k=1}^n b_k^2\geqslant 0.$$

由于该二次三项式非负, 因此其判别式非正, 这就得到柯西不等式. □

解 2 这里给出柯西不等式的另一个证明. 将下列不等式

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_i b_j-a_j b_i)^2\geqslant 0$$

的左边展开并整理后即有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_i b_j-a_j b_i)^2&=\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{j=1}^n b_j^2-2\sum_{i=1}^n a_i b_i\sum_{j=1}^n a_j b_j+\sum_{i=1}^n b_i^2\sum_{j=1}^n a_j^2\\&=2\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2-2\Big(\sum_{i=1}^n a_i b_i\Big)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

然后将最后一式除以 2 并移项即得柯西不等式. □

注 柯西不等式是高等数学中最基本的不等式, 证明方法也很多. 上述第二个证明中所用的等式即所谓拉格朗日恒等式. 这些方法还可以用于证明积分形式或级数形式的柯西-施瓦茨不等式.

此外, 柯西不等式成立等号的充分必要条件是数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 成比例. 这就是说存在两个不全为 0 的常数 k 和 l, 使得对每个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 成立

$$ka_i + lb_i = 0.$$

这可以从前面的证明中推出.

习题 1294 证明, 正数的算术平均不大于这些数的平方平均, 即

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

解 1 对左边如下用柯西不等式就有:

$$x_1 \cdot \frac{1}{n} + \cdots + x_n \cdot \frac{1}{n} \leqslant \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n\text{ 项}}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

解 2 也可以如下用柯西不等式:

$$\frac{x_1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{ 项}}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

解 3 若将要证的不等式改写为等价的

$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

则容易看出还可以如下用柯西不等式:

$$(x_1 \cdot 1 + \cdots + x_n \cdot 1)^2 \leqslant (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \cdot n. \quad \square$$

解 4 如解 3 开始那样改写要求证的不等式之后, 用数学归纳法也很容易.

当 $n = 1$ 时成立等号.

设 $n = k$ 时该不等式已成立, 则当 $n = k + 1$ 时就有

$$\begin{aligned}(x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1})^2 &= (x_1 + \cdots + x_k)^2 + 2(x_1 + \cdots + x_k)x_{k+1} + x_{k+1}^2 \\ &\leqslant k(x_1^2 + \cdots + x_k^2) + (x_1^2 + \cdots + x_k^2) + kx_{k+1}^2 + x_{k+1}^2 \\ &= (k+1)(x_1^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2),\end{aligned}$$

其中利用了中学数学的基本不等式 $2ab \leqslant a^2 + b^2$. $\square$

习题 1295 就是算术平均值–几何平均值不等式, 见本书 §1.1.6 补注小节中的命题 1.1 以及所引的专著 [1], 这里不再重复.

习题 1296 的解法较为复杂, 建议初学者先跳过它. 其讨论见 §2.7.3.

最后是新版中的一道题, 它含有三个小题, 这里只作简单分析.

习题 1297 证明不等式:

(1) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$, 其中 $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

(2) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, 其中 $n > 1$, $x > a > 0$;

(3) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$, 其中 $x > 0$.

分析　(1) 令 $t = x - 1$, 则不等式可以改写为

$$(1+t)^\alpha > 1 + \alpha t,$$

这时 $\alpha \geqslant 2$, $t > 0$. 回顾 (2.8) 及其注, 可见这就是伯努利不等式, 且在 $\alpha > 1$ 和 $t > -1$ 时就已成立. 其证明方法与 (2.8) 的证明类似.

(2) 若 n 为大于 1 的正整数, 则只要将左边的第二项移到右边后两边升高 n 次即可. 若 $n > 1$ 为一般实数, 则可以用拉格朗日中值定理等方法证明.

(3) 建议先作出 $y = 1 + 2\ln x$ 和 $y = x^2$ 的草图, 然后设计出解题的方法. □

2.7.3　补注 (习题 1296)

习题 1296 有一定的困难, 因此放在这里讨论.

习题 1296 由等式

$$\Delta_s(a,b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \quad (s \neq 0)$$

和

$$\Delta_0(a,b) = \lim_{s\to 0} \Delta_s(a,b)$$

定义的函数称为两个正数 a 和 b 的 s 阶平均.

特别地, 当 $s = -1$ 时得调和平均, 当 $s = 0$ 时得几何平均 (请证明), 当 $s = 1$ 时得算术平均, 当 $s = 2$ 时得平方平均.

证明:

(1) $\min\{a,b\} \leqslant \Delta_s(a,b) \leqslant \max\{a,b\}$;

(2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $\Delta_s(a,b)$ 是变量 s 的递增函数;

(3) $\lim\limits_{s\to-\infty} \Delta_s(a,b) = \min\{a,b\}$, $\lim\limits_{s\to+\infty} \Delta_s(a,b) = \max\{a,b\}$.

解　首先证明 $\Delta_0(a,b)$ 确实就是 a, b 的几何平均值.

将 $\Delta_s(a,b)$ 取对数后, 用等价量代换法求 $s \to 0$ 时的极限, 就有

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0} \ln \Delta_s(a,b) &= \lim_{s\to 0} \frac{\ln \dfrac{a^s + b^s}{2}}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{(a^s-1)+(b^s-1)}{2}\right)}{\dfrac{(a^s-1)+(b^s-1)}{2}} \cdot \frac{\dfrac{(a^s-1)+(b^s-1)}{2}}{s} \\
&= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b),
\end{aligned}$$

可见 $\Delta_0(a,b)=\sqrt{ab}$. (在以上计算中利用了 §1.5.5 中的 (1.35),(1.36).)

(1) 对 $s=0$, 从上述结果即可得到 $\min\{a,b\}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\max\{a,b\}$.

对 $s>0$, 将两个不等式

$$\min\{a,b\}\leqslant a\leqslant\max\{a,b\},$$

$$\min\{a,b\}\leqslant b\leqslant\max\{a,b\}$$

升高幂次 s, 相加除以 2, 再开 s 次根即可得到.

可以看到, 这里利用了幂函数 x^s 和 $x^{\frac{1}{s}}$ 在 $s>0$ 时都是递增函数, 因此在两次运算中保持了不等式方向不变.

对于 $s<0$, 至少有两个方法.

第一个方法是利用 $s>0$ 已经证明的结论. 令 $r=-s>0$, 然后对于 $a'=\dfrac{1}{a}$ 和 $b'=\dfrac{1}{b}$ 写出 $r>0$ 时已有的不等式 $\min\{a',b'\}\leqslant\Delta_r(a',b')\leqslant\max\{a',b'\}$. 可以发现这就是对 $s<0$ 所要的不等式.

第二个方法是利用 $s>0$ 时的证明方法. 为此利用幂函数 x^s 和 $x^{\frac{1}{s}}$ 在 $s<0$ 时都是递减函数即可. 这时在升高 s 幂次和开 s 次根时都使得不等式方向相反, 而两次的总效果还是保持了原有的不等式方向不变.

(2) 用对数求导法得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Delta_s(a,b)&=\Delta_s(a,b)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\ln[(a^s+b^s)/2]}{s}\right)\\&=\Delta_s(a,b)\cdot\frac{s\cdot\dfrac{2}{a^s+b^s}\cdot\dfrac{a^s\ln a+b^s\ln b}{2}-\ln\dfrac{a^s+b^s}{2}}{s^2}\\&=\Delta_s(a,b)\cdot\frac{1}{s^2(a^s+b^s)}\cdot\left[a^s\ln a^s+b^s\ln b^s-(a^s+b^s)\ln\frac{a^s+b^s}{2}\right],\end{aligned}$$

于是只要证明当 $a\neq b$ 时最后一式的方括号内的表达式大于 0.

引入 $u=a^s$, $v=b^s$, 则 u,v 是两个不相等的正数. 不妨设 $0<v<u$, 则上述表达式可记为

$$L=u\ln u+v\ln v-(u+v)\ln\frac{u+v}{2}. \tag{2.9}$$

定义辅助函数

$$F(x)=x\ln x,$$

并将 (2.9) 改写如下[1]:

$$L=[u\ln u-\frac{u+v}{2}\ln\frac{u+v}{2}]-[\frac{u+v}{2}\ln\frac{u+v}{2}-v\ln v],$$

---

[1] 这时 (2.9) 就是

$$L=(F(u)+F(v))-2F(\frac{u+v}{2}).$$

对于已经学过下一节的凹凸性知识的读者来说, 为了证明 $L>0$ 只要证明函数 F 为严格凸即可. 为此计算得到在 $x>0$ 时的

$$F''(x)=(\ln x+1)'=\frac{1}{x}>0$$

就解决了问题. 在正文中的证明也是根据凸性知识写出的.

然后对于两个方括号内的表达式分别用拉格朗日中值定理, 并利用 $F'(x) = \ln x + 1$, 就得到 ξ, η, 满足

$$v < \eta < \frac{u+v}{2} < \xi < u,$$

且有

$$L = (\ln \xi + 1) \cdot \frac{u-v}{2} - (\ln \eta + 1) \cdot \frac{u-v}{2} = (\ln \xi - \ln \eta) \cdot \frac{u-v}{2} > 0.$$

综合以上就知道 $\Delta_s(a,b)$ 在 $a \neq b$ 时是关于 $s > 0$ 的严格单调递增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$, 则就有

$$\lim_{s \to -\infty} \Delta_s(a,b) = \lim_{s \to -\infty} a\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^s\right]^{\frac{1}{s}} = a,$$

其中利用了 $0 < a < b$, 因此当 $s \to -\infty$ 时 $\left(\frac{b}{a}\right)^s \to 0$.

同样有

$$\lim_{s \to +\infty} \Delta_s(a,b) = \lim_{s \to +\infty} b\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^s\right]^{\frac{1}{s}} = b,$$

其中利用了 $0 < a < b$, 因此当 $s \to +\infty$ 时 $\left(\frac{a}{b}\right)^s \to 0$. □

注 1 本题引入的 $\Delta_s(a,b)$ 还可以推广为 n 个正数的 s 阶平均, 以及加权的 s 阶平均, 它们都具有类似的性质. 见 [23] 的 §8.5.3 的练习题 8.

注 2 从证明的方法来说, 本题中最为困难的部分 (2) 可用赫尔德不等式[①] 给出一个简短的证明. 这里作一点介绍.

设 $0 < \beta < 1$, a_i, b_i $(i = 1, \cdots, n)$ 都是正数, 则赫尔德不等式的一种形式是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\beta} b_i^{1-\beta} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\beta} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i\Big)^{1-\beta},$$

其中成立等号的条件与柯西不等式相同. (在 $\beta = \frac{1}{2}$ 时赫尔德不等式就是柯西不等式.)

现设 $0 < t < s$, 且 $a \neq b$, 我们来证明 $\Delta_t(a,b) < \Delta_s(a,b)$.

记 $t = \beta s$, 则 $0 < \beta < 1$. 然后用赫尔德不等式推导如下:

$$\begin{aligned}
\frac{a^t + b^t}{2} &= \frac{1}{2}a^{\beta s} + \frac{1}{2}b^{\beta s} \\
&= \Big(\frac{1}{2}a^s\Big)^{\beta}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1-\beta} + \Big(\frac{1}{2}b^s\Big)^{\beta}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1-\beta} \\
&< \Big(\frac{a^s + b^s}{2}\Big)^{\beta},
\end{aligned}$$

然后就得到所要的

$$\Delta_t(a,b) = \Big(\frac{a^t + b^t}{2}\Big)^{\frac{1}{t}} < \Big[\Big(\frac{a^s + b^s}{2}\Big)^{\beta}\Big]^{\frac{1}{t}} = \Delta_s(a,b).$$

① 即 §2.8.3 的命题 2.8.

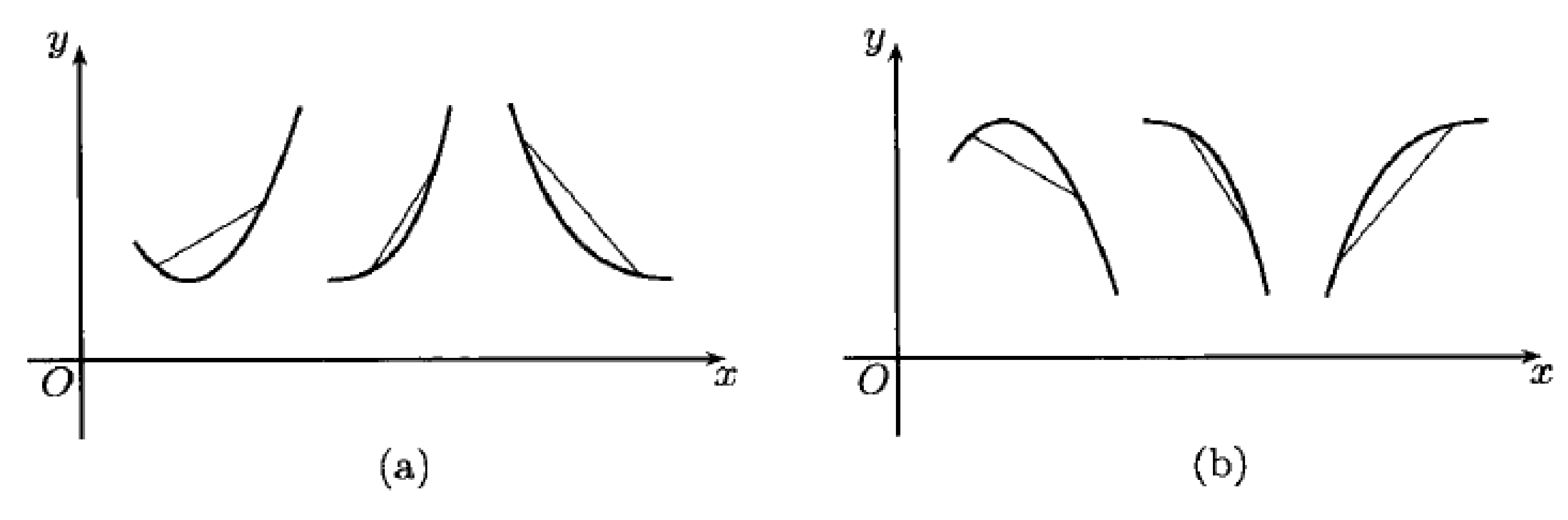
§2.8 凹凸性. 拐点 (习题 1298–1317)

内容简介 对于函数图像的凹凸性分析是在单调性分析之后的重要内容, 本节包含了一些具体函数的凹凸性分析, 也含有理论性的习题以及凹凸性在不等式证明中的应用.

多年以来在我国的数学分析教材中, 凹凸性的术语使用较为混乱, 因此需要先讲一下这方面的概况, 以及在本书中的用语.

如下面的示意图所示, 在分图 (a) 中作出了三个函数的图像, 它们具有一个共同点, 即连接曲线上任意两点所得到的弦都在以这两点为端点的曲线段的上方. 今后称这类函数为凸函数. 在英语中就是 convex function.

另一方面, 在分图 (b) 中作出的三个函数的图像恰恰相反, 即连接曲线上任意两点所得到的弦都在以这两点为端点的曲线段的下方. 今后称这类函数为凹函数. 在英语中就是 concave function.



凸函数与凹函数的示意图

现在将上述直观说法写成严格的数学定义如下:

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 且对任意两点 $x_1, x_2 \in I$ 和任意数 $\lambda \in (0,1)$ 满足不等式

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant (\geqslant)\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数 (凹函数). 如果在上述不等式中始终成立严格的不等号 $<$ $(>)$, 则称 $f(x)$ 是区间 I 上的严格凸函数 (严格凹函数).

在定义中的 λ 从 0 递增到 1 时, 点 $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ 就从 x_2 递减到 x_1.

容易看出, 若 f 为凸函数 (凹函数), 则 $-f$ 就是凹函数 (凸函数). 从而在研究许多性质时经常只对凸函数来叙述和证明.

在数学分析的各种教材和用书中对于凸函数和凹函数另有几种不同名称:

(1) 称凸函数为下凸函数, 称凹函数为上凸函数;

(2) 称凸函数为上凹函数, 称凹函数为下凹函数;

(3) 从汉语中的凹凸字的象形意义出发将示意图中分图 (a) 的函数称为凹函数, 将分图 (b) 中的函数称为凸函数. 这与国际上的凸函数和凹函数的含义恰好相反.

从目前的趋势来看, 为了便于和国际接轨, 将示意图分图 (a) 中的函数称为凸函数, 将分图 (b) 中的函数称为凹函数, 这样的做法在文献中日趋普遍. 这也与全国科学技术名词审定委员会于 1993 年审定的数学名词标准一致. 目前在以 [6, 26] 为代表的俄罗斯数学分析著作中关于凹凸性的名词与英语也是一致的.

关于凸函数和凹函数的详细内容可以看数学分析教科书, 这里只指出以下几点:

(1) 对于它们的研究可以在三个层次上进行, 即不附加条件、一阶可微和二阶可微三种情况.

(2) 示意图中画出的就是严格凸函数和严格凹函数, 即所有弦与对应的曲线段只在端点处相遇, 而在其他点处都不同,

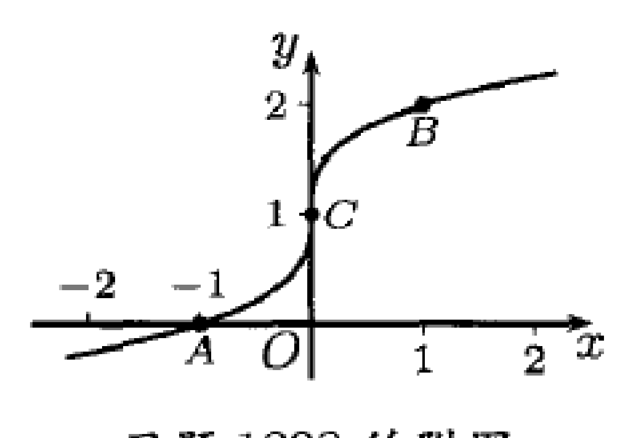
(3) 凸函数与凹函数可以有不可微点. 例如 $y=|x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$ 就是如此. 这个函数在任何区间上都是凸函数, 当然不是严格凸函数.

(4) 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的两侧分别为严格凸函数和严格凹函数, 则称点 $(x_0,f(x_0))$ 为 $y=f(x)$ 的图像的拐点.

(5) 在二阶可微条件下, 保证严格凸和严格凹的最方便的充分条件是 $f''(x)>0$ 和 $f''(x)<0$. (这将在 §2.8.2 的习题 1312 中作出证明.)

2.8.1 凹凸性分析 (习题 1298–1310, 1313)

习题 1298 研究曲线 $y=1+\sqrt[3]{x}$ 在点 $A(-1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$ 处的凹凸性.



习题 1298 的附图

解 曲线在某点处为凸或凹指其在该点的一个邻域中凸或凹. 在 $y''(x)$ 连续时只要看它在该点处的符号即可.

因 $y(x)$ 为二阶可微, 直接计算得到

$$y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}},$$

即有 $y''(-1)=\frac{2}{9}>0$, $y''(1)=-\frac{2}{9}<0$, 故在点 $A(-1,0)$ 处曲线为凸, 而在点 $B(1,2)$ 处曲线为凹 (见附图).

然而在 $x=0$ 处 $y(x)$ 的一阶 (广义) 导数为 $+\infty$, 因此不存在二阶导数. 由于在 $x>0$ 和 $x<0$ 时 $y(x)$ 分别为凹函数和凸函数, 因此在点 $C(0,1)$ 的两侧, 曲线的凹凸性相反, 从而知道点 C 为拐点 (见附图). □

注 在这里将判定拐点的条件与判定极值点的条件作一个比较是有益的①.

(1) f 于点 x_0 可微, 且达到极值, 则 $f'(x_0)=0$ (即著名的费马定理).

(1)′ f 于点 x_0 处二阶可微, 其图像以点 $(x_0,f(x_0))$ 为拐点, 则 $f''(x_0)=0$.

(这可以证明如下: 这时 $f'(x)$ 在点 x_0 的一个邻域内存在, 由于在点 x_0 两侧 f 的图像分别为严格凹和凸, 因此 $f'(x)$ 在点 x_0 的两侧邻近分别为严格单调函数, 且具有相反的单调性. 这表明 x_0 是 $f'(x)$ 的极值点, 从而用费马定理就知道 $f''(x_0)=0$.)

① 在多数教科书中一般总是先讲极值再讲拐点, 而《习题集》中要到 §2.11 才有极值问题的习题. 以下比较时认为读者已经具有极值方面的基本知识, 否则可在以后再阅读这里的比较.

(2) f 于点 x_0 处有 $f'(x_0)=0$, 这不能保证 f 在该点处达到极值.

(2)′ f 于点 x_0 处有 $f''(x_0)=0$, 这不能保证 f 的图像以点 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

(只要举一个例子. 例如 $y=x^4$, 从 $y''=12x^2$ 可知 $y(x)$ 为凸函数. 这时有 $y''(0)=0$, 但 $(0,0)$ 不是图像的拐点.)

(3) 函数 f 的不可微点 x_0 有可能是极值点.

(3)′ 函数 f 的不二阶可微的点 x_0 对应的点 $(x_0, f(x_0))$ 有可能是拐点.

(习题 1298 的点 $C(0,1)$ 就是如此.)

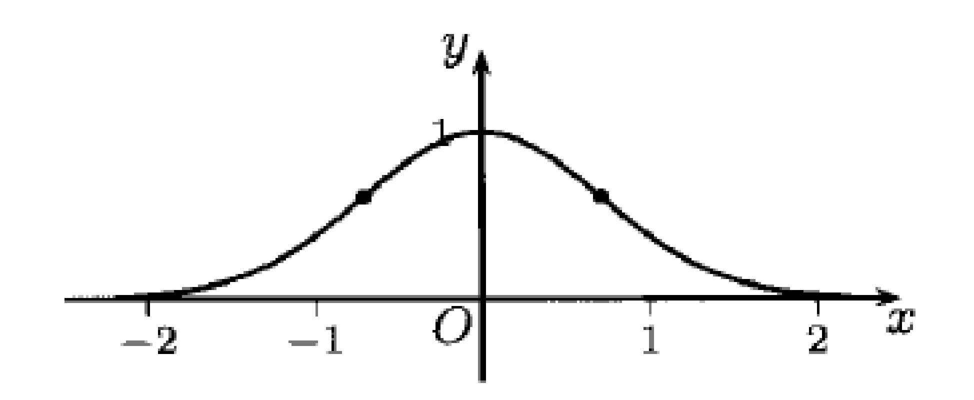
习题 1304 求函数 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 的图像的凹凸区间和拐点.

解 这是在概率论和统计学中的重要函数. 将 $y(x)$ 对 x 逐次求导得到

$$y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2},$$

$$y''=(-2+4x^2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

求出 $y''=0$ 的两个根, 并利用 y'' 的符号即可知有两个拐点 $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$. 有关凹凸性的信息列表如下:



习题 1304 的附图

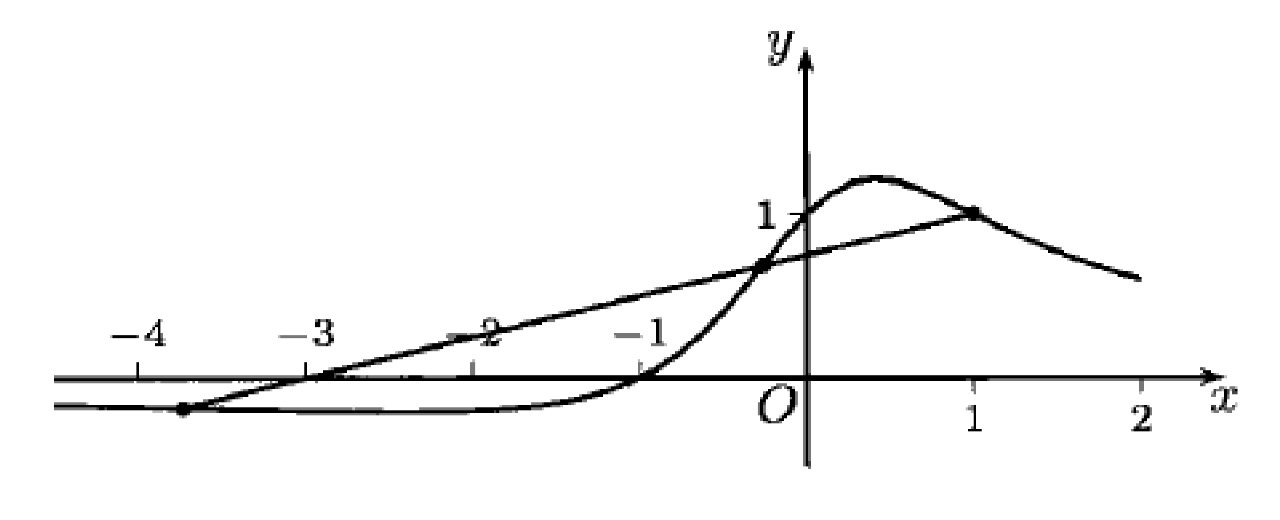
x	$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$
$y''(x)$	+	0	−	0	+
$y(x)$	严格凸	拐点	严格凹	拐点	严格凸

□

习题 1308 证明, 函数

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

在同一条直线上有三个拐点, 并作这个函数的图像.



习题 1308 的附图

解 将 $y(x)$ 对 x 逐次求导得到

$$y'(x)=\frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2},$$

$$y''(x)=\frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

然后从 $x^3+3x^2-3x-1=0$ 即可解出三个根为 $-2\pm\sqrt{3}, 1$.

从 $y''(x)$ 的符号变化可知它们对应于三个拐点:

$$(-2-\sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{3}}{4}),\ (-2+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{3}}{4}),\ (1,1).$$

将确定拐点的三次代数方程 $x^3+3x^2-3x-1=0$ 改写如下:

$$x^3+3x^2-3x-1=(x^2+1)(x+3)-4(x+1)=0,$$

再除以 x^2+1, 就得到

$$x+3-4\cdot\frac{x+1}{x^2+1}=x+3-4y=0,$$

可知三个拐点都在直线 $x+3-4y=0$ 上 (见附图). □

注 此题可以推广: 如果函数

$$y=\frac{ax^2+2bx+c}{\alpha x^2+2\beta x+\gamma}\ \ (\alpha\neq 0)$$

有三个拐点①, 则它们必在一条直线上 (见 [23] 第八章第二组参考题 7).

习题 1310 研究摆线

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ \ (a>0)$$

的凹凸性.

解 由于摆线的各个拱都可以从 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 时的一拱在 x 方向平移 2π 的整数倍得到, 因此只要讨论这一个拱的凹凸性 (参见 §2.3 的习题 1079 的附图).

按照参数方程求导法则得到

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\frac{t}{2},$$

$$y''_x=\frac{[y'_x]'_t}{x'_t}=\frac{-\csc^2\dfrac{t}{2}}{2a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}},$$

可见在 $t\in(0,2\pi)$ 时二阶导数处处小于 0, 因此摆线的每一拱是严格凹的曲线. □

2.8.2 与凹凸性有关的一些证明题 (习题 1311–1312, 1314–1317)

这类习题的一个共同特点是它们的条件和结论往往具有强烈的几何意义, 从而提示了有用的思路.

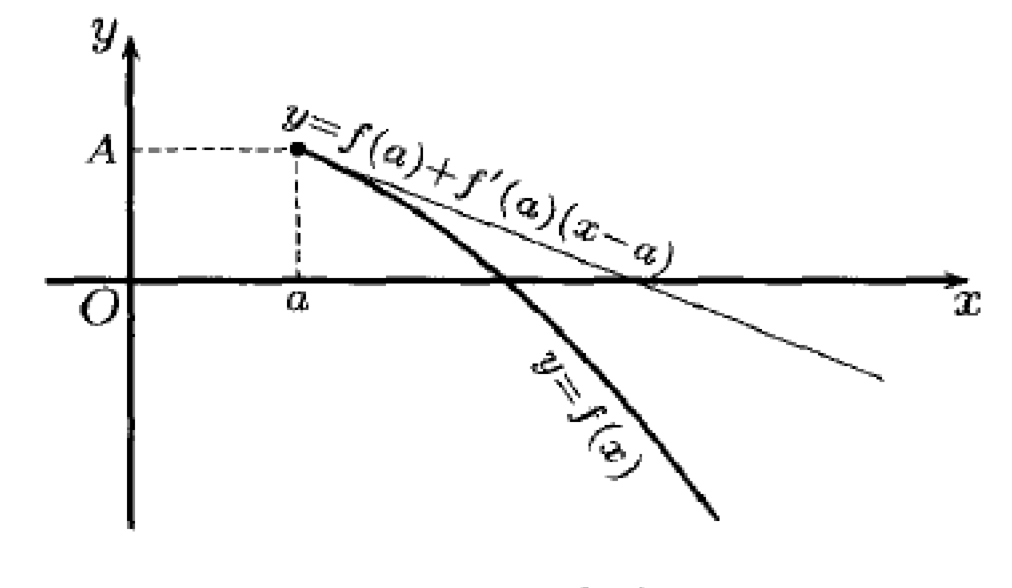
习题 1311 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上二次可微, 并且

(1) $f(a)=A>0$;

(2) $f'(a)<0$;

(3) $f''(x)\leqslant 0$, 其中 $x>a$.

证明, 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有一个且只有一个实根.



习题 1311 的附图

解 如附图所示, $y=f(x)$ 的图像是凹的, 它处于该图像在点 $(a,f(a))$ 的切线的下方, 从而与 x 轴有唯一的交点. 以下的证明的每一步都可以在几何上得到解释.

从条件 $f''(x)\leqslant 0$ 于 $x>a$ 上处处成立可知一阶导函数 $f'(x)$ 单调递减, 因此 $f'(x)\leqslant f'(a)<0$. 这保证了 f 在 $[a,+\infty)$ 上严格单调递减.

① 如分母有实根则不会有三个拐点. 此外, 如 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ 只有两个拐点.

设 $x > a$, 在区间 $[a, x]$ 上对于 f 用拉格朗日中值定理, 就有 $\xi \in (a, x)$, 使得成立

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a) \leqslant f'(a)(x-a),$$

由于 $f'(a) < 0$, 因此当 x 充分大时, 就有 $f(x) < 0$.

由于 $f(a) > 0$, 因此用零点存在定理就知道 $f(x)$ 有零点.

若 $f(x)$ 有一个以上的零点, 则从罗尔定理就会得到 $f'(x)$ 的零点, 这与 $x \geqslant a$ 时始终有 $f'(x) < 0$ 相矛盾. □

习题 1312 如果函数 $f(x)$ 对区间 (a, b) 内的任意两个点 x_1 和 x_2, 以及任意数 λ_1 和 λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 有不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(或者有相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$), 那么称函数 $f(x)$ 在这个区间内是严格凸的 (严格凹的).

证明: (1) 如果函数 $f(x)$ 在 $a < x < b$ 上 $f''(x) > 0$, 那么它在区间 (a, b) 内是严格凸的; (2) 如果函数 $f(x)$ 在 $a < x < b$ 上 $f''(x) < 0$, 那么它在区间 (a, b) 内是严格凹的.

解 (1) 不妨设 $a < x_2 < x_1 < b$, 则有 $x_2 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < x_1$. 如下分拆并用拉格朗日中值定理即可得到

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\\
&\quad = \lambda_1[f(x_1) - f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] - \lambda_2[f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f(x_2)]\\
&\quad = \lambda_1[x_1 - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)]f'(\xi_1) - \lambda_2[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_2]f'(\xi_2)\\
&\quad = \lambda_1\lambda_2(x_1 - x_2)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)] > 0,
\end{aligned}$$

其中

$$x_2 < \xi_2 < \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 < \xi_1 < x_1.$$

由于 $f''(x) > 0$ 因此 $f'(x)$ 在 (a, b) 上严格单调递增, 从而 $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$.

对于 (2) 的证明可类似进行, 或者对 $-f(x)$ 用 (1). □

习题 1315 证明, 在开区间 (a, b) 上的凸函数处处连续, 并且有单侧左导数和单侧右导数.

注 从本题下面的证明中可见, 《习题集》中对此题的凸函数所加的有界性条件是不必要的. 此外, 在含有端点的区间 (即有界闭区间和半开半闭区间) 上的凸函数可以在端点处不连续, 例如在 $[0, 1]$ 上的下列函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, 1, \\ 0, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

是凸函数, 但在端点 $x = 0, 1$ 处均不连续. 因此我们修改了原题.

从下面的证明还可以看出, 对于含有端点的区间, 例如 $[a, b]$, 在端点处的 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 都有意义, 但可以是无穷大. 例如几何上为单位半圆弧的下列凸函数

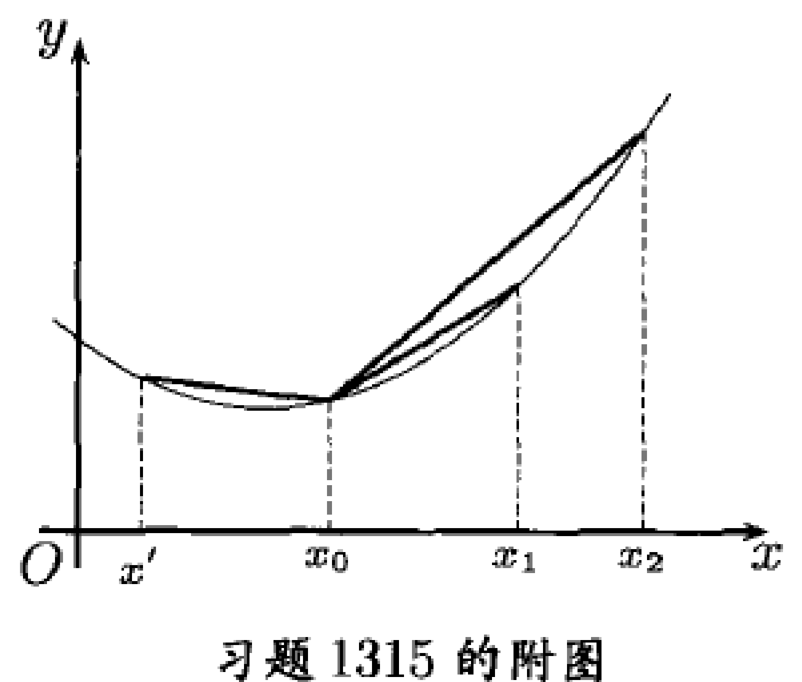
$$f(x) = -\sqrt{1-x^2},$$

就有 $f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$.

解 任意取点 $x_0 \in (a,b)$, 我们来证明在该点的右侧导数存在. 为此从定义出发直接研究右差商

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ (a < x_0 < x < b).$$

以下的证明完全是按照附图中的几何提示来进行的.



习题 1315 的附图

如附图所示, 在点 x_0 右侧任取 x_1, x_2, 使得 $x_0 < x_1 < x_2$, 我们将要证明在 f 为凸函数的条件下, 成立

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}, \tag{2.10}$$

于是当 x 从 x_0 右侧单调递减趋于 x_0 时, 对应的差商单调递减, 因此极限

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

有意义.

为了在 $x_0 < x_1 < x_2$ 上利用凸性条件, 先将中间的点 x_1 写为

$$x_1 = \lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_2,$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}, \quad \lambda_2 = \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0},$$

满足 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ 和 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

于是凸性条件为

$$f(x_1) \leqslant \frac{x_2-x_1}{x_2-x_0} \cdot f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0} \cdot f(x_2).$$

以下只要将右边的第一项的分子 $x_2 - x_1$ 分拆为 $x_2 - x_0 - (x_1 - x_0)$, 就有

$$\begin{aligned} f(x_1) &\leqslant \frac{x_2-x_0-(x_1-x_0)}{x_2-x_0} \cdot f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0} \cdot f(x_2) \\ &= f(x_0) + \frac{x_1-x_0}{x_2-x_0} \cdot [f(x_2)-f(x_0)], \end{aligned}$$

然后将右边的第一项移到左边, 两边同除以 $x_1 - x_0$, 这样就得到所要求证的 (2.10).

为了证明右侧导数 $f'_+(x_0)$ 不仅有意义, 而且是有限数, 如附图所示, 在点 x_0 的左侧取点 x'.

下面证明当 $x > x_0$ 时的右侧差商一定大于等于点 x', x_0 对应的差商. 不妨取 $x = x_1 > x_0$, 则就是要证明不等式

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geqslant \frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}. \tag{2.11}$$

与前面证明 (2.10) 的方法相同, 对于点 $x' < x_0 < x_1$ 将中间的点 x_0 写成为

$$x_0 = \frac{x_1-x_0}{x_1-x'} \cdot x' + \frac{x_0-x'}{x_1-x'} \cdot x_1,$$

然后对 $x' < x_0 < x_1$ 用凸性条件得到

$$f(x_0) \leqslant \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x'} \cdot f(x') + \frac{x_0 - x'}{x_1 - x'} \cdot f(x_1).$$

两边乘以 $x_1 - x'$, 然后将左边写为

$$(x_1 - x')f(x_0) = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_0 - x')f(x_0),$$

再加整理后就得出不等式 (2.11).

如前所说, 不等式 (2.10) 和 (2.11) 保证了点 x_0 处存在有限的右侧导数. 用相同的方法可以证明点 x_0 处也存在有限的左侧导数.

与可导保证连续一样, 从两个单侧导数的存在性即可推知 $f(x)$ 在点 x_0 两侧都连续, 因此 $f(x)$ 于点 x_0 连续. □

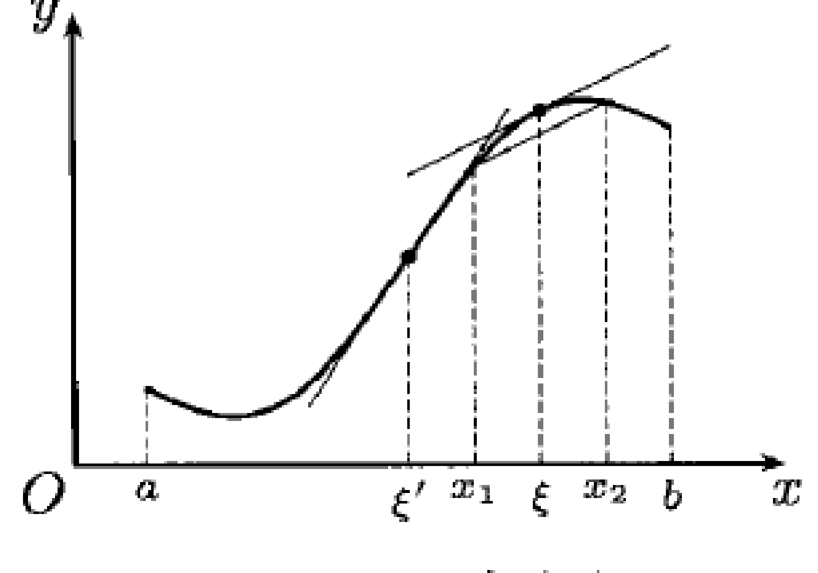
注 在 $x' < x_0 < x_1$ 时成立的不等式 (2.11) 中令 $x' \to x_0 - 0$, 又令 $x_1 \to x_0 + 0$, 则就得到在每个内点 x_0 处一定成立不等式

$$f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0).$$

特别, 其中成立等号是 f 在点 x_0 可微的充要条件.

习题 1316 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内二阶可微, 且在 $a < \xi < b$ 时 $f''(\xi) \neq 0$, 证明在区间 (a, b) 内可以找到两个点 x_1 和 x_2, 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$



习题 1316 的附图

解 作辅助函数

$$F(x) = f(x) - f'(\xi)\,x,$$

则 $F'(\xi) = 0$. 于是对 F 只要找出函数值相等的两个点就足够了.

由于 $F''(\xi) = f''(\xi) \neq 0$, 不妨设 $F''(\xi) > 0$, 则从 $F'(\xi) = 0$ 和

$$F''(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{F'(x) - F'(\xi)}{x - \xi} > 0$$

可见存在 $\delta > 0$, 使得在 $x \in (\xi, \xi + \delta)$ 时 $F'(x) > 0$, 而在 $x \in (\xi - \delta, \xi)$ 时 $F'(x) < 0$.

这表明 F 在点 ξ 左侧邻近为严格单调递减, 而在点 ξ 右侧邻近为严格单调递增, 于是点 ξ 是 F 的严格极小值点.

这样就保证 $F((\xi - \delta, \xi))$ 和 $F((\xi, \xi + \delta))$ 有非空交, 从而存在 $x_1 < \xi < x_2$, 使得 $F(x_1) = F(x_2)$. 写出

$$F(x_1) = f(x_1) - f'(\xi)\,x_1 = F(x_2) = f(x_2) - f'(\xi)\,x_2,$$

并再加整理就得到

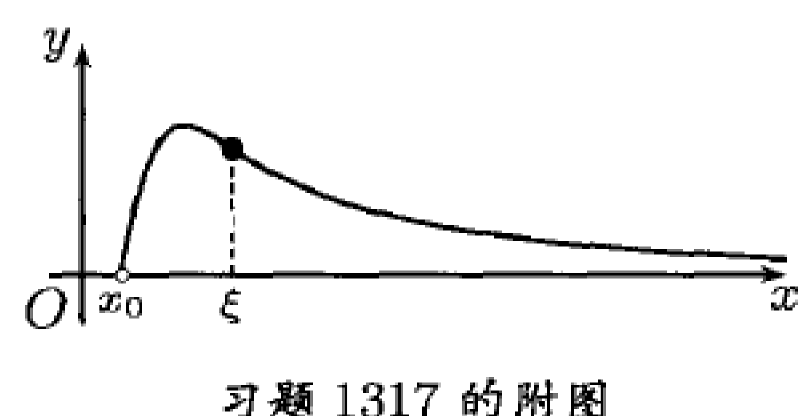
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi). \quad \square$$

注 本题与 §2.6.2 的习题 1250 一样, 都是从几何上讨论拉格朗日中值定理之逆是否成立. 如附图所示, 在 $f''(\xi) \neq 0$ 的每个点 ξ 处 (即只要不是拐点), 都能找到 x_1, x_2, 使得连接点 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(x_2, f(x_2))$ 的直线段与经过点 $(\xi, f(\xi))$ 的切线平行. 反之, 如附图中的点 ξ' 处的 $f''(\xi') = 0$, 这样的点 x_1, x_2 不一定存在.

习题 1317 证明, 如果函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0,+\infty)$ 上二阶可微, 且

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

那么在区间 $(x_0,+\infty)$ 内至少有一个点 ξ, 使得 $f''(\xi)=0$.



习题 1317 的附图

解 若 f 恒等于 0, 则 ξ 可任取. 否则用反证法. 设 f'' 在 $(x_0,+\infty)$ 内无零点, 则从达布定理 (见 §2.6.5 的命题 2.1) 可知 f'' 严格保号. 不妨只讨论成立 $f''(x)>0$ 的情况. 这时 f 是凸函数, 其导函数 $f'(x)$ 严格单调递增.

利用 §2.6.1 的习题 1237, 即罗尔定理的一个推广, 存在 $c\in(x_0,+\infty)$ 使得 $f'(c)=0$. 又由于 f' 严格单调递增, 因此存在 $d>c$, 使得 $f'(d)>0$.

对于 $x>d$, 在 $[d,x]$ 上对 f 用拉格朗日中值定理, 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得

$$f(x)-f(d)=f'(d+\theta(x-d))(x-d)\geqslant f'(d)(x-d),$$

令 $x\to+\infty$ 就与 $f(+\infty)=0$ 矛盾. □

注 若将本题的条件改为 $f(x_0+0)=f(+\infty)$, 或 f 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0)=f(+\infty)$, 结论仍然成立. 由此可见, 本题可解释为: 若二阶光滑的曲线与水平渐近线相交, 则有拐点[①]. 这对于一般的斜渐近线也成立. 实际上, 设有二阶可微函数 $f(x)$ 满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

且对某个点 x_0 有 $f(x_0)=kx_0+b$, 则 $g(x)=f(x)-kx-b$ 就满足本题的条件, 而且 $g''(x)=f''(x)$. 这些事实在几何作图中是很有用的 (参见附图以及在附录一和附录二中的许多此类图像).

2.8.3 补注

在这个小节中对于与凸函数有关的基本问题作一些补充.

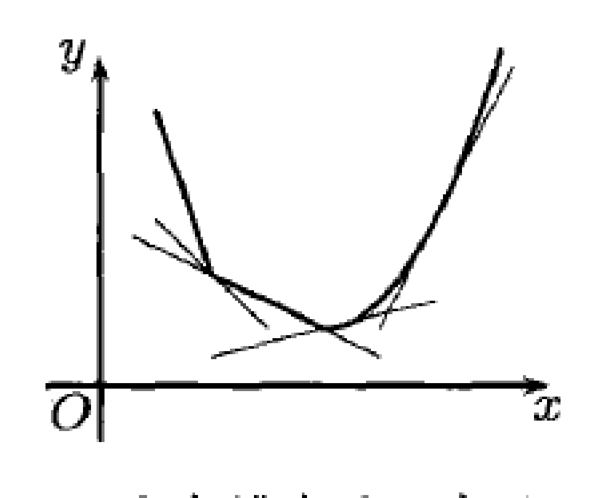
1. 关于凸函数的支撑线

定义 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义, 点 $x_0\in(a,b)$, k 为某个常数. 如果对所有 $x\in(a,b)$ 成立不等式

$$f(x)\geqslant(\leqslant)f(x_0)+k(x-x_0),$$

则称直线 $y=f(x_0)+k(x-x_0)$ 是 $f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的下方 (上方) 支撑线.

(从示意图可见, 在某些点处的支撑线只有一条, 而在另一些点处的支撑线则可有无穷多条.)



下方支撑线的示意图

下面将要证明处处存在支撑线是对凸函数和凹函数的一种充分必要的刻画方法. 为简明起见只对凸函数叙述和证明有关结论, 同时经常将下方支撑线简称为支撑线.

[①] 只能说经常如此, 但不一定有. 这是因为当 $f''(\xi)=0$ 时, 在点 ξ 的两侧, 函数 $f(x)$ 还可能出现非严格的凹凸性.

命题 2.3 在区间 (a,b) 上的函数 $f(x)$ 是凸函数的充分必要条件是函数 $f(x)$ 在其图像的每个点 $(x_0, f(x_0))$ $(x_0 \in (a,b))$ 处都存在下方支撑线.

证 以下分两步来证明.

充分性 用反证法. 设区间 (a,b) 上的函数 $f(x)$ 在每个点 $(x_0, f(x_0))$ $(x_0 \in (a,b))$ 处存在支撑线, 但 f 不是 (a,b) 上的凸函数.

根据凸函数的定义, 这时存在 $x_1, x_2 \in (a,b)$ $(x_1 < x_2)$, $\lambda \in (0,1)$, 使得成立

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \tag{2.12}$$

记 $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 根据假设条件存在常数 k, 使得对一切 $x \in (a,b)$ 满足支撑线定义中的不等式条件

$$f(x) \geqslant f(x_0) + k(x - x_0).$$

用 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 分别代入上式, 并分别乘以 λ 和 $1-\lambda$ 后相加, 就得到

$$\begin{aligned}\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) &\geqslant \lambda(f(x_0) + k(x_1 - x_0)) + (1-\lambda)(f(x_0) + k(x_2 - x_0)) \\ &= f(x_0) + k(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0) = f(x_0),\end{aligned}$$

即与不等式 (2.12) 相矛盾.

必要性 设 f 是 (a,b) 上的凸函数, 则对 $x_0 \in (a,b)$ 从 §2.8.2 的习题 1315 的证明过程知道, 当 $x > x_0$ 时有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'_+(x_0),$$

也就是

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0) \ \ (x > x_0).$$

而当 $x < x_0$ 时有

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant f'_-(x_0).$$

也就是

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0) \ \ (x < x_0).$$

根据习题 1315 的注有 $f'_-(x_0) \leqslant f'_+(x_0)$, 于是只要取常数 k 满足

$$f'_-(x_0) \leqslant k \leqslant f'_+(x_0),$$

则就在所有点 $x \in (a,b)$ 上成立

$$f(x) \geqslant f(x_0) + k(x - x_0),$$

因此已经证明了支撑线的存在性. □

注 1 容易看出, 如果 $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ 是凸函数 f 在点 $x_0 \in (a,b)$ 的支撑线, 则从

$$f(x) - f(x_0) \geqslant k(x - x_0) \ \ (x \in (a,b))$$

出发, 分别对 $x > x_0$ 和 $x < x_0$ 两种情况除以 $x - x_0$, 然后令 $x \to x_0$, 就可以得到 $f'_-(x_0) \leqslant k \leqslant f'_+(x_0)$. 这证明了凸函数的支撑线只能是满足这个条件的 k 确定的直线 $y = f(x_0) + k(x - x_0)$.

注 2 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上严格凸, $x_0 \in (a,b)$, $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ 是 $f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 的支撑线, 则当 $x \in (a,b)$ 且 $x \neq x_0$ 时, 成立严格的不等式

$$f(x) > f(x_0) + k(x - x_0).$$

为得到这个结论可以用反证法. 设在不等式

$$f(x) \geqslant f(x_0) + k(x - x_0)$$

中, 对于某个点 $x_1 \neq x_0$, 上述不等式成立等号, 则在区间 $[x_0, x_1]$ 上函数 $y = f(x)$ 和直线 $y = f(x_0) + k(x - x_0)$ 都经过点 $(x_0, f(x_0))$ 和点 $(x_1, f(x_1))$.

于是一方面从支撑线定义有 $f(x) \geqslant f(x_0) + k(x - x_0)$, 另一方面从凸函数定义又有 $f(x) \leqslant f(x_0) + k(x - x_0)$, 因此在区间 $[x_0, x_1]$ 上 f 只能恒等于线性函数 $f(x_0) + k(x - x_0)$. 这与 f 严格凸条件相矛盾.

2. 可微凸函数的刻画

先对于一阶可微函数给出两个等价条件. 实际上在本节的证明题中的思路都是这些条件所提供的. (关于可微严格凸函数的相应结论请读者考虑并给出证明.)

命题 2.4 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可微. $f(x)$ 为凸函数与以下两个条件等价:

(1) $f(x)$ 的图像总是在经过每一点 $(x_0, f(x_0))$ $(x_0 \in (a,b))$ 的切线 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ 的上方;

(2) 导函数 $f'(x)$ 单调递增.

证 由命题 2.3 再加上 f 可微就推出等价条件 (1).

从条件 (2) 推出 $f(x)$ 为凸函数的证明与前面 §2.8.2 的习题 1312(1) 的证明类似, 这里不再重复. 为了从 $f(x)$ 凸推出条件 (2), 则可回顾习题 1315 关于两个单侧导数存在性的证明. 实际上, 若 $a < x_1 < x_2 < b$, 则从该题的证明加上可微条件就可以推出不等式

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

从而 $f'(x)$ 在 (a,b) 上单调递增. □

关于二阶可微函数则有以下结论.

命题 2.5 (a,b) 上的二阶可微函数 $f(x)$ 为凸函数的充分必要条件是二阶导函数 $f''(x)$ 在 (a,b) 上非负.

证 利用二阶可微的条件下 $f''(x) \geqslant 0$ $(a < x < b)$ 与 $f'(x)$ 单调递增等价, 就可以从命题 2.4(2) 得到所要的结论. □

注 习题 1312(1) 给出了二阶可微函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为严格凸的充分条件. 可以证明, 条件 $f''(x) \geqslant 0$ 且在数集

$$S = \{x \in (a,b) \mid f''(x) = 0\}$$

中不含任何子区间就是 $f(x)$ 在 (a,b) 上严格凸的充分必要条件.

3. 延森不等式

凸函数也是证明不等式的常用工具, 其中延森不等式起重要作用.

命题 2.6 (延森不等式) 设 $f(x)$ 是在区间 (a,b) 上的凸函数, 则对 (a,b) 中的点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和正数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 且满足 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, 成立不等式

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n). \tag{2.13}$$

若 f 严格凸, 则上述不等式当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立等式①.

证 1 记 $\overline{x} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, 即 $x_1, \cdots, x_n$ 的加权平均值, 根据支撑线命题 2.3, 存在常数 k, 对于所有 $x \in (a,b)$, 成立

$$f(x) \geqslant f(\overline{x}) + k(x - \overline{x}).$$

在其中取 $x = x_i, i = 1, \cdots, n$, 然后分别乘以 λ_i 并从 $i = 1$ 加到 n, 就有

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) &\geqslant (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(f(\overline{x}) - k\overline{x}) + k(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \\ &= f(\overline{x}) - k\overline{x} + k\overline{x} = f(\overline{x}),\end{aligned}$$

这就是所求证的不等式 (2.13).

若 f 严格凸且上述不等式成立等号, 则只能是对每个 $i = 1, \cdots, n$ 成立等式

$$f(x_i) = f(\overline{x}) + k(x_i - \overline{x}).$$

从命题 2.3 的注 2 知道只能是 $x_i = \overline{x}\ \ (i = 1, \cdots, n)$. □

证 2 (数学归纳法证明) 对 $n = 2$, 只要令 $\lambda = \lambda_1$, 就有 $1 - \lambda = \lambda_2$. 于是延森不等式就是凸函数定义中的不等式条件.

现设 $n = k$ 时延森不等式已经成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1}) = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k-1} x_{k-1} + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) x_k')$$

(其中设 $x_k' = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} \cdot x_k + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} \cdot x_{k+1}$)

$$\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{k-1} f(x_{k-1}) + (\lambda_k + \lambda_{k+1}) f(x_k')$$

(再利用 $f(x_k') \leqslant \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} \cdot f(x_k) + \dfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k + \lambda_{k+1}} \cdot f(x_{k+1})$)

$$\leqslant \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{k+1} f(x_{k+1}).$$

在 f 严格凸时延森不等式成立等号的条件也可从上述证明得到, 从略. □

---

① 延森不等式的一种等价形式是: 代替总和为 1 的 n 个正数 $\lambda_i\ (i = 1, \cdots, n)$, 而用 n 个任意正数 $p_i\ (i = 1, \cdots, n)$, 这时不等式 (2.13) 采取以下形式:

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + \cdots + p_n}\right) \leqslant \frac{p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n)}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

它的含义是: 自变量的加权平均的函数值不超过函数值的加权平均.

4. 延森不等式的几个应用

由延森不等式可以推出许多不等式. 下面举几个重要例子, 并均列为命题.

命题 2.7 (广义算术平均值–几何平均值不等式) 设 $x_i \geqslant 0, \lambda_i > 0, i = 1, \cdots, n$, 且 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, 则成立不等式

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

其中等号成立的充分必要条件是 $x_1 = \cdots = x_n$.

证 若在 x_i 中有等于 0 的数, 则不等式左边等于 0, 因此已经成立. 同时可以看出, 这时的不等式成立等号只可能发生于 x_i 全等于 0 的情况.

现假设每个 $x_i > 0$. 取 $f(x) = -\ln x$, 则有 $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, 因此 f 是 $(0, +\infty)$ 上的严格凸函数. 用延森不等式, 就有

$$-\ln(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1(-\ln x_1) + \cdots + \lambda_n(-\ln x_n),$$

这就是

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geqslant \ln(x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n}),$$

这等价于广义平均值不等式. 其中成立等号的条件也可从延森不等式得到. □

注 令 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$, 就得到命题 1.1 的平均值不等式:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

其中成立等号的条件是 $x_1 = \cdots = x_n$.

广义平均值不等式有许多应用. 下面用它来导出分析中的重要不等式—— 赫尔德不等式. 在该不等式中令 $p = q = 2$ 就得到柯西不等式 (见 §2.7.2 的习题 1293).

命题 2.8 (赫尔德不等式) 设 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 为两组非负数, 参数 $p, q > 1$ 且满足等式 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则成立不等式

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.14}$$

其中成立等号的充分必要条件是 $x_1^p, \cdots, x_n^p$ 与 $y_1^q, \cdots, y_n^q$ 对应成比例, 即存在不全为 0 的常数 k 和 l, 使得等式 $kx_i^p + ly_i^q = 0$ 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 成立.

证 1 为简明起见只对于正数情况写出证明.

假设对于 $i = 1, \cdots, n$ 都成立 $x_i > 0, y_i > 0$.

这时先写出如下形式的广义平均值不等式 (即命题 2.7 之 $n = 2$):

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{x}{p} + \frac{y}{q},$$

其中 $x, y \geqslant 0$, p, q 满足命题中的条件. 此外, 不等式成立等号的充分必要条件是 $x = y$.

令 $u = x^{\frac{1}{p}}, v = y^{\frac{1}{q}}$, 就得到杨氏不等式

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}, \tag{2.15}$$

其中 $u, v \geqslant 0$. 此外, 不等式成立等号的充分必要条件是 $u^p = v^q$.

对于 $i = 1, \cdots, n$ 用

$$u_i = \frac{x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad v_i = \frac{y_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

代入 (2.15), 并将这样得到的 n 个不等式相加, 就得到

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leqslant 1,$$

然后两边乘以 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 就得到 (2.14). 同时又可以看出该不等式成立等号的充分必要条件是对每个 $i = 1, \cdots, n$, 成立 $u_i^p = v_i^q$, 因此比值 $x_i^p : y_i^q$ 与 i 无关. □

证 2 (用延森不等式)　用分析法写出主要过程.

将要求证的不等式 (2.14) 两边升高 p 次, 并利用 $\dfrac{p}{q} = p - 1$, 得到

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{p-1},$$

先将它改写为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^p \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{-p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{-1},$$

再将它改写为

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^q}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q} \cdot x_i y_i^{1-q}\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^q}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q} \cdot (x_i y_i^{1-q})^p,$$

就可以考虑令 $\lambda_i = \dfrac{y_i^q}{\sum_{k=1}^{n} y_k^q}$, $u_i = x_i y_i^{1-q}$, $i = 1, \cdots, n$, 并引入辅助函数 $f(u) = u^p$. 由于 $f''(u) = p(p-1)u^{p-2} > 0$, $f(u)$ 是凸函数, 因此用延森不等式即可. □

注　若 $0 < p < 1$, 而 q 仍满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则赫尔德不等式反向成立.

下面是分析中的另一个重要的不等式.

命题 2.9 (闵可夫斯基不等式) 设 $x_1, \cdots, x_n$ 和 $y_1, \cdots, y_n$ 为两组非负数, 参数 $p > 1$, 则成立不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.16}$$

其中成立等号的充分必要条件是 $x_1, \cdots, x_n$ 与 $y_1, \cdots, y_n$ 对应成比例, 即存在不全为 0 的常数 k 和 l, 使得等式 $kx_i + ly_i = 0$ 对每个 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 成立.

证 1 (用赫尔德不等式)　将 (2.16) 左边括号内的和式拆开为

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i+\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i,$$

然后对两个和式分别用赫尔德不等式, 就有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}x_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{p-1}y_i\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

其中的 q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 因此 $(p-1)q=p$.

将以上两个不等式相加, 得到

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\Big)^{\frac{1}{q}}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big],$$

最后将右边的第一个因子除到左边并利用 $1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$ 即可.

闵可夫斯基不等式成立等号的条件可从上述推导和赫尔德不等式推出, 从略. □

证 2 (**用延森不等式**) 只对于 $x_i,y_i>0\ (i=1,\cdots,n)$ 用分析法写出主要过程.

将 (2.16) 除以左边的表达式, 再将右边第一项移到左边, 并升高幂次 p, 就得到

$$\left[1-\Big(\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}\Big)^{\frac{1}{p}}\right]^p\leqslant\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}.$$

然后将左边表达式中的大圆括号内的表达式改写如下:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k+y_k)^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}\cdot\frac{x_k^p}{(x_k+y_k)^p},$$

令 $\lambda_k=\dfrac{(x_k+y_k)^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}$, $u_k=\dfrac{x_k^p}{(x_k+y_k)^p}$, $k=1,\cdots,n$, 则上式右边就是 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k$.

引入辅助函数 $g(u)=(1-u^{\frac{1}{p}})^p$, $0<u<1$. 从

$$g'(u)=-(1-u^{\frac{1}{p}})^{p-1}u^{\frac{1}{p}-1},$$

$$g''(u)=(1-\frac{1}{p})(1-u^{\frac{1}{p}})^{p-2}u^{\frac{1}{p}-2}>0,$$

可见 $g(u)$ 是凸函数, 因此可用延森不等式得到

$$g(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k u_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k g(u_k).$$

而右边的表达式可以计算出为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k+y_k)^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p}\Big(1-\frac{x_k}{x_k+y_k}\Big)^p=\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k^p}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p},$$

这样就完成了证明. □

注 $p=1$ 时闵可夫斯基不等式是平凡的. $p=2$ 时闵可夫斯基不等式就是 n 维欧几里得空间中的三角形不等式. 当 $0<p<1$ 时闵可夫斯基不等式反向成立.

§2.9 不定式极限 (习题 1318–1375)

内容简介 学习用微分学工具求函数极限的洛必达法则.

先对《习题集》中的洛必达法则作一点补充. 与 §1.2 的施托尔茨定理 (见 §1.2.7 的习题 143) 相同, 在对 $\frac{\infty}{\infty}$ 用洛必达法则时, 并不需要将分子为 ∞ 作为条件, 这对于扩大洛必达法则的应用范围是有好处的. 为区别起见, 将此种情况的不定式记为 $\frac{*}{\infty}$. 其证明见本节最后的 §2.9.4 的命题 2.10.

为读者方便起见, 改写《习题集》中的第二个洛必达法则如下.

$\frac{*}{\infty}$ 型不定式极限的洛必达法则 如果

(1) 函数 $g(x)$ 在 $x \to a$ 时趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$,

(2) 函数 $f(x), g(x)$ 在点 a 的某个去心邻域内可微; 且存在极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

其中 A 或为有限数, 或为 $\pm\infty$, 那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

注 极限 $x \to a$ 可以推广为 $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to \infty$ 等. 此外, 从极限 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的存在就已经隐含了函数 g 的导数 $g'(x)$ 至少在点 a 的某个去心邻域内不等于 0, 因此《习题集》中的条件 $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ 是必然满足的.

为了说明上述洛必达法则的应用, 我们举一个典型例子.

例题 设一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ay + g(x)$$

中的常数 $a < 0$, 函数 $g(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 上有定义, 且存在极限 $g(+\infty) = A$. 若函数 $f(x)$ $(x \geqslant 0)$ 是该方程在 $x \geqslant 0$ 时的解, 求 $y(+\infty)$.

解 由于 $y = f(x)$ 是方程在 $[0, +\infty)$ 上的解, 因此成立恒等式

$$f'(x) = af(x) + g(x).$$

将此等式两边乘以 e^{-ax} (即凑微分法), 就得到

$$\mathrm{e}^{-ax}f'(x) - a\mathrm{e}^{-ax}f(x) = (\mathrm{e}^{-ax}f(x))' = \mathrm{e}^{-ax}g(x).$$

利用 $a < 0$, 就有 $\mathrm{e}^{-ax} \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, 于是就可用洛必达法则计算如下

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}f(x)}{\mathrm{e}^{-ax}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\mathrm{e}^{-ax}f(x))'}{(\mathrm{e}^{-ax})'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}g(x)}{-a\mathrm{e}^{-ax}} = -\frac{1}{a}A.$$

特别当 $A = 0$ 时就有 $f(+\infty) = 0$. □

注 如上述解题过程所示, 由于对分子的 $\mathrm{e}^{-ax}f(x)$ 的性态不清楚, 因此在这个例题中不可能用关于 $\frac{\infty}{\infty}$ 的洛必达法则.

2.9.1 不定式计算 I (习题 1318–1338, 1358–1360, 1367, 1368(b))

这一部分的习题都是 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式. 下面所用的方法不局限于洛必达法则.

习题 1320 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$.

解 1 这是 $x\to 0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 不定式, 可接连用两次洛必达法则求解如下:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{1-\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^3 x} = 2.\quad \square\end{aligned}$$

解 2 也可用一次洛必达法则之后对所得的表达式直接处理求出答案:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x(1-\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 2.\quad \square\end{aligned}$$

习题 1323 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x - 1}{x^2}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x = 1$, 这是 $x\to 0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式.

若直接用洛必达法则计算如下:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cot x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cot x - x\csc^2 x}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(-\csc^2 x - \csc^2 x + 2x\csc^2 x\cot x)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x\cot x - 1}{\sin^2 x},\end{aligned}$$

再考虑到 $\sin^2 x\sim x^2\ (x\to 0)$, 则就发现仍然回到原地, 毫无进展.

一种改进方法是先改写原来的表达式并作等价量代换如下:

$$\frac{x\cot x - 1}{x^2} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2\sin x}\sim\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\quad (x\to 0),$$

然后再用洛必达法则计算如下:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}.\quad \square$$

习题 1324 求 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$.

解 这是 $x\to\dfrac{\pi}{4}$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式, 可用洛必达法则计算如下:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2\sin^2 x - 1} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{3}(\tan x)^{-\frac{2}{3}}\sec^2 x}{4\sin x\cos x} = \frac{1}{3}.\quad \square$$

注 这里要注意一开始是 $\dfrac{0}{0}$ 的不定式, 但用了洛必达法则之后已经不再是不定式, 因此用代入法就足够了.

习题 1326 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$.

解 这是 $x\to 0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 先用变量代换, 令 $t=x^2$, 则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}=\frac{1}{2}.\quad\square$$

注 此题用洛必达法则未必方便.

习题 1327 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

解 1 这是 $x\to 0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 用洛必达法则可如下计算:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2}}\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}\\&=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-4x^2})}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{2x^2}=1.\quad\square\end{aligned}$$

注 在用了一次洛必达法则之后对表达式作整理, 并用等价量代换法加以简化即可得到答案.

解 2 下面用变量代换和等价量代换法来做 [2].

先分拆成两个极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2x}{x^3}+\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\arcsin x}{x^3},$$

然后对第一个极限用代换 $\arcsin 2x=t$, 即有 $2x=\sin t$, 对第二个极限用代换 $\arcsin x=s$, 即有 $x=\sin s$, 于是得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}&=8\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{\sin^3 t}+2\lim_{s\to 0}\frac{\sin s-s}{\sin^3 s}\\&=8\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}+2\lim_{s\to 0}\frac{\sin s-s}{s^3}=8\cdot\frac{1}{6}-2\cdot\frac{1}{6}=1.\quad\square\end{aligned}$$

注 这里最后的两个极限计算相同, 只要连续用两次洛必达法则, 或者如下用一次洛必达法则后再利用 §1.5.5 中已知的极限 (1.32), 即可得到:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.$$

这是在极限计算中的一个常用结果. 对于已知 $\sin x$ 的泰勒公式的读者这是非常简单的.

习题 1329 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$.

解 1 这是 $x \to 0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 由于分母是 x^3, 可知接连用三次洛必达法则就可能消除不定式如下:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln a\cdot a^x-\ln a\cdot a^{\sin x}\cdot\cos x}{3x^2}\\&=\ln a\cdot\lim_{x\to0}\frac{\ln a\cdot a^x-\ln a\cdot a^{\sin x}\cos^2 x+a^{\sin x}\sin x}{6x}\\&=\frac{\ln a}{6}\cdot\lim_{x\to0}[(\ln a)^2a^x-(\ln a)^2\cdot a^{\sin x}\cos^3 x\\&\qquad\qquad+3\ln a\cdot a^{\sin x}\cos x\sin x+a^{\sin x}\cos x]\\&=\frac{\ln a}{6}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 洛必达法则来自于柯西中值定理. 在不少求极限的问题中可以直接用拉格朗日中值定理来计算. 例如本题可以将原来的分式分解如下:

$$\frac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}=\frac{a^x-a^{\sin x}}{x-\sin x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3},$$

然后对右边的第一个分式用拉格朗日中值定理和 $(a^x)'=\ln a\cdot a^x$, 知道存在 $\xi\in(\sin x,x)$, 使得

$$\frac{a^x-a^{\sin x}}{x-\sin x}=\ln a\cdot a^{\xi},$$

由于 $\xi\in(\sin x,x)$, 于是当 $x\to0$ 时这个分式的极限是 $\ln a$. 因第二个分式的极限已知为 $\dfrac{1}{6}$, 最后可知本题的答案是 $\dfrac{\ln a}{6}$. □

习题 1330 求 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

解 这是 $x\to1$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 用洛必达法则计算如下:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^x-x}{\ln x-x+1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^x(x\ln x)'-1}{\dfrac{1}{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1-x}\\&=-\lim_{x\to1}[x^x(\ln x+1)^2+x^{x-1}]=-2.\quad\square\end{aligned}$$

注 在第一次用洛必达法则之后, 将分母 $\dfrac{1}{x}-1$ 改写为 $\dfrac{1-x}{x}$, 并利用 $x\to1$, 因此分母成为 $1-x$, 这样就只要再用一次洛必达法则即可解决了.

习题 1333 求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解 1 这是 $x\to0$ 时的 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 从分母为 x^4 可见, 接连用 4 次洛必达法则, 一定可消除不定式而得到答案. 下面介绍稍为简便一点的方法.

对分子用三角函数的和差化积公式, 然后再用等价量代换法, 这样就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\left(\dfrac{\sin x+x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\sin x-x}{2}\right)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x+x)(x-\sin x)}{2x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+\sin x}{2x}\cdot\frac{x-\sin x}{x^3}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}.\quad\square$$

解 2 用拉格朗日中值定理, 则存在 $\xi\in(\sin x,x)$, 使得有

$$\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^4}$$
$$=-\frac{\sin\xi}{x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^3}.$$

当 $x\to 0$ 时, 对第一个分式, 从 $\xi\in(\sin x,x)$ 可知 $\sin\xi$ 在 $\sin(\sin x)$ 和 $\sin x$ 之间. 从 $\sin(\sin x)\sim\sin x\sim x\ (x\to 0)$ 和夹逼定理, 可知极限为 1, 而第二个分式的极限为 $-\dfrac{1}{6}$, 因此本题的答案为 $\dfrac{1}{6}$. □

解 3 《习题集》将泰勒公式及其在极限计算中的应用放在下一节, 现在试用它来计算本题的极限. 如 §1.5–1.6 中那样将 $x\to 0$ 时的 x 作为标准的一阶无穷小量, 用 O_n 记 n 阶无穷小量, 则可以用泰勒公式写出

$$\cos(\sin x)=1-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{24}\sin^4 x+O_6$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+O_5\right)^2+\frac{1}{24}x^4+O_6$$
$$=1-\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)x^4+O_6,$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+O_6,$$

就可以直接看出本题的答案为 $\dfrac{1}{6}$. □

注 带佩亚诺型余项的泰勒公式是求函数极限的重要方法之一. 建议已经学过泰勒公式的读者可以试用它来解决本节的部分习题.

习题 1335 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsinh}(\sinh x)-\operatorname{arcsinh}(\sin x)}{\sinh x-\sin x}$, 其中 $\operatorname{arcsinh} x$ 是双曲正弦函数的反函数: $\operatorname{arcsinh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 1 若熟悉双曲正弦函数, 则可如下作变量代换求解 [2]. 分子的第一项就是 x. 令 $t=\operatorname{arcsinh}(\sin x)$, 则有 $\sin x=\sinh t$, $x=x(t)=\arcsin(\sinh t)$, 且 $x\to 0$ 与 $t\to 0$ 等价. 利用双曲正弦的差角公式和 $\sinh x\sim x\ (x\to 0)$, 就有 (参见 §1.5.5 的习题 482)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsinh}(\sinh x)-\operatorname{arcsinh}(\sin x)}{\sinh x-\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{x(t)-t}{\sinh x(t)-\sinh t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{x(t)-t}{2\sinh\dfrac{x(t)-t}{2}\cosh\dfrac{x(t)+t}{2}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cosh\dfrac{x(t)+t}{2}}=1.\quad\square$$

解 2 本题是 $x \to +\infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式. 分子的第一项是 $\operatorname{arcsinh}(\sinh x) = x$. 用洛必达法则, 并利用 $[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 即可得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsinh}(\sinh x)-\operatorname{arcsinh}(\sin x)}{\sinh x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}}{\cosh x-\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 x}-\cos x}{\cosh x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}+\sin x}{\sinh x+\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sinh x+\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}+1\right)$$

$$= 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\cosh x+\cos x} = 1. \quad \square$$

注 在三次用洛必达法则的同时, 还利用了等价量代换法简化计算.

解 3 用拉格朗日中值定理和 $(\operatorname{arcsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, 存在 $\xi \in (\sin x, \sinh x)$①, 使得成立

$$\frac{\operatorname{arcsinh}(\sinh x)-\operatorname{arcsinh}(\sin x)}{\sinh x-\sin x} = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

由于 $\xi \in (\sin x, \sinh x)$, 可见当 $x \to 0$ 时, 上式的极限等于 1. $\square$

解 4 利用解 1 中所作的变量代换, 然后用拉格朗日中值定理, 则存在 $\xi \in (x(t), t)$, 使得成立

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arcsinh}(\sinh x)-\operatorname{arcsinh}(\sin x)}{\sinh x-\sin x} = \lim_{t\to 0}\frac{x(t)-t}{\sinh x(t)-\sinh t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\cosh\xi},$$

由于 $\xi \in (x(t), t)$, 可见当 $t \to 0$ 时, 上式的极限等于 1. $\square$

习题 1336 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

解 这是 $x \to +\infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 已见于 §1.6 的习题 651(e). 用洛必达法则可计算如下:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0. \quad \square$$

习题 1359 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$.

解 从函数极限知道 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e}$ $(x \to 0)$, 因此这是 $x \to 0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 直接用洛必达法则, 其中对分子的第一项可用对数求导法, 这样就有

① 为简明起见, 在这里和今后的类似情况中, 将 $a < \xi < b$ 和 $a > \xi > b$ 两种可能性统一记为 $\xi \in (a, b)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)'\right]$$
$$=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$$
$$=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{1+x}}{2x}$$
$$=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x(1+x)^2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}.\quad\square$$

注 定义函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x>-1, x\neq 0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$$

则本题实际上就是在计算这个函数在点 $x=0$ 处的导数 $f'(0)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$. (其图像见 §1.4.7 之 1.)

2.9.2 不定式计算 II (习题 1339–1357, 1361–1366, 1368(a), 1369–1370)

这一部分的习题是 $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 和 $\infty-\infty$ 型的不定式.

习题 1340 求 $\lim\limits_{x\to 1-0}[\ln x\cdot\ln(1-x)]$.

解 1 先作代换. 令 $t=1-x$, 则 $x\to 1-0\iff t\to +0$, 于是有 $\ln x=\ln(1-t)\sim -t$ $(t\to +0)$, 因此有

$$\lim_{x\to 1-0}[\ln x\cdot\ln(1-x)]=-\lim_{t\to +0}t\ln t,$$

这是 $t\to +0$ 时的 $0\cdot\infty$ 型不定式. 将它改写为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式后即可用洛必达法则计算如下:

$$\lim_{t\to +0}t\ln t=\lim_{t\to +0}\frac{\ln t}{\dfrac{1}{t}}=\lim_{t\to +0}\frac{\dfrac{1}{t}}{-\dfrac{1}{t^2}}=-\lim_{t\to +0}t=0.\quad\square$$

解 2 不作代换也可以做. 由于本题是 $x\to 1-0$ 时的 $0\cdot\infty$ 型不定式. 将它改写为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式后即可用洛必达法则计算如下:

$$\lim_{x\to 1-0}[\ln x\cdot\ln(1-x)]=\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\dfrac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to 1-0}\frac{-\dfrac{1}{1-x}}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 1-0}\frac{x\ln^2 x}{1-x}$$
$$=-\lim_{x\to 1-0}(\ln^2 x+2\ln x)=0.\quad\square$$

习题 1341 求 $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \ln x\ (\varepsilon>0)$.

解 这是 $x\to+0$ 时的 $0\cdot\infty$ 型不定式, 已见于 §1.6 的习题 650(d). 将它改写为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式后用洛必达法则即有

$$\lim_{x\to+0} x^\varepsilon \ln x = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^\varepsilon}} = \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}} = -\lim_{x\to+0}\frac{1}{\varepsilon}x^\varepsilon = 0. \quad \square$$

注 1 $0\cdot\infty$ 型不定式除了可以转换为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式之外, 当然也可以转换为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 但如果对上述两题用后一个转换再用洛必达法则的话就会发现有困难. 因此遇到这类有两种可能性的问题时, 总是要经过尝试后才知道哪一条路好.

注 2 初学者要注意, 习题 1336 和 1341 是对于对数函数 $\ln x$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to+0$ 时的性态的刻画, 有多方面的应用, 也在本节的多个习题中起作用.

习题 1342 求 $\lim\limits_{x\to+0} x^x$.

解 这是 $x\to+0$ 时的 0^0 型不定式. 取对数后就可以用洛必达法则解决. 这与以下写法是相同的:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} \mathrm{e}^{x\ln x} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+0} x\ln x} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

其中利用了习题 1341 的 $\varepsilon=1$ 的结果. $\square$

习题 1343 求 $\lim\limits_{x\to+0} x^{x^x-1}$.

解 由上一题可见这是 $x\to+0$ 时的 0^0 型不定式. 取对数后作如下计算:

$$\lim_{x\to+0}(x^x-1)\ln x = \lim_{x\to+0}\frac{x^x-1}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x^x(\ln x+1)}{-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}}$$
$$= -\lim_{x\to+0} x\ln^2 x\cdot x^x(\ln x+1)$$
$$= -\lim_{x\to+0} x^x(x\ln^3 x + x\ln^2 x) = 0,$$

可见本题的答案为 $\mathrm{e}^0=1$. $\square$

注 在最后一步中利用了习题 1341–1342 的结果.

习题 1344 求 $\lim\limits_{x\to+0}\left(x^{x^x}-1\right)$.

解 从习题 1342 有 $x^x\to1\ (x\to+0)$, 因此本题不是不定式, 即有

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{x^x}-1\right) = 0^1-1=-1. \quad \square$$

习题 1347 求 $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

解 这是 $x\to1$ 时的 1^∞ 型不定式. 取对数后计算如下:

$$\lim_{x\to1}\tan\frac{\pi x}{2}\ln(2-x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln(2-x)}{\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi x}{2}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{-1}{2-x}}{-\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi},$$

因此本题的答案是 $e^{\frac{2}{\pi}}$. □

注 本题也可用 §1.5.5 中处理 1^∞ 型不定式的 (1.38) 求解.

习题 1352 求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\tan x}{\tan a}\right)^{\cot(x-a)}$.

解 本题在 $\tan a$ 为非零有限数时有意义, 即 $a\neq\frac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$. 这时是 $x\to a$ 时的 1^∞ 型不定式. 取对数后可计算如下:

$$\lim_{x\to a}\cot(x-a)(\ln\tan x-\ln\tan a)=\lim_{x\to a}\frac{\ln\tan x-\ln\tan a}{\sin(x-a)}\cdot\lim_{x\to a}\cos(x-a)$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{\sec^2 x}{\tan x\cos(x-a)}=\frac{2}{\sin 2a},$$

因此本题的答案是 $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$. □

习题 1353 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 不妨先计算 $\lim\limits_{x\to0}(a^x-x\ln a)^{\frac{1}{x^2}}$. 这是 $x\to0$ 时的 1^∞ 型不定式. 取对数后可计算如下:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(a^x-x\ln a)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln a\cdot a^x-\ln a}{(a^x-x\ln a)\cdot2x}=\frac{\ln a}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{\ln^2 a}{2}.$$

由此可见也有 $\lim\limits_{x\to0}(b^x-x\ln b)^{\frac{1}{x^2}}=\dfrac{\ln^2 b}{2}$, 从而本题的答案是 $e^{\frac{\ln^2 a-\ln^2 b}{2}}$. □

习题 1354 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解 这是 $x\to0$ 时的 $\infty-\infty$ 型不定式. 将两个分式通分后就可以用洛必达法则计算如下:

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x\cdot(e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

其中利用了 $e^x-1\sim x$ $(x\to0)$ 使得计算更简单. □

习题 1363(a) 求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

解 1 这是 $x \to 0$ 时的 1^∞ 型不定式. 取对数后可用洛必达法则计算如下:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\arcsin x)-\ln x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{x}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2x^2\arcsin x\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}{2x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2}-\arcsin x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{6x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{6x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

可见本题的答案是 $e^{\frac{1}{6}}$. □

解 2 用变量代换法, 令 $t=\arcsin x$, 则 $x\to 0 \Longleftrightarrow t\to 0$, 且有 $x=\sin t$, 于是在取对数后可计算如下:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\arcsin x)-\ln x}{x^2} &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln t-\ln\sin t}{\sin^2 t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\ln t-\ln\sin t}{t^2} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1}{t}-\dfrac{\cos t}{\sin t}}{2t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t\cos t}{2t^2\sin t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t\cos t}{2t^3} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{6t^2} = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

可知本题的答案是 $e^{\frac{1}{6}}$. □

注 在以上两个解法中都多次利用等价量代换法以简化计算.

习题 1363(e) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{arc\,sinh} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, 其中 $\operatorname{arc\,sinh} x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 利用 $(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 就可以用洛必达法则计算得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1,$$

因此本题是 $x\to 0$ 时的 1^∞ 型不定式. 取对数后用等价量代换法并配合洛必达法则就可以计算得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-1}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{3x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2(1+\sqrt{1+x^2})}=-\frac{1}{6}.$$

可知本题的答案是 $e^{-\frac{1}{6}}$. □

注 这里在一开始就利用当 $u(x)\to 1\ (x\to 0)$ 时有

$$\ln u(x)=\ln[1+(u(x)-1)]\sim u(x)-1\ \ (x\to 0),$$

从而使得后面的计算简单得多.

最后的两个习题都是 $\infty-\infty$ 型不定式, 解法很多, 也未必要用洛必达法则. 下面先对它们作分析, 然后给出解.

习题 1369 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

解 这是 $x\to+\infty$ 时的 $\infty-\infty$ 型不定式.

注意到当 $x\to+\infty$ 时 $\dfrac{\ln(e^x+x)}{x}$ 的极限为 1, 将它写为 $1+\dfrac{\ln(1+\frac{x}{e^x})}{x}$, 其第二项当 $x\to+\infty$ 时是无穷小量. 又利用 §1.5.4 的 (1.30) (即 $\sqrt[n]{1+x}=1+\dfrac{1}{n}x+o(x)\ (x\to 0)$), 即可将两个根式写为 $x(1+o(1))$, 其中 $o(1)$ 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷小量. 这时可取 $\dfrac{1}{x}$ 作为标准的无穷小量. 这样就可以计算如下:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}\right)-\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(1+\frac{x}{e^x})}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})}-\sqrt{1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{3x}+o(\frac{1}{x})-\left(1+\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})\right)\right)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.\quad □$$

习题 1370 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}}-x^{1+\frac{1}{x+a}}\right]$.

解 这是 $x\to+\infty$ 时的 $\infty-\infty$ 型不定式.

解决本题的基础是下列极限以及其中所用的方法①:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

若取 $x = n$ 为正整数, 则就是 §1.2.2 的习题 65 (即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$).

由此可见第一项为 $(x+a)\cdot(x+a)^{\frac{1}{x}} = a + x(1+o(1))$, 第二项是 $x \cdot x^{\frac{1}{x+a}} = x(1+o(1))$, 其中的 $o(1)$ 都是当 $x \to +\infty$ 时的无穷小量.

将两式相减, 并将幂指函数 $(x+a)^{\frac{1}{x}}$ 和 $x^{\frac{1}{x+a}}$ 分别写为基数为 e 的指数函数, 再利用基于 $\mathrm{e}^x - 1 \sim x\ (x\to 0)$ 的等价量代换, 就可以计算如下:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}\right] &= \lim_{x\to+\infty}\left[a(x+a)^{\frac{1}{x}} + x[(x+a)^{\frac{1}{x}} - x^{\frac{1}{x+a}}]\right] \\
&= a\lim_{x\to+\infty}(x+a)^{\frac{1}{x}} + \lim_{x\to+\infty} x\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(x+a)}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x+a}}\right] \\
&= a\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln(x+a)}{x}} + \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x+a}}\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(x+a)}{x} - \frac{\ln x}{x+a}} - 1\right] \\
&= a + \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x+a)}{x} - \frac{\ln x}{x+a}\right) \\
&= a + \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{x+a}{x} + a\frac{\ln x}{x+a}\right) = a. \quad \square
\end{aligned}$$

对前两个小节中的不定式极限计算的小结

(1) 由于求导数是高等数学中最容易学会的计算技能, 因此洛必达法则成为求函数极限的最方便和有效的工具之一.

(2) 洛必达法则可以接连使用. 与施托尔茨定理相同, 每次使用后的极限存在就保证了合理性.

(3) 在使用洛必达法则的过程中, 如果能够配合使用 §1.5–1.6 中介绍的等价量代换法, 则有可能简化计算, 避免因复杂的计算而造成的出错. (这里初学者需要回顾 §1.5.7 中关于等价量代换法的注意事项. 常见的错误是在分式的分子有两项的情况, 将其中某一项用等价量代换, 这是没有理论根据的错误做法.)

(4) 洛必达法则使用不当而失败的情况是可能的. 首先要注意只有在 $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ (以及其推广 $\dfrac{*}{\infty}$) 型不定式才能直接用洛必达法则. 此外, 除了上面的习题 1323 中的情况之外, 在后面 §2.9.3 的习题 1374 中举出了洛必达法则使用不当的更多的例子.

(5) 带佩亚诺型余项的泰勒公式是求不定式极限的有力工具.

(6) 直接用拉格朗日中值定理对不少问题是一种有效的方法.

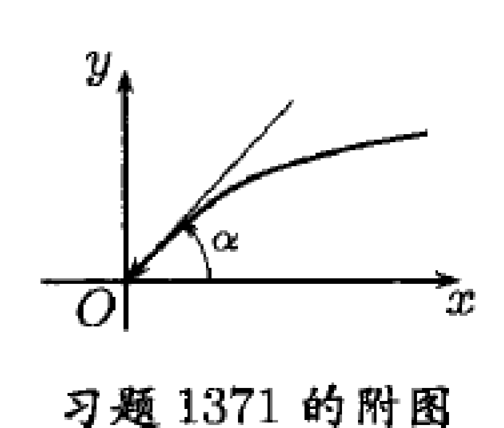
2.9.3 杂题 (习题 1371–1375)

这里包含了洛必达法则的一些应用, 还对该法则使用不当的情况举例.

---

① 这个极限在函数 $x^{\frac{1}{x}}$ 的研究中也不可少. 参见 §1.4.4 的习题 370.1(g) 的解 1, 以及后面 §2.12.2 的习题 1527 等.

习题 1371 设曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to 0$ 时在角 α 下趋于坐标原点 $(0,0)$ $(\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0)$, α 为曲线在原点的倾斜角, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y}{x}$.



习题 1371 的附图

解 题设条件是 (1) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, (2) $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\tan\alpha$. 条件 (1) 表明所求的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式, 用洛必达法则就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{1}=\tan\alpha.\quad \Box$$

注 补充定义 $f(0)=0$ 之后上述推导就推出了存在 $f'(0)=\tan\alpha$, 即表明 f 在 $x=0$ 是广义可导的.

习题 1373.1 证明, 如果函数 $f(x)$ 存在二阶导数 $f''(x)$, 那么

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

解 这时的自变量是 h, 用洛必达法则得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x-h)}{2h}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}+\frac{f'(x-h)-f'(x)}{-h}\right)\\
&=\frac{1}{2}[f''(x)+f''(x)]=f''(x).
\end{aligned}$$

由于只知道 $f''(x)$ 存在, 但没有加连续条件, 因此在用了一次洛必达法则之后, 计算所用的是二阶导数的定义. $\Box$

注 若只知道在某一点 x_0 处存在 $f''(x_0)$, 则本题在 x 改记为 x_0 之后的结论和证明也都成立. 此外, 本题的结论与 §1.5.5 中的习题 488–491 是类似的.

习题 1373.2 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的可微性.

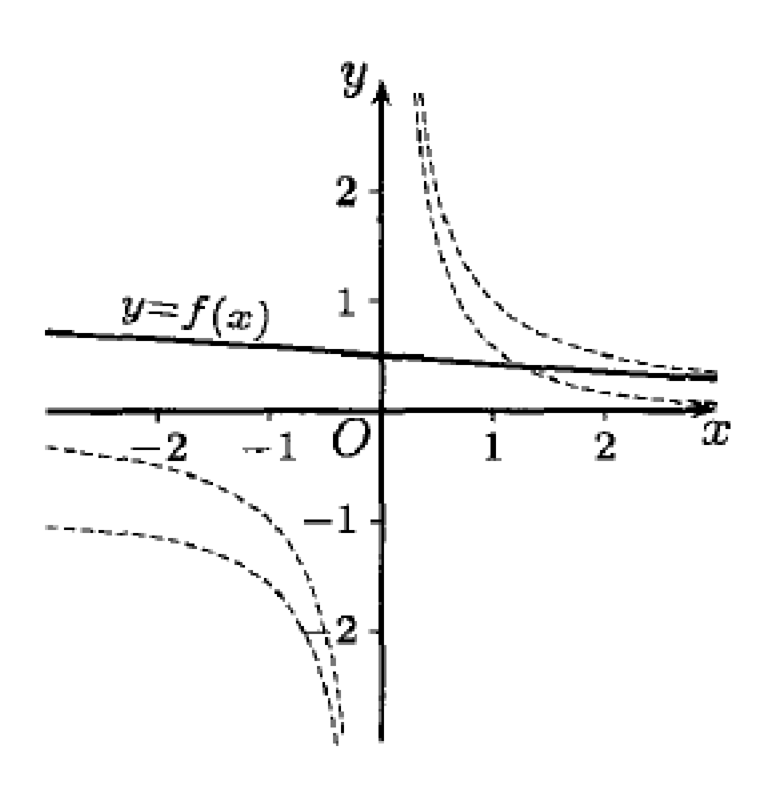
解 从 §2.9.2 的习题 1354 知道 $f(x)$ 于点 $x=0$ 处连续. 按照导数定义计算得到:

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{2}}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2(\mathrm{e}^x-1)-2x-x(\mathrm{e}^x-1)}{2x^2(\mathrm{e}^x-1)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-2-x+2\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{2x^3}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{-1+2\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{6x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{12x}=-\frac{1}{12}.\quad \Box
\end{aligned}$$

注 在附图中作出了 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的图像，它几乎像是经过点 $(0,\frac{1}{2})$ 的斜率为 $-\frac{1}{12}$ 的一条直线，然而不难计算得到 $f(+\infty)=0$, $f(-\infty)=1$. 还可以计算出 $f(x)$ 在点 $x=0$ 展开的泰勒公式的前几项为

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}x+\frac{1}{180}x^2-\cdots.$$

这里利用了函数 $\frac{x}{e^x-1}$ 是伯努利数的生成函数，见 §2.10.1 的习题 1382 (更详细的信息可参考 [23] 的 §7.2.3).

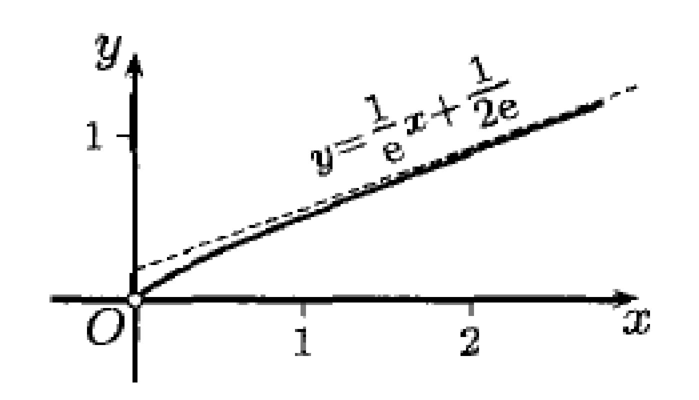


习题 1373.2 的附图


习题 1373.3 求曲线

$$y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\quad(x>0)$$

的渐近线.



习题 1373.3 的附图

解 从分母大于 1 可见没有垂直渐近线. 然后按照渐近线计算公式先计算得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{(1+x)^x}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}.\end{aligned}$$

这表明可能存在斜渐近线. 然后再计算

$$\lim_{x\to+\infty}[y(x)-\frac{x}{e}]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\frac{x}{e}\right].$$

为方便起见作变量代换 $t=\frac{1}{x}$, 于是可引用习题 1359 (§2.9.1 的最后一题) 得到:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[y(x)-\frac{x}{e}]&=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}}-\frac{1}{e}}{t}=-\lim_{t\to+0}\frac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}e}\cdot\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-e}{t}\\&=\frac{1}{e^2}\cdot\frac{e}{2}=\frac{1}{2e},\end{aligned}$$

于是得到 $x\to+\infty$ 的斜渐近线 (见附图), 它的方程为

$$y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2e}.\quad\square$$

习题 1374 研究洛必达法则应用于下列例子的可能性:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;　　(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;　　(d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}}$.

解 分别解答如下.

(a) 用洛必达法则得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x},$$

可见这个极限不存在. 因此不能用洛必达法则. 然而这并不表明原题的极限不存在. 实际上本题的极限是明显存在的:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

(b) 此题与题 (a) 类似, 只要将分子分母同除以 x, 就看出极限存在且等于 1. 然而用洛必达法则得到的是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x},$$

当 $x\to\infty$ 时分母无限多次为 0, 根本不能考虑极限的存在性.

(c) 若用洛必达法则就有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2x}(-5\sin x)+\mathrm{e}^{-x^2}(-2x\sin^2 x+2\sin x\cos x)}{\mathrm{e}^{-x}(-2\sin x)}\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\cdot\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x^2+x}x\sin x-\mathrm{e}^{-x^2+x}\cos x\right)=0,\end{aligned}$$

但这个结果是错误的.

实际上原题的分母为 $\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$, 因此在 k 为正整数的所有点 $k\pi-\frac{\pi}{4}$ 处分母为 0, 同时分子却不等于 0. 这样的函数在 $x\to+\infty$ 时不可能存在极限.

那么用洛必达法则怎么会有极限等于 0 的结果呢? 检查上述计算就可以发现在计算出分子分母的导数之后约去了因子 $\sin x$, 这种运算是不合法的. 实际上从上面的讨论知道, 分母的导函数在 $x\to+\infty$ 时有无穷多个零点, 从而在这些点上分式没有定义.

(d) 若用洛必达法则就有

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos 2x}{[(1+\cos 2x)+(x+\sin x\cos x)\cos x]\,\mathrm{e}^{\sin x}}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cos x}{(2\cos x+x+\sin x\cos x)\,\mathrm{e}^{\sin x}}.\end{aligned}$$

利用 $\mathrm{e}^{\sin x}\geqslant\mathrm{e}^{-1}$, 可见当 $x\to\infty$ 时分母为无穷大量, 而分子为有界量, 因此极限等于 0.

然而检查上述计算过程可以发现这是分子分母约去了因子 $\cos x$ 后才能得到的结论. 由于在用了洛必达法则之后得到的表达式的分母当 $x\to\infty$ 时有无穷多个零点, 因此上述运算是不合法的.

回到原题, 如将原来的表达式改写为

$$\frac{\frac{1}{x}+1+\frac{\sin x\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x\cos x}{x}}\cdot\mathrm{e}^{-\sin x},$$

则就可以看出当 $x\to\infty$ 时上述表达式的第一个因子 (指分式) 的极限为 1, 然而第二个因子 $\mathrm{e}^{-\sin x}$ 却在 e 到 e^{-1} 之间作无穷多次振荡, 因此没有极限. □

小结　小题 (a),(b) 都存在极限, 也都容易求出, 但用洛必达法则后却不存在极限. 小题 (c),(d) 都不存在极限, 但用洛必达法则并错误地约去分子分母的一个因子后却存在极限.

习题 1375 即是计算前面 §1.6 的习题 645 中的弓形面积与弓形内的内接等腰三角形的面积之比的极限, 从而导出弓形面积的一个近似计算公式. 从略.

2.9.4 补注

在这一小节中将从几何角度来解释洛必达法则的意义, 其中包括对于 $\dfrac{*}{\infty}$ 型不定式的洛必达法则的证明.

方法的要点是: 将洛必达法则中涉及的一对函数 f,g 作为平面曲线的参数方程, 然后来观察这条平面曲线的性态.

为了与平时习惯使用的参数方程记号一致, 将自变量改用符号 t. 又为简明起见只考虑 a 为有限点的右侧极限 $t\to a+0$, 同时在洛必达法则中的极限也只限于为有限数. 对于其他情况的推广是类似的.

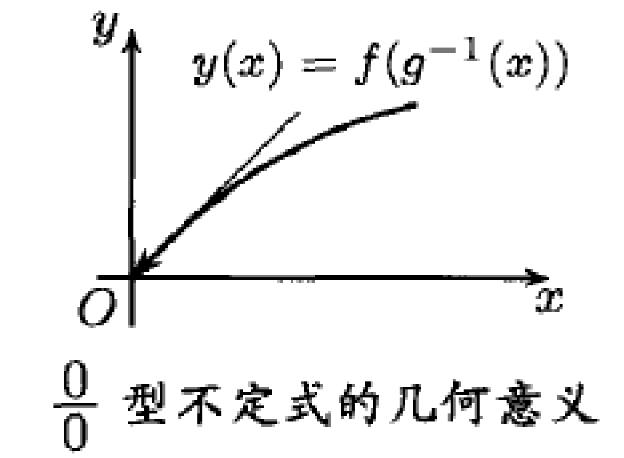
用于 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式的洛必达法则

设 $\lim\limits_{t\to a+0}\dfrac{f(t)}{g(t)}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式, 同时存在极限 $\lim\limits_{t\to a+0}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}=A$. 如前所说这个条件蕴涵在点 a 右侧邻近分母 $g'(t)$ 不会等于 0, 例如在 (a,b) 上 $g'(t)\neq 0$. 考察由下列参数方程表示的平面曲线

$$x=g(t),\ y=f(t),\quad a<t<b.$$

从达布定理知道 $g'(t)$ 保号, 因此 $g(t)$ 严格单调, 从而存在反函数 $t=g^{-1}(x)$. 于是上述平面曲线就可以用 $y(x)=f(g^{-1}(x))$ 来表示. 同时从参数方程求导法知道这个函数可导, 且有

$$y'(x)=\frac{f'(t)}{g'(t)}.$$



$\dfrac{0}{0}$ 型不定式的几何意义

利用条件 $f(a+0)=g(a+0)=0$, 补充 (或修改) 定义 $f(a)=g(a)=0$, 则就使得 f,g 在点 a 均右连续. 几何上如附图所示即有 $y(0)=0$, 且 $y(x)$ 于 $x=0$ 右连续. 于是所要求的极限就是

$$\lim_{t\to a+0}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to a+0}\frac{f(t)-f(a)}{g(t)-g(a)}=\lim_{x\to+0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{y(x)}{x}.$$

显然这就是求 $y(x)$ 在点 $x=0$ 的右导数. 由于已经有 $\lim\limits_{x\to+0}y'(x)=A$, 因此洛必达法则告诉我们上述极限等于 A.

用几何语言来说这就是 §2.9.3 的习题 1371 的内容, 即若一条曲线趋于原点, 同时它的切线斜率有极限 $\tan\alpha$, 则曲线在原点存在切线, 其斜率等于 $\tan\alpha$.

于是我们看到, $\dfrac{0}{0}$ 型的洛必达法则就是前面已经知道的导数极限定理 (即 §2.6.4 的习题 1258.1). 这也就是习题 1371 的意义, 只是在那里没有引入平面曲线的参数方程表

示, 因此不够一般.

命题 2.10 (用于 $\frac{*}{\infty}$ 型不定式的洛必达法则) 设存在极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\dfrac{f'(t)}{g'(t)}=A$, 且 $g(a+0)$ 为确定符号的无穷大量, 则成立 $\lim\limits_{t\to a^+}\dfrac{f(t)}{g(t)}=A$.

以下只讨论 $a, A>0$ 均为有限数, $g(a+0)=+\infty$ 的情况.

如前面一样可知 $g'(t)$ 在 a 右侧邻近保号. 考虑平面曲线

$$x=g(t),\ y=f(t),\quad a<t<b,$$

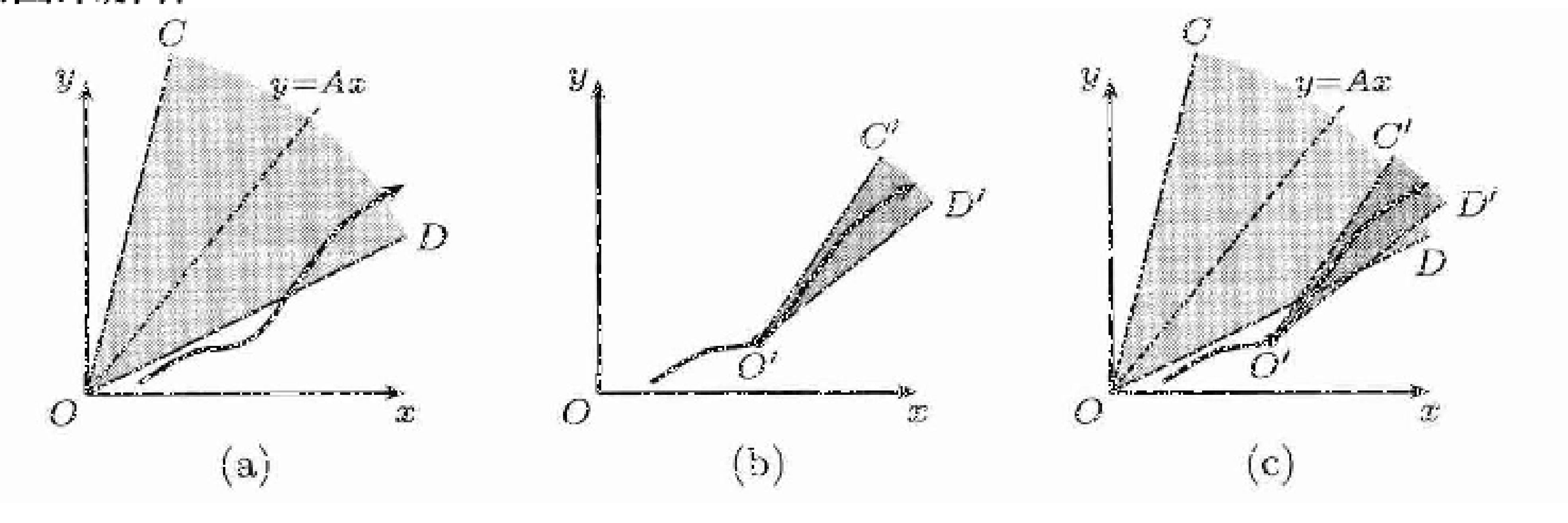
其中 g 在 (a,b) 上严格单调. 于是该曲线就可以用 $y(x)=f(g^{-1}(x))$ 表出, 在下面的附图中用粗黑曲线表示.

于是问题已经转化为证明:

$$\lim_{x\to+\infty}y'(x)=A\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=A.$$

即将洛必达法则归结为一种特殊情况来证明. 它比较容易处理.

由于 $x=g(t)$ 严格单调, $g(a+0)=+\infty$, $t\to a+0$ 与 $x\to+\infty$ 是等价的. 曲线 $y=y(x)$ 无界, 因此不可能用处理 $\frac{0}{0}$ 型不定式的连续延拓方法. 以下所用的方法将结合示意图来解释.



$\frac{*}{\infty}$ 型不定式的洛必达法则证明示意图

先看我们的目的是什么? 对于 $A>0$, 就是要对每一个给定的 $\varepsilon>0$, 证明存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时成立不等式

$$A-\varepsilon<\frac{y(x)}{x}<A+\varepsilon. \tag{2.17}$$

几何上如分图 (a) 所示, 就是使得 $x>M$ 时的曲线 $y=y(x)$ 落在一个无界扇形 $\sphericalangle COD$ 中, 它的角平分线是 $y=Ax$. 对于射线 OC 和 OD 均理解为延伸到无穷远, 它们的斜率记为 $k(OC)$ 和 $k(OD)$, 分别为 $A+\varepsilon$ 和 $A-\varepsilon$.

再观察我们的条件是什么? 由于

$$y'(x)=\frac{f'(t)}{g'(t)}\to A\ (x\to+\infty),$$

因此存在 $x_0>0$, 当 $x\geqslant x_0$ 时成立不等式

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<y'(x)<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

取点 $(x_0, y(x_0))$, 将它标为分图 (b) 上的点 O', 则就可以用拉格朗日中值定理知道当 $x > x_0$ 时有 $\xi \in (x_0, x)$, 使得成立

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = y'(\xi) < A + \frac{\varepsilon}{2},$$

由此就可以得到将 $y(x)$ 夹在中间的不等式

$$y(x_0) + (A - \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0) < y(x) < y(x_0) + (A + \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0). \tag{2.18}$$

如分图 (b) 所示, 它表明在 $x \geqslant x_0$ 时曲线 $y = y(x)$ 落在另一个无界扇形 $\sphericalangle C'O'D'$ 内. 与分图 (a) 一样, 它的角平分线的斜率也是 A, 对于半射线 $O'C'$ 和 $O'D'$ 也理解为延伸至无穷远. 注意斜率 $k(O'D') = A - \varepsilon/2 > k(OD) = A - \varepsilon$ 和斜率 $k(O'C') = A + \varepsilon/2 < k(OC) = A + \varepsilon$.

于是只剩下一个问题, 即当 x 充分大时, 能否由分图 (b) 推出曲线 $y = y(x)$ 进入分图 (a) 中的扇形 COD? 分图 (c) 表明在 $k(OD) < k(O'D') < k(O'C') < k(OC)$ 的前提下这在几何上是明显成立的.

严格的分析证明也是容易的. 将 (2.18) 除以 x 并令 $x \to +\infty$, 就知道存在 $M > 0$, 使得当 $x > M$ 充分大时成立 $A - \varepsilon < \dfrac{y(x)}{x} < A + \varepsilon$, 即满足 (2.17).

下面我们将上述几何解释改用独立的分析语言写出证明.

证 设有条件 $\lim\limits_{x \to +\infty} y'(x) = A$ 成立. 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $x_0 > 0$, 使得当 $x \geqslant x_0$ 时成立

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < y'(x) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

然后在 $x > x_0$ 时用拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_0, x)$, 使得

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{y(x) - y(x_0)}{x - x_0} = y'(\xi) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

将它改写为

$$y(x_0) + (A - \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0) < y(x) < y(x_0) + (A + \frac{\varepsilon}{2})(x - x_0),$$

然后除以 x, 得到

$$A - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{y(x_0) - (A - \frac{\varepsilon}{2})x_0}{x} < \frac{y(x)}{x} < A + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{y(x_0) - (A + \frac{\varepsilon}{2})x_0}{x}.$$

考虑到当 $x \to +\infty$ 时上述不等式的左边和右边分别收敛于 $A - \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $A + \frac{\varepsilon}{2}$, 因此存在 $M > x_0$, 使得当 $x > M$ 时成立不等式

$$A - \varepsilon < \frac{y(x)}{x} < A + \varepsilon,$$

可见已经得到 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y(x)}{x} = A$. □

§2.10 泰勒公式 (习题 1376–1413)

内容简介 泰勒公式可称为是微分学的顶峰. 本节学习带有各种余项的泰勒公式, 并将它们用于一系列性质不同的问题, 其中包括极限计算、近似计算和误差估计等.

函数在点 x_0 处展开的泰勒公式为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中的系数

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},k=0,1,\cdots,n,$$

和式 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k$ 称为泰勒多项式, $R_n(x)$ 称为余项, 它就是函数 $f(x)$ 与泰勒多项式之差:

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k,$$

即用多项式逼近函数时的“截断误差”. 余项有各种类型, 它们是对此“误差”的刻画①.

最为常用的余项有两种.

第一种余项是佩亚诺型余项, 它的形式为

$$R_n=o((x-x_0)^n)\ \ (x\to x_0),$$

若取 $n=1$, 则带有佩亚诺型余项的泰勒公式就是

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)\ \ (x\to x_0).$$

这也就是学习导数与微分时的

$$\Delta f=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\ \ (\Delta x\to 0),$$

常称为无穷小增量公式.

由于佩亚诺型余项刻画的是当 $x\to x_0$ 时的极限性态, 因此在《习题集》中将相应的泰勒公式称为局部泰勒公式, 它的主要用途是在极限计算等方面 (见 §2.10.4).

此外, 在 $f^{(n+1)}(x_0)$ 存在时有 $R_n=O((x-x_0)^{n+1})$ $(x\to x_0)$. 这种形式在许多计算中对于估计阶数是很方便的. 若从上下文知道极限过程为 $x\to x_0$, 则还可以将上述表达式简记为 O_{n+1}.

第二种余项是拉格朗日型余项, 它的形式为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$. 若取 $n=0$, 则带有拉格朗日型余项的泰勒公式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0),$$

这就是拉格朗日中值定理. 它的另一种形式为

① 本书对于余项的定义和记号来自于 [6, 26] 等教科书, 与《习题集》有些差异. 在《习题集》中没有用佩亚诺型余项的名称, 本书的 R_n 在那里记为 R_{n+1}.

$$\Delta f = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x.$$

这些公式常称为有限增量公式.

带有拉格朗日型余项的泰勒公式也称为泰勒中值定理. 它与拉格朗日中值定理一样具有多方面的应用.

为读者方便, 下面列出了最为常用的几个泰勒公式:

$$\begin{aligned}
&\text{I. } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),\\
&\text{II. } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),\\
&\text{III. } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),\\
&\text{IV. } (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),\\
&\text{V. } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),\\
&\text{VI. } \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n}(x),\\
&\text{VII. } \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!(2n-1)}x^{2n-1} + R_{2n}(x).
\end{aligned}$$

注 1 注意到奇函数 (偶函数) 在点 $x=0$ 展开的泰勒多项式中的 x 的偶数幂次 (奇数幂次) 的项的系数总是 0, 在 $\sin x, \cos x, \arctan x, \arcsin x$ 的上述泰勒展开式的余项前认为都有系数为 0 的一项. 如下面的某些习题中会看到的那样, 这对于误差估计是有益的.

注 2 上述第 IV 个公式, 即二项式函数 $(1+x)^\alpha$ 的展开式, 其中含有参数 α, 因此它实际上包含了无穷多个公式, 下面列出几个最常用的公式:

$$\begin{aligned}
&\alpha = -1,\ \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + R_n(x),\\
&\alpha = -2,\ \frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots + (-1)^n(n+1)x^n + R_n(x),\\
&\alpha = \frac{1}{2},\ \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots + \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(-1)^{n-1}x^n + R_n(x),\\
&\alpha = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n x^n + R_n(x).
\end{aligned}$$

2.10.1 泰勒公式计算 (习题 1376–1392)

这里的第一个题显示了微分学在一个代数问题中的应用.

习题 1376 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

表示成二项式 $x+1$ 的非负整数幂的多项式.

解 1 用初等代数可计算如下:

$$\begin{aligned}P(x) &= 1+3[(x+1)-1]+5[(x+1)-1]^2-2[(x+1)-1]^3\\&= 1+[3(x+1)-3]+5[(x+1)^2-2(x+1)+1]\\&\qquad -2[(x+1)^3-3(x+1)^2+3(x+1)-1]\\&= (1-3+5+2)+(3-10-6)(x+1)+(5+6)(x+1)^2-2(x+1)^3\\&= 5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 本题给定的多项式可以看成为它自身在 $x=0$ 处展开的泰勒公式, 同时作为函数它又可以在点 $x=-1$ 处展开为泰勒公式, 于是本题就可以通过导数计算来解决.

计算出

$$P'(x)=3+10x-6x^2,\ P''(x)=10-12x,\ P'''(x)=-12,$$

用 $x=-1$ 代入得到

$$P(-1)=5,\ P'(-1)=-13,\ P''(-1)=22,\ P'''(-1)=-12,$$

于是就有

$$\begin{aligned}P(x) &= 5+(-13)(x+1)+\frac{22}{2}(x+1)^2+\frac{-12}{6}(x+1)^3\\&= 5-13(x+1)+11(x+1)^2-2(x+1)^3. \quad \square\end{aligned}$$

本小节下面的习题都是计算某个函数在指定点处的泰勒公式到某个指定幂次的项, 也就是要计算它们的系数. 这里大体上有两种方法, 一种是按照公式

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, k=0,1,\cdots,n,$$

进行计算, 也就是先求 $f(x)$ 在点 x_0 处的高阶导数, 常称为直接法.

另一种方法是利用已知的几个常用的泰勒公式, 通过包括变量代换在内的各种运算来计算出所求的泰勒公式, 常称为间接法. 这要求我们记住最基本的几个函数 (其中包括 $\mathrm{e}^x, \sin x, \cos x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x), \arctan x$ 等) 在 $x=0$ 处展开的泰勒公式. 就如同求导数计算中的求导公式一样, 以上几个函数的泰勒公式也是微分学中的“九九表”.

利用泰勒公式的唯一性, 无论用什么 (正确的) 方法, 所得的结果都应当相同.

习题 1377 求 $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 的泰勒展开式至含 x^4 的项. $f^{(4)}(0)$ 的值是多少?

解 由于给定的分式函数的分母在实数域内不可约, 该分式不能分拆成分母为一次函数的分式之和, 因此用求导数的直接法似乎不方便. 以下用间接法来计算.

先将 $f(x)$ 改写如下:

$$f(x)=1+\frac{2x}{1-x+x^2}=1+\frac{2x(1+x)}{1+x^3},$$

然后利用 $\dfrac{1}{1+x}$ 的泰勒公式, 将其中的 x 换为 x^3, 就可计算如下:

$$f(x) = 1 + (2x + 2x^2)(1 - x^3 + O_6)$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + O_5 \ (x \to 0),$$

其中 O_6, O_5 是关于极限过程 $x \to 0$ 的 $O(x^6), O(x^5)$ 的简写.

按照泰勒公式中的系数公式就得到

$$f^{(4)}(0) = 24 \times (-2) = -48. \quad \square$$

注 这里用直接法固然不便, 但就是用间接法, 也有多种不同计算方法, 以上选取的是较为简短的一种.

习题 1378 求 $f(x) = \dfrac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ 的泰勒展开式至含 x^2 的项.

解 取对数后可计算得到

$$\ln f(x) = 100\ln(1+x) - 40\ln(1-2x) - 60\ln(1+2x)$$
$$= 100(x - \frac{x^2}{2}) - 40(-2x - \frac{4x^2}{2}) - 60(2x - \frac{4x^2}{2}) + O_3$$
$$= 60x + 150x^2 + O_3 \ (x \to 0).$$

然后再回到 $f(x)$, 这可计算如下:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\ln f(x)} = \mathrm{e}^{60x+150x^2+O_3}$$
$$= 1 + (60x + 150x^2) + \frac{1}{2}(60x + 150x^2)^2 + O_3$$
$$= 1 + 60x + 1\,950x^2 + O_3 \ (x \to 0). \quad \square$$

解 2 由于取对数后求导还是容易的, 本题可用直接法计算如下:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{100}{1+x} + \frac{80}{1-2x} - \frac{120}{1+2x},$$
$$\frac{f''(x)}{f(x)} - \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 = -\frac{100}{(1+x)^2} + \frac{160}{(1-2x)^2} + \frac{240}{(1+2x)^2},$$

令 $x = 0$ 代入就得到

$$f(0) = 1, \ f'(0) = 60, \ f''(0) = 3\,600 - 100 + 160 + 240 = 3\,900,$$

因此得到

$$f(x) = 1 + 60x + 1\,950x^2 + O_3 \ (x \to 0). \quad \square$$

注 这类题用直接法或间接法都有多种做法, 需要根据题的特点选取较好的方法.

习题 1379 求 $f(x) = \sqrt[m]{a^m + x}\ (a > 0)$ 的泰勒展开式至含 x^2 的项.

解 1 用直接法, 则有

$$f'(x) = \frac{1}{m}(a^m + x)^{\frac{1-m}{m}},$$
$$f''(x) = \frac{1-m}{m^2}(a^m + x)^{\frac{1-2m}{m}},$$

令 $x = 0$ 代入得到 $f'(0) = \dfrac{1}{m}a^{1-m}$, $f''(0) = \dfrac{1-m}{m^2}a^{1-2m}$, 于是得到

$$\sqrt[m]{a^m+x}=a+\frac{1}{ma^{m-1}}x+\frac{1-m}{2m^2a^{2m-1}}x^2+O_3\ (x\to 0).\quad \square$$

解 2 用间接法可从二项式函数 $(1+x)^{\frac{1}{m}}$ 的展开式如下求解:

$$\begin{aligned}\sqrt[m]{a^m+x}&=a\Big(1+\frac{x}{a^m}\Big)^{\frac{1}{m}}\\&=a\Big(1+\frac{1}{m}\cdot\frac{x}{a^m}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1-m}{m}\cdot\frac{x^2}{a^{2m}}\Big)+O_3\ (x\to 0),\end{aligned}$$

加以整理就得到与解 1 相同的答案. □

注 令 $a=1$, $m=n$, 则可看出 x^2 项的系数就是在 §1.5.4 中的命题 1.7 的结果.

习题 1380 求 $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 的泰勒展开式至含 x^3 的项.

解 本题直接计算导数或用二项式函数的展开式都可以做. 这里介绍用隐函数求导的直接法, 它避免了对无理函数求高阶导数.

令 $y=\sqrt{1-2x+x^3}$, 则 $y^2=1-2x+x^3$, 于是有

$$2yy'=-2+3x^2,$$
$$2y'^2+2yy''=6x,$$
$$6y'y''+2yy'''=6,$$

令 $x=0$ 代入得到

$$y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y''(0)=-1,\ y'''(0)=0.$$

同样令 $z=\sqrt[3]{1-3x+x^2}$, 则 $z^3=1-3x+x^2$, 于是有

$$3z^2z'=-3+2x,$$
$$6zz'^2+3z^2z''=2,$$
$$6z'^3+18zz'z''+3z^2z'''=0,$$

令 $x=0$ 代入得到

$$z(0)=1,\ z'(0)=-1,\ z''(0)=-\frac{4}{3},\ z'''(0)=-6.$$

合并以上结果就得到

$$f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=\frac{1}{3},\ f'''(0)=6.$$

于是得到所求的展开式为

$$f(x)=\frac{1}{6}x^2+x^3+O_4\ (x\to 0).\quad \square$$

习题 1382 求 $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ 的泰勒展开式至含 x^4 的项.

解 这里的函数 $f(x)$ 于 $x=0$ 处没有定义, 但可以根据连续延拓要求补充定义 $f(0)=1$. 当然还需要证明这样延拓后的函数在点 $x=0$ 处无限多次可导, 但在这里我们只关心如何计算.

采用待定系数法. 设有

$$f(x)=B_0+B_1x+\frac{B_2}{2!}x^2+\frac{B_3}{3!}x^3+\frac{B_4}{4!}x^4+O_5\ (x\to 0),$$

然后就可以展开 $x=(\mathrm{e}^x-1)f(x)$ 如下:

$$\begin{aligned}x=&\Big(B_0+B_1x+\frac{B_2}{2}x^2+\frac{B_3}{6}x^3+\frac{B_4}{24}x^4\Big)\\&\times\Big(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{120}x^5\Big)+O_6\\=&B_0x+\Big(\frac{B_0}{2}+B_1\Big)x^2+\Big(\frac{B_0}{6}+\frac{B_1}{2}+\frac{B_2}{2}\Big)x^3+\Big(\frac{B_0}{24}+\frac{B_1}{6}+\frac{B_2}{4}+\frac{B_3}{6}\Big)x^4\\&+\Big(\frac{B_0}{120}+\frac{B_1}{24}+\frac{B_2}{12}+\frac{B_3}{12}+\frac{B_4}{24}\Big)x^5+O_6\ (x\to 0),\end{aligned}$$

等置两边同幂次项的系数, 就可以依次解出所要的系数如下:

$$\begin{aligned}&B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},B_2=2\Big(-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\Big)=\frac{1}{6},\\&B_3=6\Big(-\frac{1}{24}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}\Big)=0,\\&B_4=24\Big(-\frac{1}{120}+\frac{1}{48}-\frac{1}{72}\Big)=24\cdot\frac{-6+15-10}{720}=-\frac{1}{30}.\end{aligned}$$

于是得到本题的答案为

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+O_5\ (x\to 0).\quad\square$$

注 本题的 $f(x)$ 是伯努利数的生成函数, 系数 $B_i\ (i=1,2,\cdots)$ 就是伯努利数. 在 [23] 的 §7.2.3 中给出了计算 B_n 的一般递推公式.

下面是常见的正切函数的泰勒展开式计算, 将举出几种解法以供比较.

习题 1386 求 $f(x)=\tan x$ 的泰勒展开式至含 x^5 的项.

解 1 利用 $\sin x$, $\cos x$ 和 $\dfrac{1}{1+x}$ 的泰勒公式, 用间接法计算如下:

$$\begin{aligned}\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}&=\frac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+O_7}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+O_6}\\&=\Big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\Big)\Big(1+\Big(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\Big)+\frac{x^4}{4}\Big)+O_7\\&=x+\Big(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\Big)x^3+\Big(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{5}{24}\Big)x^5+O_7\\&=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+O_7\ (x\to 0).\quad\square\end{aligned}$$

解 2 用待定系数法.

从正切函数为奇函数, 因此其展开式中不含 x 的偶次幂项, 又已知 $\tan x\sim x\ (x\to 0)$, 因此只需要两个待定系数就够了. 设

$$\tan x=x+ax^3+bx^5+O_7\ (x\to 0),$$

然后展开等式 $\tan x\cdot\cos x=\sin x$ 的两边得到

$$\begin{aligned}x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+O_7&=(x+ax^3+bx^5+O_7)(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+O_6)\\&=x+\Big(a-\frac{1}{2}\Big)x^3+\Big(b-\frac{a}{2}+\frac{1}{24}\Big)x^5+O_7\ (x\to 0),\end{aligned}$$

等置两边同幂次项的系数就得到

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3},$$

$$b = \frac{a}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{2}{15}. \quad \square$$

解 3 用直接法做, 对正切函数逐次求导得到

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\tan x)'' = 2\sec^2 x \tan x,$$

$$(\tan x)''' = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x,$$

$$(\tan x)^{(4)} = 16\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \tan^3 x,$$

$$(\tan x)^{(5)} = 88\sec^4 x \tan^2 x + 16\sec^6 x + 16\sec^2 x \tan^4 x.$$

用 $x = 0$ 代入得到 $f(x) = \tan x$ 的导数值为

$$f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 2,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 16,$$

于是得到

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O_7. \quad \square$$

解 4 用直接法也不一定像解 3 那样来做. 记 $y = \tan x$, 则有

$$y' = \sec^2 x = 1 + y^2,$$

$$y'' = 2yy',$$

$$y''' = 2y'^2 + 2yy'',$$

$$y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy''',$$

$$y^{(5)} = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)},$$

然后从 $y(0) = 0$ 起即可求出

$$y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 2,\ y^{(4)}(0) = 0,\ y^{(5)}(0) = 16,$$

即得到与解 3 相同的导数值. $\square$

注 由以上计算可见, 我们熟悉的正切函数在点 $x = 0$ 处的泰勒展开式, 要比正弦函数和余弦函数的泰勒展开式复杂得多, 很不容易计算. 若要展开到含有 x^9 项, 则得到

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + O_{11} \ (x \to 0).$$

实际上这种复杂性与习题 1382 的注中提到的伯努利数的出现有关. 关于正切函数的泰勒展开式的一般性讨论可以参考 [23] 的 §7.2.3. 在那里还讨论了 $x\cot x$, $\sec x$ 和 $x\csc x$ 的泰勒展开式.

习题 1387 求 $f(x) = \ln\dfrac{\sin x}{x}$ 的泰勒展开式至含 x^6 的项.

解 这里补充定义 $f(0) = 0$. 可以证明这样延拓后的函数在 $x = 0$ 处无限多次可导. 以下用待定系数法来求解本题.

由于 $f(0) = 0$, $f(x)$ 又是偶函数, 因此有

$$\ln\frac{\sin x}{x}=ax^2+bx^4+cx^6+O_8=x^2(a+bx^2+cx^4)+O_8\ \ (x\to 0).$$

然后按照 $\mathrm{e}^{f(x)}=\dfrac{\sin x}{x}$ 展开两边得到

$$\begin{aligned}&1+x^2(a+bx^2+cx^4)+\frac{x^4}{2}(a+bx^2+cx^4)^2+\frac{x^6}{6}(a+bx^2+cx^4)^3\\&=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}-\frac{x^6}{5040}+O_8\ \ (x\to 0),\end{aligned}$$

等置两边同幂次项的系数就可以求出

$$\begin{aligned}&a=-\frac{1}{6},\\&b=\frac{1}{120}-\frac{a^2}{2}=\frac{1}{120}-\frac{1}{72}=-\frac{1}{180},\\&c=-\frac{1}{5040}-ab-\frac{a^3}{6}=-\frac{1}{5040}-\frac{1}{1080}+\frac{1}{1296}=-\frac{1}{2835},\end{aligned}$$

于是得到本题的答案为

$$\ln\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{180}x^4-\frac{1}{2835}x^6+O_8\ \ (x\to 0).\quad\square$$

2.10.2 若干证明题 (习题 1393)

习题 1393 含有 4 个小题.

习题 1393.1 设 $f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$, 而且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$, 证明

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

解 根据 f 在点 x 处有 $(n+1)$ 阶导数, 可以写出带佩亚诺型余项的泰勒公式:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1})\ \ (h\to 0).$$

将它与题中的带拉格朗日型余项的展开式比较, 可见有

$$\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1})\ \ (h\to 0).$$

将上式的右边第一项移到左边, 除以 $h^{n+1}/n!$, 并整理如下:

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}\cdot\theta=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+o(1)\ \ (h\to 0).$$

令 $h\to 0$, 左式的极限为 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$, 这样就推出存在极限 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$. $\square$

注 本题与 §2.6.2 中的习题 1246–1247 都是对于中值定理的“中值”的讨论. 在美国数学月刊, 第 97 卷 (1989), 205–213 页对本题的多方面应用有讨论 (中译文见数学译林, 第 10 卷 (1991), 第 1 期, 85–92 页).

下面两个习题都是条件加在 f, f'' 上, 结论却是关于 f' 的估计, 于是可以用带拉格朗日型余项的泰勒公式将 f, f', f'' 联系在一起.

习题 1393.3 设 $f(x) \in C^{(2)}[0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$, 而且当 $x \in (0,1)$ 时有 $|f''(x)| \leqslant A$, 证明当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时有

$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}.$$

解 任取一点 $x_0 \in (0,1)$, 写出 $f(0), f(1)$ 在点 x_0 的泰勒展开式如下:

$$f(0) = f(x_0) + f'(x_0)(0 - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0 - x_0)^2,$$

$$f(1) = f(x_0) + f'(x_0)(1 - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - x_0)^2,$$

其中 $0 < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < 1$.

利用 $f(0) = f(1) = 0$, 将两式相减以消去未知的 $f(x_0)$, 就得到对 $|f'(x_0)|$ 的估计:

$$\begin{aligned}|f'(x_0)| &\leqslant \left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x_0^2\right| + \left|\frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - x_0)^2\right| \\ &\leqslant \frac{A}{2}[x_0^2 + (1 - x_0)^2] \leqslant \frac{A}{2},\end{aligned}$$

其中最后一步利用当 $x_0 \in (0,1)$ 时有 $x_0^2 + (1 - x_0)^2 \leqslant [x_0 + (1 - x_0)]^2 = 1$.

由于 $x_0 \in (0,1)$ 是任意取的, 又因为 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 因此在 $[0,1]$ 上处处成立 $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$. □

习题 1393.4 设 $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ 是二阶可微函数, 且

$$M_k = \sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \ \ (k = 0, 1, 2),$$

证明不等式

$$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2.$$

解 1 若 f 是常值函数, 则 $M_1 = M_2 = 0$, 不等式已经成立. 否则有 $M_0 > 0$.

本题与上一题属于同样的类型, 只是区间两侧无端点, 为此引入一个参数 t 如下. 任意取定一点 x_0, 对于 $t > 0$ 写出如下的两个泰勒展开式:

$$f(x_0 - t) = f(x_0) + f'(x_0)(-t) + \frac{f''(\xi_1)}{2}t^2,$$

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + f'(x_0)t + \frac{f''(\xi_2)}{2}t^2,$$

其中 $x_0 - t < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < x + t$.

将以上两式相减就可以对于 $|f'(x_0)|$ 作出如下估计:

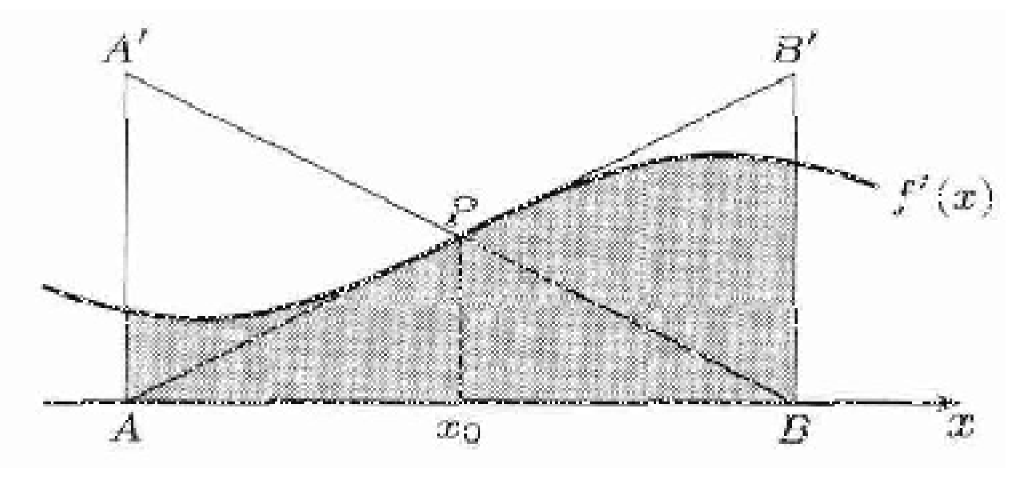
$$\begin{aligned}|f'(x_0)| &\leqslant \frac{1}{2t}\left[|f(x_0 + t)| + |f(x_0 - t)| + \frac{t^2}{2}(|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|)\right] \\ &\leqslant \frac{M_0}{t} + \frac{t}{2}M_2.\end{aligned}$$

这时右边的 $t > 0$ 还没有确定. 一个合理的选择就是使得上式右边尽可能小, 从而得到尽可能好的估计. 由于这两项的乘积是常数 $\frac{1}{2}M_0M_2$, 利用关于 $a, b > 0$ 的平均值不等式 $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ 当 $a = b$ 时成立等号, 可知 t 的最佳选择就是使得这两项相等. 于是从 $\frac{M_0}{t} = \frac{t}{2}M_2$ 即可确定出 $t = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$. 这时该表达式达到最小值 $\sqrt{2M_0M_2}$. 又由于 x_0

可取到所有实数, 可见 $|f'(x)|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 因此 M_1 为有限实数, 且成立所要证明的不等式 $M_1^2 \leqslant M_0M_2$. □

注　这是兰道–阿达马型不等式之一. 可以证明题中的不等式右边的常数 2 已经是最佳值. 关于这方面的材料可以看 [13, 509 页].

解 2　这个解法具有强烈的几何直观意义, 在证明时若用积分学中的牛顿–莱布尼茨公式就非常简单. 下面先用几何语言讲清思路, 给出用积分学工具的证明, 然后在注解中说明, 不用积分学知识也可以实现这个证明.



习题 1393.4 的附图

如附图所示作出 $y=f'(x)$ 的图像. 取点 $P(x_0, f'(x_0))$ 并过该点作斜率为 $\pm M_2$ 的直线与 x 轴相交. 交点为 $A = x_0 - \dfrac{|f'(x_0)|}{M_2}$ 和 $B = x_0 + \dfrac{|f'(x_0)|}{M_2}$.

附图中是 $f'(x_0) > 0$ 的情况, 直线 APB' 的斜率为 M_2, 直线 $A'PB$ 的斜率为 $-M_2$.

利用 $|f'(x)| \leqslant M_2$ 就可见曲线 $y = f'(x)$ 完全落在两个三角形 $\triangle PAA'$ 和 $\triangle PBB'$ 中, 从而 $[A, B]$ 上由 $f'(x)$ 生成的曲边梯形面积 (在附图中的阴影区) S 大于等于三角形 $\triangle PAB$ 的面积. 对于 $f'(x_0) < 0$ 也有类似的结论. 从牛顿–莱布尼茨公式有

$$S = \int_A^B f'(x)\,\mathrm{d}x = f(B) - f(A),$$

于是得到

$$S_{\triangle PAB} = \frac{f'^2(x_0)}{M_2} \leqslant |S| \leqslant 2M_0 \Longrightarrow f'^2(x_0) \leqslant 2M_0M_2.$$

利用 x_0 的任意性就得到所要的不等式 $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$. □

注　可以看出解 2 与 §2.6.5 的习题 1266 的附图中提示的几何方法是相同的, 因此只要用该习题中所用的引理 2 就可将解 2 改写成只用微分学工具的一个证明.

只对 $f'(x_0) > 0$ 写出证明. 用拉格朗日中值定理和 M_2 的定义可知成立不等式

$$|f'(x) - f'(x_0)| \leqslant M_2|x - x_0|,$$

且在 $|x - x_0| \leqslant \dfrac{f'(x_0)}{M_2}$, 即 $x \in [A, B]$ 时有 $f'(x) \geqslant 0$. 然后作辅助函数 $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0)$. 在区间 $[x_0, B]$ 上对 $F(x)$ 应用引理 2, 就得到

$$-\frac{f'^2(x_0)}{2M_2} \leqslant F(B) - F(x_0) = f(B) - \frac{f'^2(x_0)}{M_2} - f(x_0) \leqslant \frac{f'^2(x_0)}{2M_2},$$

这就提供了 $f(B) - f(x_0) \geqslant \dfrac{f'^2(x_0)}{2M_2}$. 又在区间 $[A, x_0]$ 上对 $F(x)$ 应用引理 2, 得到 $f(x_0) - f(A) \geqslant \dfrac{f'^2(x_0)}{2M_2}$. 合并两者就得到了解 2 所要求的不等式

$$\frac{f'^2(x_0)}{M_2} \leqslant f(B) - f(A) \leqslant 2M_0.$$

以下已经没有困难. 对 $f'(x_0) < 0$ 的讨论是类似的.

2.10.3 近似计算与误差估计 (习题 1394–1397)

在 §2.4 中已经通过微分与函数增量的关系, 即

$$\Delta f = \mathrm{d}f + o(\Delta x) \ \ (\Delta x \to 0),$$

用微分代替增量进行近似计算. 在习题 1097–1110 中的许多题都是如此. 然而这类近似计算只是"以直代曲", 也就是用 $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ 来逼近 $f(x)$, 这只可能在 $\Delta x = x - x_0$ 充分小的情况才能取得较好的近似, 同时还无法对于误差作出估计.

在有了带拉格朗日型余项的泰勒公式之后, 我们取得了两个方面的重大进展: (1) 记 $\Delta x = x - x_0$, 则就是用 Δx 的多项式, 即泰勒多项式, 来逼近函数 $f(x)$; (2) 对于由此引起的误差可以作出估计.

习题 1394 估计下列近似公式的绝对误差:

(a) $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$, 其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$;

(b) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$, 其中 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

(c) $\tan x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$, 其中 $|x| \leqslant 0.1$;

(d) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$, 其中 $0 \leqslant x \leqslant 1$.

解 这里都是用函数 $f(x)$ 的泰勒多项式来逼近该函数, 因此都可以用带拉格朗日型余项来估计误差.

(a) 写出 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 在点 $x = 0$ 处的泰勒展开式至含有 x^n 项, 则利用 $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$ 对所有正整数 n 成立, 就有

$$R_n(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$, 因此当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时就可以估计余项的绝对误差限为

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}. \quad \square$$

注 回顾 §1.2.3 的习题 72, 其中对于 $x = 1$ 的情况给出了更好的估计 $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n!n}$. 可以证明这对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 也是成立的. 然而那里使用的是针对数 e 的特殊方法, 而这里却是可以用于一大类函数的普遍有效的方法.

(b) 写出 $f(x) = \sin x$ 在点 $x = 0$ 处的泰勒展开式至含有 x^4 项, 则其余项就是

$$R_4(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5,$$

其中利用了 $(\sin x)^{(5)} = \cos x$.

于是当 $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时就可以估计得到绝对误差限为

$$|R_4(x)| \leqslant \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{3840} \approx 0.000\,26. \quad \square$$

注 由于 $\sin x$ 是奇函数, 它的泰勒展开式中偶次项系数均为 0. 将 $x - \dfrac{1}{6}x^3$ 看成为三次泰勒多项式或者四次泰勒多项式都是正确的, 然而所得到的误差限是不一样的, 前者要比后者大. 在下一个小题中也有同样的问题.

(c) 与上面的小题 (b) 相同, 写出 $f(x)=\tan x$ 在点 $x=0$ 处的泰勒展开式至含有 x^4 的项, 则需要计算 $(\tan x)^{(5)}$. 利用 §2.10.1 的习题 1386 的解 3 中的计算, 即有①

$$(\tan x)^{(5)}=88\sec^4 x\tan^2 x+16\sec^6 x+16\sec^2 x\tan^4 x.$$

由于这是偶函数, 且在 $[0,0.1]$ 上单调递增, 因此只要用 $x=0.1$ 代入就得到了 $f(x)=\tan x$ 时的 $|f^{(5)}(\theta x)|$ 的上界估计. 计算得到 $(\tan x)^{(5)}\Big|_{x=0.1}=17.394$, 于是就可以估计绝对误差为

$$|R_4(x)|\leqslant\frac{1}{120}\cdot 17.394\cdot 10^{-5}\approx 1.45\times 10^{-6}.\quad\square$$

(d) 写出 $f(x)=\sqrt{1+x}$ 在点 $x=0$ 处的泰勒展开式至含有 x^2 项, 则

$$R_2(x)=\frac{f'''(\theta x)}{6}x^3,$$

其中 $f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, 因此就可以估计绝对误差限为

$$|R_2(x)|\leqslant\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{16}=0.0625.\quad\square$$

习题 1396 利用泰勒公式对下列各值进行近似计算, 并估计误差.

(a) $\sqrt[3]{30}$;　(b) $\sqrt[5]{250}$;　(c) $\sqrt[12]{4\,000}$;

(d) $\sqrt{\mathrm{e}}$;　(e) $\sin 18^\circ$;　(f) $\ln 1.2$;

(g) $\arctan 0.8$;　(h) $\arcsin 0.45$;　(i) $(1.1)^{1.2}$.

分析　本题没有提出近似计算的精度要求, 读者可以参考《习题集》的答案来做. 这里只指出这类问题中存在两种可能的误差.

第一种误差是由于只能取有限项的泰勒多项式而引起的, 一般称为截断误差. 它可以用余项来估计.

第二种误差是对有限项作计算时带来的舍入误差, 这里要考虑每一步的计算需要多少位数字才合适, 一般可以采取多留几位的方法.

如果是手算, 请参考前面 §1.2.3 的习题 72 中对于数 e 的近似计算过程, 这里不再重复. 如果用计算器来计算泰勒多项式, 则由于计算器一般有 10 位有效数字, 而平时遇到的多数问题中的误差要求没有这样高, 因此已经足够.

下面只对于上述习题的 9 个小题中的 (a) 和 (d) 写出解答过程.

解　(a) 为计算 $\sqrt[3]{30}$, 先找出与 30 最接近的立方数 27, 然后将根式写成为

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}},$$

然后就可以用 $\alpha=\frac{1}{3}$ 的二项式函数 $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ 的泰勒展开式来做.

---

① 利用恒等式 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$ 可以得到较简短的形式:

$$(\tan x)^{(5)}=120\sec^4 x\tan^2 x+16\sec^2 x.$$

由于本题没有事先要达到多少精度的要求, 因此我们看只用含有二次项的泰勒多项式能达到什么样的精度. 这时有

$$\sqrt[3]{30}=3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\frac{1}{9^2}\right)+R_2.$$

用计算器求出近似值为 3.106 995 885. 为了决定其中几位是可靠的, 需要估计余项.

写出

$$R_2(x)=3\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\cdot(1+\theta x)^{-\frac{8}{3}}x^3,$$

其中 $0<\theta<1$. 于是可以估计得到

$$|R_2|\leqslant\frac{10}{3^2\cdot 3!}\frac{1}{9^3}\approx 2.54\times 10^{-4}.$$

由此可见取 $\sqrt[3]{30}\approx 3.107$ 时可确保写出的数字都是精确的, 也就是说误差不超过 0.5×10^{-3}, 或者说 $\sqrt[3]{30}$ 介于 3.106 5 到 3.107 5 之间①. (读者可以参看本书在 §1.1.5 开始时关于精确数字的定义的解释.)

用计算器求出 $\sqrt[3]{30}\approx 3.107\,232\,506$, 可见上述分析是正确的, 即取到二次项时只能保证前 4 位数字是可靠的.

由于《习题集》的答案中也是 3.107 2, 可见该书的作者在做本题时所用的项数至少包含了 x^3 项在内. 读者可以一试. 从略. □

解 (d) 计算 $\sqrt{\mathrm{e}}$ 有两个方法. 第一种方法是用泰勒公式并用拉格朗日型余项估计误差, 第二种方法是模仿习题 72 的做法, 实际上就是用无穷级数来做. 从习题 1394(a) 可见在误差估计方面后者可能更准确一点.

下面我们用第一种方法做.

如上面在解小题 (a) 所说, 在没有指定精度要求情况下的计算带有盲目性. 为此用"逆向"思维方法, 即先看《习题集》的答案是 1.648 72, 这表明误差不超过 0.5×10^{-5}. 然后来看应当取多少项.

利用习题 1394(a), 当 e^x 中的 $x=\frac{1}{2}$ 时有余项估计

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant\frac{1.7}{(n+1)!2^{n+1}},$$

其中 $0<\theta<1$, 并利用 $1.7^2=2.89>\mathrm{e}$, 取 $\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}}<1.7$. 然后经过尝试知道取 $n=6$ 时 $R_6\leqslant 2.64\times 10^{-6}$ 满足要求.

于是有

① 如果读者已经学过无穷级数中的莱布尼茨型级数 (见《习题集》 §5.2), 就应当知道它的相继部分和作为级数和的近似值恰好给出了上界和下界, 并由此形成一个长度趋于 0 的区间套, 这个区间套的公共点就是级数和. 此外, 用某个部分和作为级数和的近似值时, 其误差不超过弃去的第一项. 由于 $\sqrt[3]{1+x}$ 的泰勒级数从第二项起就是莱布尼茨型级数, 因此可以知道本题的 3.106 996 是下界, 而它加上 2.54×10^{-4} 后是上界. 于是 $\sqrt[3]{30}$ 介于 3.106 996 到 3.107 250 之间.

$$e^{\frac{1}{2}} \approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2^4}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{2^5}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{2^6}$$
$$\approx 1.648\,719\,618.$$

利用前面的误差分析, 又考虑到 e^x 的无穷级数展开式中当 $x>0$ 时每一项大于 0, 因此可见$\sqrt{e}$ 的值介于 1.648 719 与 1.648 722 之间, 因此取 1.648 72 就保证每一位都是精确数字, 即误差不超过 0.5×10^{-5}. 用计算器可计算出 $\sqrt{e}\approx 1.648\,721\,271$, 与以上分析一致. □

2.10.4 局部泰勒公式的一些应用 (习题 1398–1413)

如前所说, 局部泰勒公式就是带佩亚诺型余项的泰勒公式.

这里的第一个应用是用于极限计算 (已见于 §2.9.1 的习题 1333 的解 3).

习题 1398–1406 是使用局部泰勒公式计算极限的常规题. 这里建议, 在计算中应同时考虑使用等价量代换法等方法, 这样可避免在泰勒展开式时作过多的不必要计算.

习题 1406 (a) 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}-\cot x\Big)$.

解 1 将 $\cot x$ 写成正弦函数除以余弦函数的商, 然后作泰勒展开:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}-\cot x\Big)&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3-x(1-\frac{1}{2}x^2)+O_5}{x^3}\\&=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 如果能利用 $\tan x\sim x\ (x\to0)$ 并记得关于 $\tan x$ 的泰勒展开式, 就有

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big(\frac{1}{x}-\cot x\Big)=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^3+O_5}{x^3}=\frac{1}{3}.\quad\square$$

习题 1406 (b) 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)-x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

解 如下处理即可求出所要的答案:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)-x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\Big(\sin x-\frac{1}{3!}\sin^3x+\frac{1}{5!}\sin^5x+O_7\Big)-x\Big(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+O_6\Big)}{x^5}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\Big(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5\Big)-\frac{x^3}{6}\Big(1-\frac{1}{2}x^2\Big)+\frac{x^5}{120}-\Big(x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5\Big)+O_7}{x^5}\\&=\frac{1}{120}+\frac{1}{12}+\frac{1}{120}+\frac{1}{9}=\frac{19}{90}.\quad\square\end{aligned}$$

接下来的习题 1407–1409 是求给定函数当 $x\to0$ 时的主项 Cx^n, 其中 $C\neq0$. 下面给出习题 1407 的解答.

习题 1407 求 $y=\tan(\sin x)-\sin(\tan x)$ 当 $x\to 0$ 时的主项 Cx^n $(C\neq 0)$.

解 由于 $y(x)$ 是奇函数, 其主项的次数必是奇数. 经尝试知道主项不低于五次项. 在 §2.10.1 的习题 1386 的基础上, 试用

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+cx^7+O(x^9)\ \ (x\to 0),$$

其中系数 c 暂时不必求出. 然后作以下展开:

$$\begin{aligned}\tan(\sin x) &= \sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{2}{15}\sin^5 x+c\sin^7 x+O_9\\ &= \Big(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{7!}x^7\Big)+\frac{1}{3}\Big(x^3-\frac{1}{2}x^5+\big(\frac{1}{12}+\frac{1}{40}\big)x^7\Big)\\ &\quad+\frac{2}{15}\Big(x^5-\frac{5}{6}x^7\Big)+cx^7+O_9\\ &= x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5+\Big(-\frac{1}{7!}+\frac{13}{360}-\frac{1}{9}+c\Big)x^7+O_9\ \ (x\to 0),\\ \sin(\tan x) &= \tan x-\frac{1}{6}\tan^3 x+\frac{1}{120}\tan^5 x-\frac{1}{7!}\tan^7 x+O_9\\ &= \Big(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+cx^7\Big)-\frac{1}{6}\Big(x^3+x^5+\big(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\big)x^7\Big)\\ &\quad+\frac{1}{120}\Big(x^5+\frac{5}{3}x^7\Big)-\frac{1}{7!}x^7+O_9\\ &= x+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{40}x^5+\Big(c-\frac{11}{90}+\frac{1}{72}-\frac{1}{7!}\Big)x^7+O_9\ \ (x\to 0),\end{aligned}$$

于是就可看出主项为 Cx^7, 并得到

$$y=\Big(\frac{13}{360}-\frac{1}{9}+\frac{11}{90}-\frac{1}{72}\Big)x^7+O_9=\frac{1}{30}x^7+O_9\ \ (x\to 0).$$

即所求的主项是 $\frac{1}{30}x^7$. □

注 从上述计算过程可见展开到 x^7 是必要的, 然而却并不需要系数 $c=\frac{17}{315}$ 的具体数值, 同样也不必计算出 $7!=5\,040$.

习题 1410 的三个小题都是按照一定的渐近性态的要求来选取待定系数, 其中后两个习题是用有理分式函数来逼近其他函数. 下面讲解其中之一.

习题 1410.3 选择系数 A,B,C 和 D, 使得当 $x\to 0$ 时有渐近等式

$$\mathrm{e}^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5)\ \ (x\to 0).$$

解 确定 4 个待定系数一般需要 4 个条件.

将渐近等式的两边乘以 $1+Cx+Dx^2$, 就得到

$$\begin{aligned}&1+Ax+Bx^2=\mathrm{e}^x(1+Cx+Dx^2)+O_5\\ &=(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24})(1+Cx+Dx^2)+O_5\\ &=1+(1+C)x+(\frac{1}{2}+C+D)x^2\\ &\qquad+(D+\frac{C}{2}+\frac{1}{6})x^3+(\frac{D}{2}+\frac{C}{6}+\frac{1}{24})x^4+O_5\ \ (x\to 0).\end{aligned}$$

等置两边的同幂次项的系数, 就得到关于待定系数的线性方程组:

$$1+C=A,$$
$$\frac{1}{2}+C+D=B,$$
$$D+\frac{C}{2}+\frac{1}{6}=0,$$
$$\frac{D}{2}+\frac{C}{6}+\frac{1}{24}=0.$$

即可解出

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{12},\ C=-\frac{1}{2},\ D=\frac{1}{12}.\quad\square$$

下面的习题 1411 是推导近似公式, 有 4 个小题. 解答其中的第 2 小题.

习题 1411(b) 设 $|x|$ 为小量, 推导 $\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ 的简单近似公式.

解 以 $x\to 0$ 时的 x 为一阶无穷小量, 推导如下:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}&=\sqrt[3]{1+\frac{2x}{1-x}}-\sqrt[3]{1-\frac{2x}{1+x}}\\&=\Big(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{1-x}+O_2\Big)-\Big(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{1+x}+O_2\Big)\\&=\frac{4}{3}x+O_2\ \ (x\to 0),\end{aligned}$$

可见近似公式为 $\dfrac{4}{3}x$. $\square$

下面是两个应用题. 它们都是关于圆弧长度的近似计算方法.

习题 1412 设 x 的绝对值为小量时, 推导

$$x=\alpha\sin x+\beta\tan x$$

的近似公式, 精确到含 x^5 的项. 利用这个公式给出对小角度弧长的近似求法.

解 用局部泰勒公式得到

$$\begin{aligned}\alpha\sin x+\beta\tan x=\alpha(x&-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5)\\&+\beta(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5)+O_7\ \ (x\to 0),\end{aligned}$$

于是应当使得 $\alpha+\beta=1$, $-\dfrac{1}{6}\alpha+\dfrac{1}{3}\beta=0$, 这样就解得 $\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\beta=\dfrac{1}{3}$, 且同时就有:

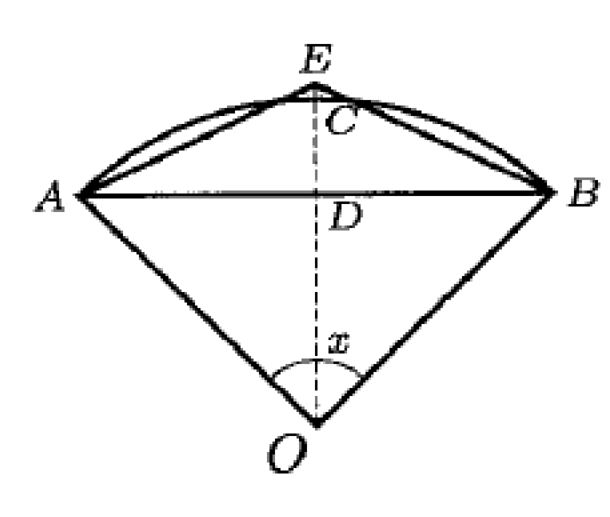
$$x=\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x-\frac{1}{20}x^5+O_7\ \ (x\to 0).$$

于是对于半径为 R 的小角度 x 的弧长 s 有近似公式

$$s=Rx\approx R\Big(\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x-\frac{1}{20}x^5\Big).\quad\square$$

注 对于圆半径 $R=1$, 看角度 x 并非很小的情况. 对于 $x=\pi/8\approx 0.392\,699$, 公式的前两项给出 0.393 193, 小数点后的前三位是精确的. 在减去 $\dfrac{1}{20}x^5$ 之后则得到 0.392 727, 取 0.392 7 则精确到小数点后第四位.

习题 1413 估计如下的切比雪夫规则的相对误差: 圆弧的长近似等于等腰三角形的两腰长之和, 这个三角形的底边是这段弧的弦, 高为这段弧拱高的 $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$.



习题 1413 的附图

解 不妨设圆半径为单位长度. 如附图所示, 圆弧 $\widehat{AB}$ 长等于其圆心角 x, 弦 $AB = 2\sin\dfrac{x}{2}$, 圆弧的拱高 (即矢) $CD = 1-\cos\dfrac{x}{2}$, 题中的等腰三角形的高

$$ED = \sqrt{\frac{4}{3}}\cdot CD = \sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right).$$

于是等腰三角形的两腰长之和为

$$AE+EB = 2\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2}.$$

用泰勒展开式计算根号下的表达式得到

$$\begin{aligned}
\sin^2\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 &= \frac{7}{3}+\frac{1}{3}\cos^2\frac{x}{2}-\frac{8}{3}\cos\frac{x}{2}\\
&= \frac{5}{2}+\frac{1}{6}\cos x-\frac{8}{3}\cos\frac{x}{2}\\
&= \frac{5}{2}+\frac{1}{6}\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}\right)\\
&\quad -\frac{8}{3}\left(1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{2^4\cdot 24}-\frac{x^6}{2^6\cdot 720}\right)+O_8\\
&= \frac{x^2}{4}-\frac{x^6}{5\,760}+O_8\ \ (x\to 0).
\end{aligned}$$

于是误差为

$$\begin{aligned}
\widehat{AB}-(AE+EB) &= x-2\sqrt{\frac{x^2}{4}-\frac{x^6}{5\,760}+O_8}\\
&= x-x\sqrt{1-\frac{x^4}{1\,440}+O_6}\\
&= x-x\left(1-\frac{x^4}{2\,880}+O_6\right)=\frac{x^5}{2\,880}+O_7\ \ (x\to 0).
\end{aligned}$$

可知相对误差限为

$$\delta \approx \frac{x^4}{2\,880}.\quad \square$$

注 本题和上题都是关于圆弧长度的近似计算方法. 从上题的计算可知, 若用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的组合计算, 则相对误差限为 $\dfrac{x^4}{20}$, 因此本题的切比雪夫公式要精确得多. 例如对于 $x=\pi/8$, 则该公式给出 0.392 696, 小数点后的前五位都是精确的.

小结 从以上的应用可见, 局部泰勒公式虽然不能用于估计绝对误差限, 但还是可以用于估计得到与 $x\to 0$ 有关的相对误差限, 这对于评价近似公式是有用的.

§2.11 函数的极值. 函数的最大值和最小值 (习题 1414–1470)

内容简介 本节包含了关于求极值与最值的基本习题, 此外还有极值问题在某些不等式与函数之间的绝对偏差等方面的应用.

按照《习题集》在本节的前言, 所用的极值概念在其他文献中常称为严格极值, 即在极值点 x_0 的某一个邻域内函数值 $f(x_0)$ 严格大于 (或严格小于) 其他点上的函数值.

请读者注意, 将极值限制为严格极值概念也会带来一些不便. 例如, 在区间上的函数的最值点若不是端点的话, 就不一定是满足严格要求的极值点. 这对于费马定理和罗尔定理的叙述或证明也会造成麻烦. 但就本节涉及的习题而言没有什么问题.

2.11.1 极值的研究 (习题 1414–1428)

由于极值概念具有明显的几何意义, 因此在本小节的习题求解时建议多从几何上观察问题及其答案, 在有可能时利用 §1.4 所学的作函数草图的技巧是有用的. 反过来说, 在确定了单调性与极值点之后, 函数的图像就可以作得更准确了.

习题 1417 研究函数 $y = x^m(1-x)^n$ 的极值, 其中 n, m 为正整数.

分析 从几何上看, $y(x)$ 的图像在 $x = 0$ 的邻近与 x^m 相似, 在 $x = 1$ 的邻近则与 $(1-x)^n$ 相似, 而 x^m 在 $x = 0$ 以及 $(1-x)^n$ 在 $x = 1$ 是否取到极值, 则取决于 m, n 的奇偶性, 因此 m, n 的奇偶性对于 $x = 0, 1$ 这两个点是否是极值点有重大关系.

另一方面, 从 $y(0) = y(1) = 0$ 和 $y(x)$ 在 $(0,1)$ 上大于 0, 就可以从连续函数的最值定理知道在 $[0,1]$ 上的最值在 $(0,1)$ 内达到. 于是由费马定理知道在该点处导数为 0. 这样的点的存在性也可以从罗尔定理知道. 于是本题的答案大体上已经清楚. □

解 求导数得到

$$\begin{aligned} y' &= mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} \\ &= x^{m-1}(1-x)^{n-1} \cdot [m-(m+n)x], \end{aligned}$$

就可以解得 $y' = 0$ 的三个根:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{m}{m+n},\ x_3 = 1.$$

先看点 $x_1 = 0$. 在该点的邻近, $y'(x)$ 的符号与 m 的奇偶性有关. 若 m 为偶数, 则 $m-1$ 为奇数, 在 $x_1 = 0$ 左侧邻近 $y' < 0$, 在其右侧邻近 $y' > 0$, 因此 $x_1 = 0$ 是极小值点, 极小值为 0. 若 m 为奇数, 则 $m-1$ 为偶数, 在 $x_1 = 0$ 两侧都有 $y' > 0$, 因此 y 在 $x_1 = 0$ 的一个邻域内严格单调递增, $x_1 = 0$ 不是极值点.

再看点 $x_2 = \dfrac{m}{m+n} \in (0,1)$. 在该点邻近导函数 $y'(x)$ 的符号由其表达式的最后一个因子 $m-(m+n)x$ 的符号决定, 因此可见在点 x_2 左侧邻近 $y' > 0$, 而在其右侧邻近 $y' < 0$, 因此 x_2 是极大值点. 极大值为

$$f(x_2) = \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

在点 $x_3 = 1$ 邻近, $y'(x)$ 的符号与 n 的奇偶性有关. 用与 m 同样的讨论知道, 当 n 为偶数时 $x_3 = 1$ 是极小值点, 极小值为 0. 而当 n 为奇数时 y 在 $x_3 = 1$ 的一个邻域内严格单调递减, $x_3 = 1$ 不是极值点. □

练习 建议读者对 m, n 的奇偶性的四种组合情况分别作出示意图.

习题 1420 研究 $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$ 的极值, 其中 n 为正整数.

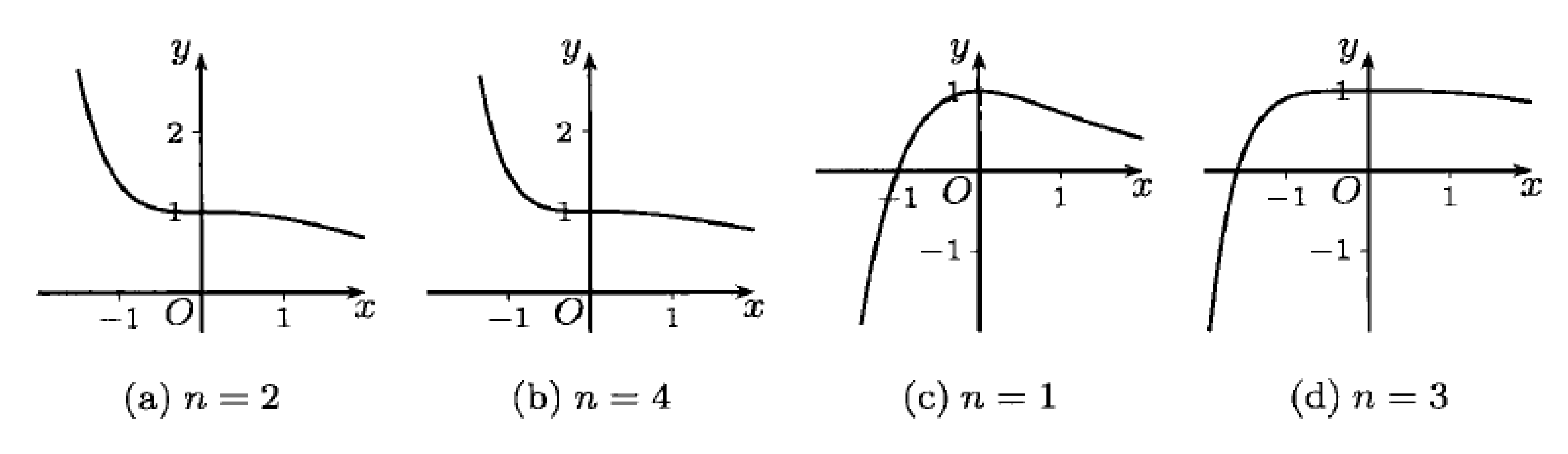
解 此题不容易从几何上考虑. 直接求导得到

$$y' = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)\mathrm{e}^{-x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-x}$$
$$= -\frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x},$$

可见 $y' = 0$ 的唯一解是 $x = 0$. 这时 n 的奇偶性起决定性作用.

当 n 为偶数时, y' 在 $x \neq 0$ 时总是小于 0, 因此 y 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调递减, 而当 n 为奇数时, y' 在 $x < 0$ 时大于 0, 在 $x > 0$ 时小于 0, 因此 $x = 0$ 是极大值点, 极大值为 1. □

注 $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ 是 e^x 在 $x = 0$ 的泰勒多项式. 本题反映了它们的特殊性质. 这方面还可参考 [23] 的第八章第二组参考题 4. 为了对本题的函数有点感觉, 在下面的附图中分别列出了 n 为偶数和奇数的 4 种情况供参考. 显然无论取什么 n, $y(+\infty) = 0$ 和 $y(-\infty) = \infty$ 总是成立的.



(a) $n = 2$　(b) $n = 4$　(c) $n = 1$　(d) $n = 3$

习题 1420 的附图

习题 1423 研究函数 $f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$ 在点 $x = x_0$ 时的极值 (n 为正整数), 其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 时连续, 且 $\varphi(x_0) \neq 0$.

解 由于只知 $\varphi(x)$ 连续, 只能直接考察 $f(x) - f(x_0)$. 利用 $f(x_0) = 0$, 因此就有

$$f(x) - f(x_0) = f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x).$$

从 $\varphi(x)$ 在点 x_0 连续且 $\varphi(x_0) \neq 0$, 可见在点 x_0 的一个邻域内 $\varphi(x)$ 与 $\varphi(x_0)$ 同号. 于是当 n 为偶数时, 在 x_0 的上述邻域内, 只要 $x \neq x_0$, $f(x) - f(x_0)$ 就保号, 即 x_0 为极值点. 可以看出, 当 $\varphi(x_0) > 0$ (< 0) 时, x_0 为极小 (大) 值点. 极值 $f(x_0) = 0$.

反之, 当 n 为奇数时, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 两侧取相反的符号, 因此 x_0 不是极值点. □

习题 1425 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极大值, 那么在这个点的某个充分小的邻域内, 能否断定这个函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧是递增的而右侧是递减的?

考察例子: $f(x)=2-x^2\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$, 其中 $x\neq 0$, $f(0)=2$.

习题 1425 的附图

解 题中提供的例子表明, 虽然我们经常从 f 在点 x_0 左侧递增、右侧递减来判定 x_0 点是极大值点, 但这只是充分条件, 并不是必要条件.

如图所示, 函数 $f(x)$ 的图像夹在两条虚线之间, 它们的方程是

$$y=2-x^2,\ y=2-3x^2,$$

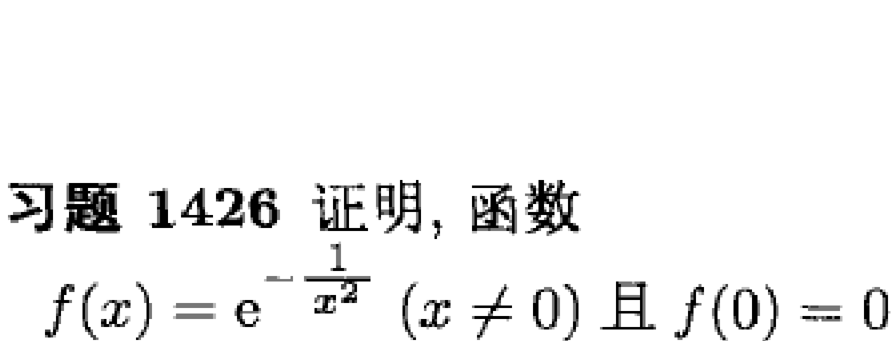
再由于 $f(0)=2$, 这就保证了 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处极大.

另一方面, 从 $x\neq 0$ 时的导函数

$$f'(x)=-2x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+\cos\frac{1}{x}$$

可见, 当 $|x|$ 充分小时, 导数 $f'(x)$ 的符号完全为上式右边的最后一项 $\cos\dfrac{1}{x}$ 所决定, 因此 $f(x)$ 的图像在点 $(0,2)$ 的两侧无限多次振动, 从而不可能是单调的. □

注 这里主要还是利用了 §2.1.3 的习题 991 中的函数 $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$. 还可以参考 §2.7.1 的习题 1287, 其中构造了在某点单调但在其任何邻域内不单调的例子.



习题 1426 证明, 函数

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0)\text{ 且 } f(0)=0$$

在点 $x=0$ 处有极小值, 而函数

$$g(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\ (x\neq 0)\text{ 且 } g(0)=0$$

在点 $x=0$ 处没有极值, 尽管有

$$f^{(n)}(0)=0,\ g^{(n)}(0)=0\ (n=1,2,\cdots).$$

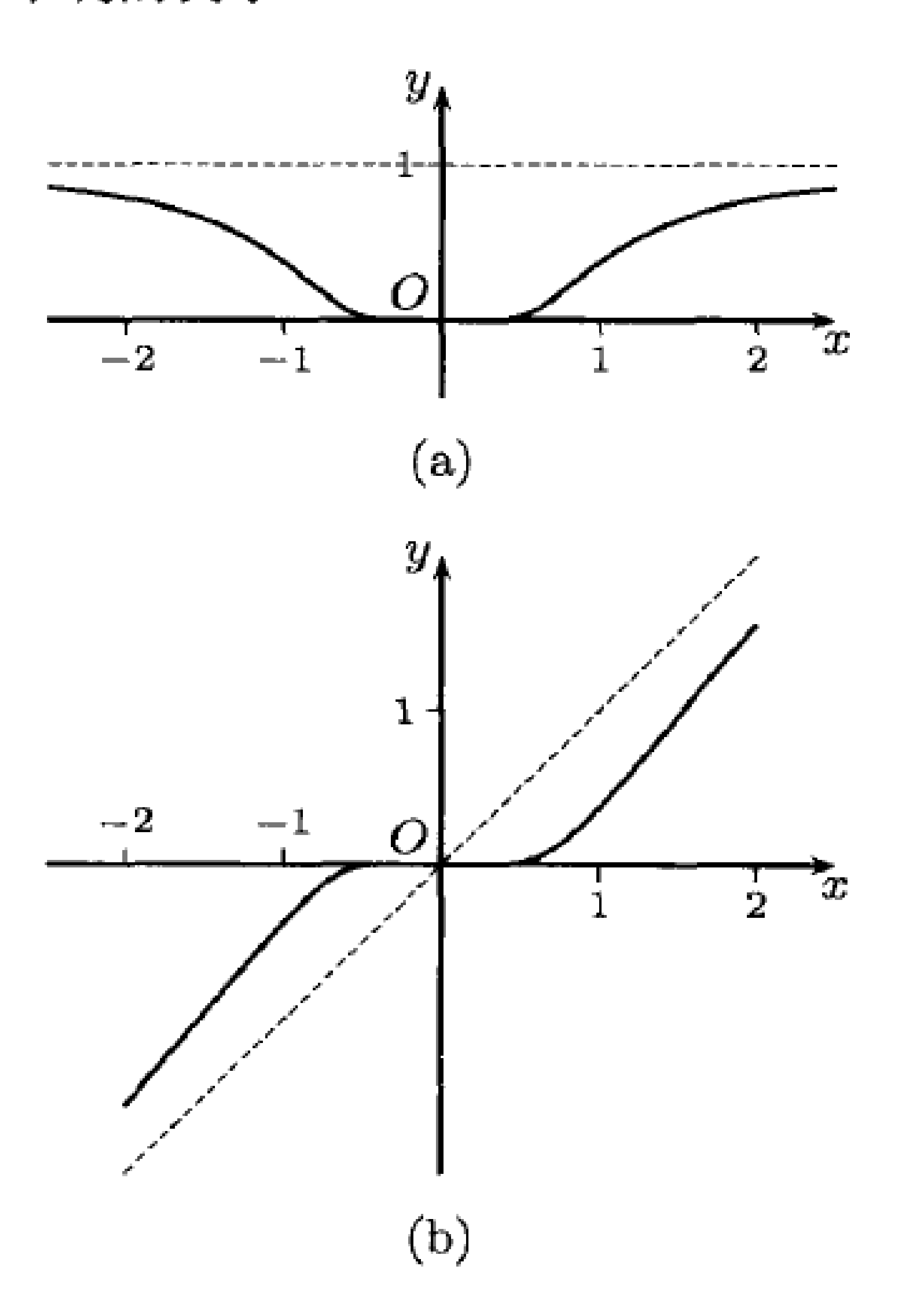
作出这些函数的图像.

解 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处均大于 0, $f(0)=0$, 因此 $x=0$ 是极小值点 (见附图 (a)).

在 $x\neq 0$ 时将 $g(x)$ 对 x 求导得到

$$g'(x)=\left(1+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},$$

可见 $g(x)$ 是严格单调递增函数, 因此没有任何极值点 (见附图 (b)).



习题 1426 的附图

在 §2.5.5 的习题 1225 中, 已经证明了对所有正整数 n 均有 $f^{(n)}(0)=0$. 在这个基础上就容易证明对所有正整数 n 也有 $g^{(n)}(0)=0$. 为此只要对 $g(x)=xf(x)$ 用莱布尼茨公式得到

$$g^{(n)}(x)=xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x), n=1,2,\cdots,$$

令 $x=0$ 代入, 可见所要的结论成立. □

注　本题的函数 $f(x)$ 的图像已见于附录一的习题 279(e), 又见于 §2.5.5 的习题 1225 的附图中的分图 (a). 在那里对于该图像为何在 $x=0$ 附近极其平坦作了解释. 用 §2.10 的泰勒公式的语言来说, 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的每一个泰勒多项式都是零多项式.

习题 1427 研究下列函数的极值

(a) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\sin\dfrac{1}{x}\right)$ $(x\neq 0)$ 且 $f(0)=0$;

(b) $f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$ $(x\neq 0)$ 且 $f(0)=0$.

作出这些函数的图像.

解　(a) 由于 $\sqrt{2}>1$, 因此 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 时大于 0, 可见 $x=0$ 是极小值点.

为了研究其他点是否会是极值点, 求导得到

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\cdot\frac{1}{x^2}\left(\operatorname{sgn}x\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x}\right),$$

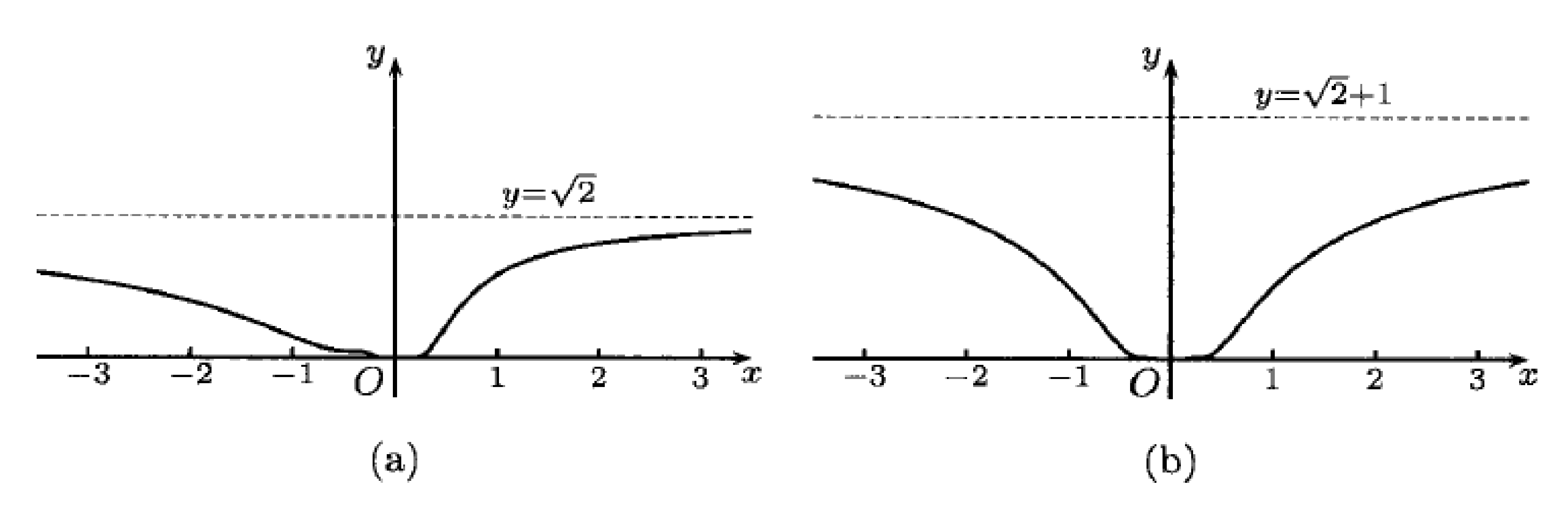
利用对任何 α 都有

$$|\pm\sin\alpha\pm\cos\alpha|\leqslant\sqrt{2},$$

可见 $f'(x)$ 只在离散点上会等于 0, 因此在 $x>0$ 时 f 严格单调递增, 而在 $x<0$ 时 f 严格单调递减, 所以 $f(x)$ 除 $x=0$ 之外没有其他极值点.

(b) 讨论与 (a) 相同, 从略.

两个函数的图像略有差别: 两者的水平渐近线不同, (b) 是偶函数, (a) 不是. □



习题 1427 的附图

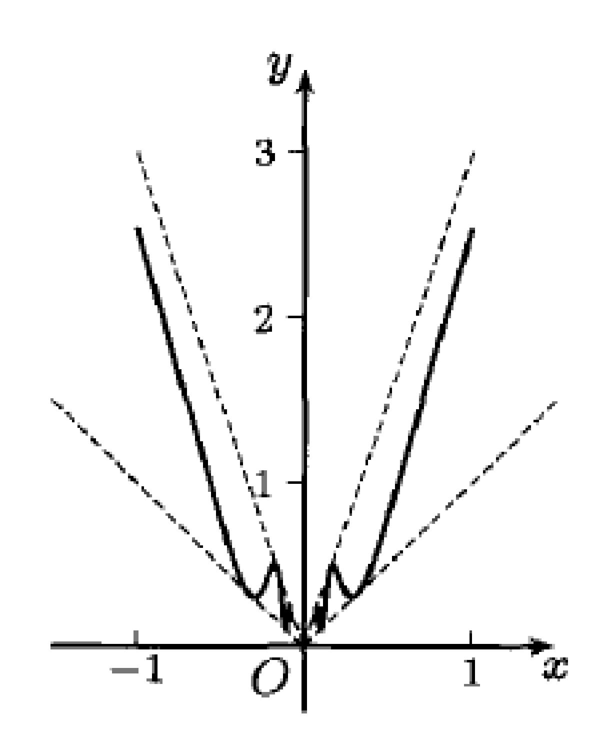
习题 1428 研究函数

$$f(x)=|x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)\ (x\neq 0)\text{ 且 }f(0)=0$$

在点 $x=0$ 的极值, 并作这个函数的图像.

解 容易看出 $x=0$ 是极小值点.

本题表明在极小值点 $x=0$ 的任何一个邻域内函数 $f(x)$ 可以有无穷多个其他极值点. 如附图所示, $f(x)$ 为偶函数, 它的图像夹在 $y=|x|$ 和 $y=3|x|$ 之间, 而当 $|x|\to 0$ 时有无穷多次振动.



习题 1428 的附图

为了确切了解这样的情况, 只需要计算 $x\neq 0$ 时的导数. 以下只看 $x>0$ 的情况. 从

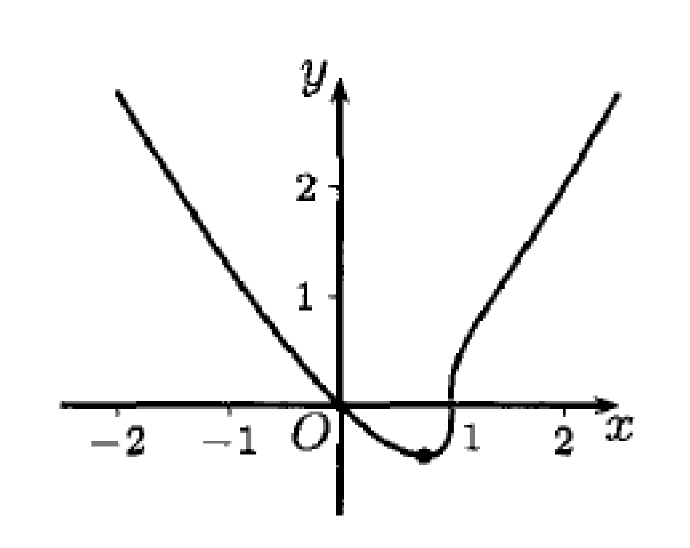
$$f'(x)=2+\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x},$$

可见, 由于前两项的绝对值不超过 3, 当 $|x|<\dfrac{1}{3}$ 时, 在使得 $\sin\dfrac{1}{x}$ 等于 ± 1 的点 x 处, 导数 $f'(x)$ 的符号完全由 $\sin\dfrac{1}{x}$ 决定. 这已经可以推出 $f'(x)$ 的符号当 $x\to 0$ 时一定有无穷多次变号, 从而 $f(x)$ 有无穷多个极大值点和极小值点. □

2.11.2 极值、最值和确界的计算 (习题 1429–1455)

习题 1429–1444 是一些简单的极值计算, 我们只举两个例子.

习题 1436 求 $y=x\sqrt[3]{x-1}$ 的极值.



习题 1436 的附图

解 从对于指数为 $\dfrac{1}{3}$ 的幂函数的了解可知在点 $x=1$ 处本题的 $y(x)$ 不可微. 除了这个点之外, 可以直接求导得到

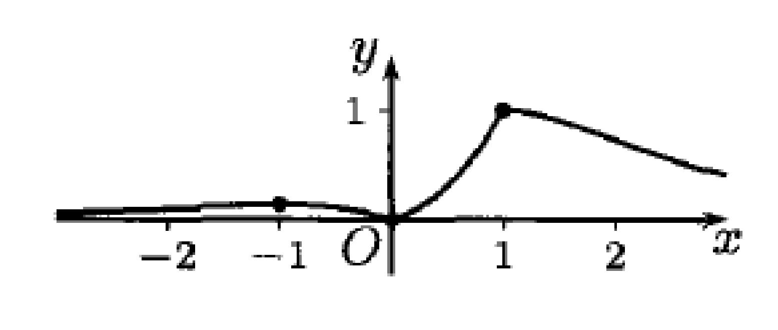
$$\begin{aligned}y'(x)&=(x-1)^{\frac{1}{3}}+\frac{x}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\\&=(\frac{4}{3}x-1)(x-1)^{-\frac{2}{3}}\ \ (x\neq 1),\end{aligned}$$

可见在点 $x=\dfrac{3}{4}$ 处 $y'=0$, 且在其左侧邻近 $y'<0$, 而在其右侧邻近 $y'>0$, 因此 $x=\dfrac{3}{4}$ 是极小值点. 极小值 $f(\dfrac{3}{4})=-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}=-\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{8}\approx 0.472.$

在不可微点 $x=1$ 附近 $y'>0$, 因此它不是极值点. □

习题 1444 求 $y=|x|\cdot \mathrm{e}^{-|x-1|}$ 的极值.

解 可以用分段处理的方法克服绝对值号带来的不便 (参考 §1.1.4 的习题 26 的解 2).



习题 1444 的附图

在 $(-\infty,0)$ 上 $y=-x\mathrm{e}^{x-1}$, 导数 $y'=\mathrm{e}^{x-1}(-1-x)$, 可见 $x=-1$ 为极大值点, 极大值 $\mathrm{e}^{-2}\approx 0.135$.

由 $y(0)=0$, 而当 $x\neq 0$ 时 $y(x)>0$, 可见 $x=0$ 是极小值点, 极小值 $y(0)=0$.

在 $(0,1)$ 上 $y = xe^{x-1}$, $y' = e^{x-1}(1+x) > 0$, 因此没有极值点.

在 $(1,+\infty)$ 上 $y = xe^{1-x}$, $y' = e^{1-x}(1-x) < 0$, 因此没有极值点.

由以上讨论可见 $x = 1$ 是极大值点, 极大值 $y(1) = 1$. □

注 此题中的 $x = 0$ 和 $x = 1$ 都是函数的不可导点 (角点), 但恰好都是极值点. 这说明在寻找极值点时, 不能放过对于不可导点的分析.

习题 1445–1449 是求最值. 对于定义域为有界闭区间的连续函数, 则可用连续函数的最值定理肯定最大值点和最小值点的存在. 区间上的连续函数若只有一个极值点, 则它就是最值点. 如果最值点不是区间的端点, 则就是极值点 (它可能是不严格的极值点).

习题 1447 求在区间 $[-10,10]$ 上的函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 的最大值和最小值.

解 从 $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 可见, $x = 1, 2$ 处函数 $f(x)$ 达到最小值 0.

在 $(-10,10)$ 中只有驻点 $x = \dfrac{3}{2}$, 计算出 $f(\frac{3}{2}) = \dfrac{1}{4}$. 然后与边界上的 $f(-10) = 132$ 和 $f(10) = 72$ 作比较, 可见最大值是 132. □

习题 1450–1454 是求确界的计算题. 确界能够达到就是最值. 在求确界时除了考虑极值点和端点之外, 还要考虑其他因素. 例如, 若 $f(x)$ 是区间为 $(a,+\infty)$ 上的连续函数, 则还要考虑 $f(a+0)$ 和 $f(+\infty)$ (如果它们存在的话).

习题 1451 求函数 $f(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上的下确界和上确界.

解 利用 §2.11.1 的习题 1420 的结论, 知道 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上非负严格单调递减, 且有 $f(+\infty) = 0$ (参考那里的分析与附图). 由于已知 $f(0) = 1$, 但 $x = 0$ 不属于本题所考虑的区间, 因此就得到 $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)} f(x) = 1$, $\inf\limits_{x\in(0,+\infty)} f(x) = 0$. □

习题 1454.1 求函数 $f(\xi) = \dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x < \xi < +\infty$ 上的下确界和上确界, 并作出函数

$$M(x) = \sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \text{ 和 } m(x) = \inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi)$$

的图像.

解 由于题中对 x 不加限制, 因此需要在 $(-\infty,+\infty)$ 上分析 $f(\xi)$ 的确界.

直接求导得到

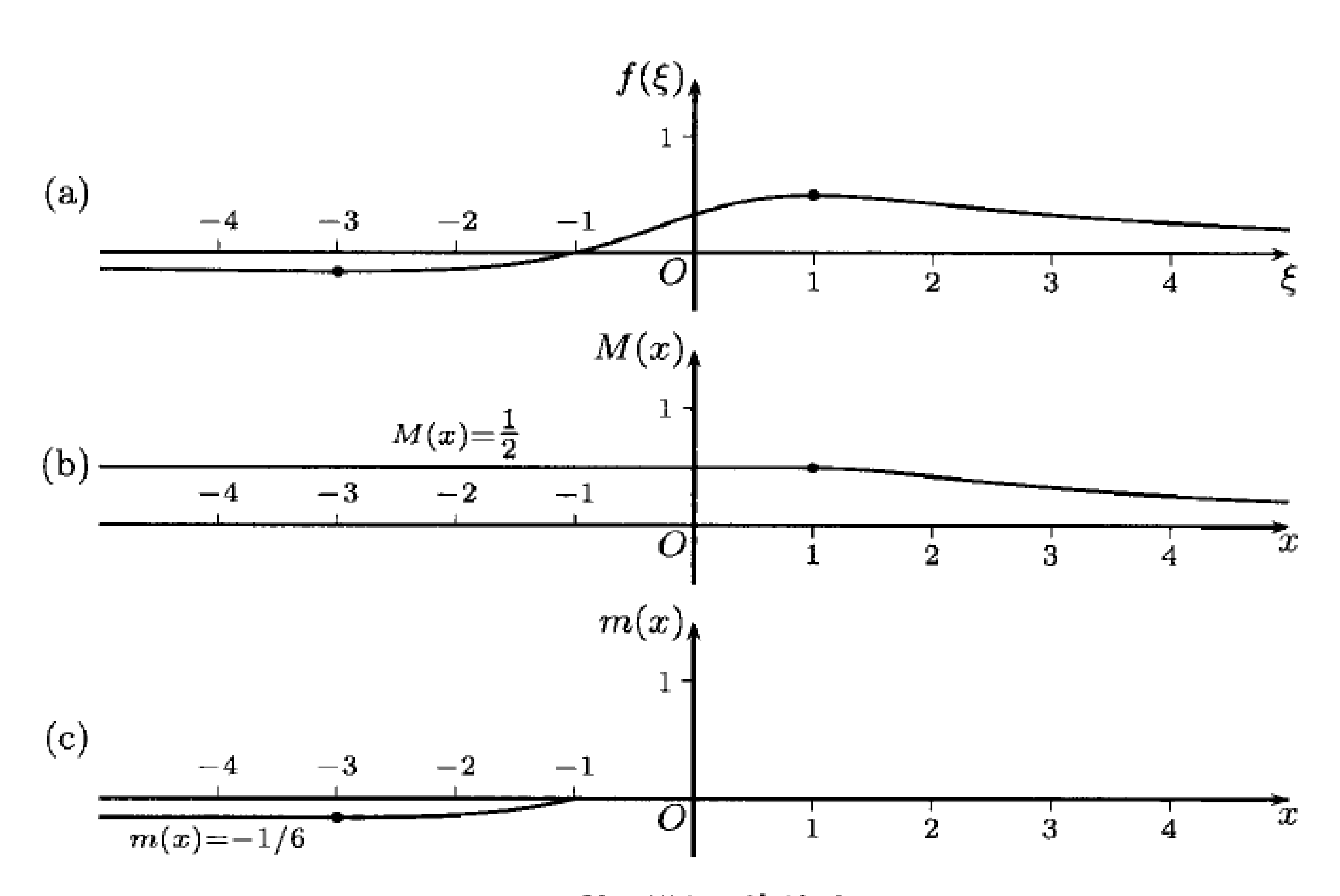
$$f'(\xi) = \frac{3+\xi^2-2\xi-2\xi^2}{(3+\xi^2)^2} = \frac{3-2\xi-\xi^2}{(3+\xi^2)^2},$$

再利用 $3 - 2\xi - \xi^2 = (3+\xi)(1-\xi)$, 可见 $f(\xi)$ 在 $(-\infty,-3]$ 上严格单调递减, 在 $[-3,1]$ 上严格单调递增, 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调递减. 又注意到 $f(\pm\infty) = 0$. 于是 $f(\xi)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 的点 $\xi = -3$ 处达到最小值 $f(-3) = -\dfrac{1}{6}$, 而在点 $\xi = 1$ 处达到最大值 $f(1) = \dfrac{1}{2}$ (参见附图的分图 (a)).

由此就容易确定所要求的两个函数为:

$$M(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\leqslant 1,\\ \dfrac{1+x}{3+x^2}, & x>1\end{cases}\quad 和\quad m(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}, & x\leqslant -3,\\ \dfrac{1+x}{3+x^2}, & -3<x<-1,\\ 0, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

下面的附图中分别作出了 $f(\xi), M(x), m(x)$ 的图像 (本题的 $M(x), m(x)$ 的定义与 §1.7.5 的习题 748 中的两个同名函数不同). □

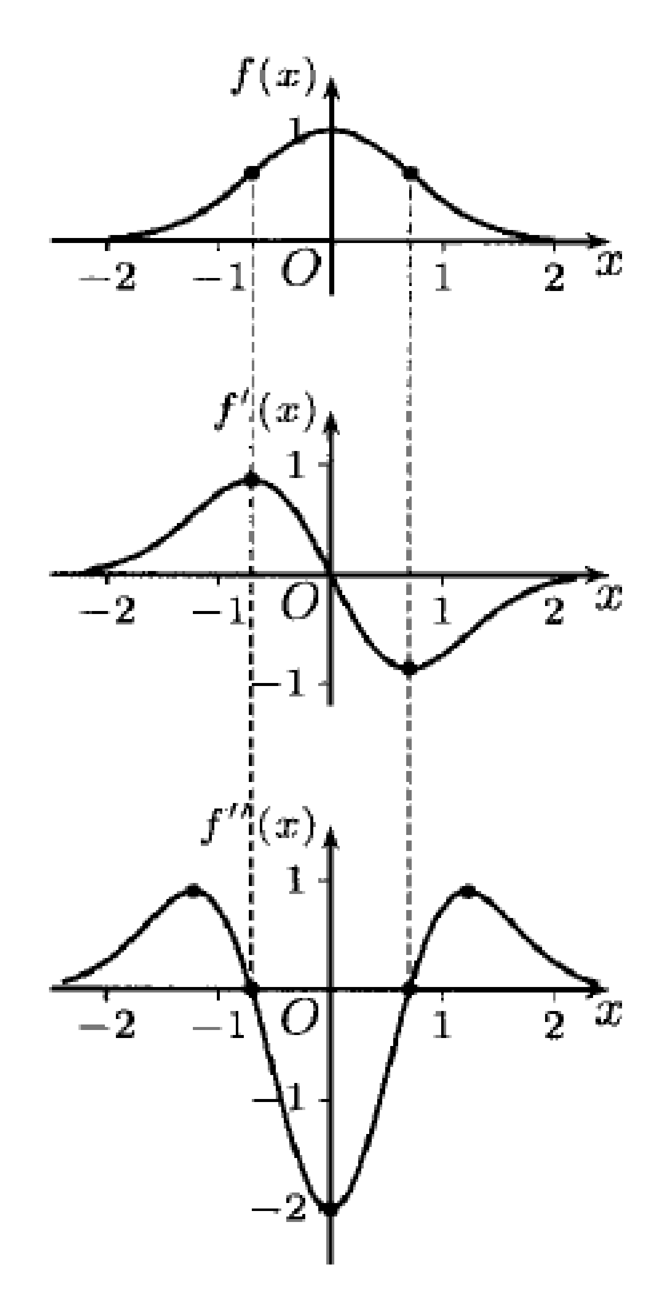


习题 1454.1 的附图

习题 1454.2 设

$$M_k=\sup_x|f^{(k)}(x)|,\ k=0,1,2,\cdots,$$

假如 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$, 求 M_0, M_1, M_2.



习题 1454.2 的附图

解 显然 $M_0=1$. 为求 M_1, 计算

$$f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2},\quad f''(x)=\mathrm{e}^{-x^2}(-2+4x^2).$$

由于 $f'(x)$ 是奇函数, 只要在 $[0,+\infty)$ 上研究它. 由于 $f'(0)=0$, $f'(+\infty)=0$, 因此 $f'(x)$ 在这个区间上有最大值或最小值, 它的绝对值就是 M_1. 从 $f''(x)=0$ 解出在 $x>0$ 时 $f'(x)$ 的唯一极值点为 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 因此就有

$$M_1=|f'(\frac{\sqrt{2}}{2})|=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 0.858.$$

同样为求 M_2, 需要计算

$$f'''(x)=\mathrm{e}^{-x^2}(8x+4x-8x^3)=4\mathrm{e}^{-x^2}x(3-2x^2).$$

由于 $f''(x)$ 是偶函数, 只要在 $[0,+\infty)$ 上研究它.

从 $f'''(x)=0$ 的根为 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 知道在 $[0,\sqrt{\frac{3}{2}}]$ 上 f'' 严格单调递增, 在 $[\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty)$ 上严格单调递减. 计算得到

$$f''(\sqrt{\frac{3}{2}})=4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\approx 0.893.$$

然而与 $f''(0)=-2$ 相比后可见 $M_2=2$. □

注 在附图中作出了 f,f',f'' 的图像. 可以注意到 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 分别对应于 $f(x)$ 的图像中的拐点, $f'(x)$ 的极值点和 $f''(x)$ 的零点.

下一题是极值问题在数列研究中的应用, 有三个小题. 这里讲第 3 小题.

习题 1455(c) 求数列 $\sqrt[n]{n}\ (n=1,2,\cdots)$ 的最大项.

解 将离散变量 n 连续化, 讨论函数 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$, $x\geqslant 1$.

为研究 $f(x)$ 的极值点, 用对数求导法得到

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},$$

可见 $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上严格单调递增, 而在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上严格单调递减. 因此在数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 中最大的项只可能在 $n=2$ 和 $n=3$ 之中.

从 $2^3<3^2$ 可以知道 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$, 于是最大的项就是数列的第三项 $\sqrt[3]{3}$. □

注 在 §1.2.2 的习题 65 的解 3 中, 不用微分学工具就已经解决了本题的问题.

2.11.3 不等式证明 (习题 1456)

习题 1456.1 和 1456.2 共含 6 个不等式. 下面列出前 5 个并讲解其中后两个.

习题 1456.1 证明下列不等式:

(a) $|3x-x^3|\leqslant 2$, 其中 $|x|\leqslant 2$;

(b) $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$, 其中 $0\leqslant x\leqslant 1$, $p>1$;

(c) $x^m(a-x)^n\leqslant\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\cdot a^{m+n}$, 其中 $m>0$, $n>0$ 和 $0\leqslant x\leqslant a$;

(d) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a$, 其中 $x>0,a>0,n>1$;

(e) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

分析 从前三个小题的不等式形式可见, 只要研究函数的最值即可证出. 其中的 (c) 若两边除以 a^{m+n}, 则可引用 §2.11.1 的习题 1417. 下面给出后两个小题的解. □

(d) **解** 此题表面上看似乎与极值或最值无关, 但利用 x,a 都大于 0 的条件, 且关于 x,a 为齐次, 将中间的函数除以 $x+a$, 就得到等价的不等式

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}\leqslant\frac{\sqrt[n]{x^n+a^n}}{x+a}\leqslant 1\ \ (x>0,a>0,n>1),$$

将中间的函数记为 $f(x)$, 则只要能求出 f 在 $(0,+\infty)$ 的上确界和下确界就足够了. 由于上确界为 1 是明显的, 下面只要证左边的不等式.

将 $f(x)$ 的分子分母同除以 x, 令 $t=a/x$, 并为了计算简单起见令

$$G(t)=\frac{1+t^n}{(1+t)^n},$$

于是只要求出 $G(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的下确界后再开 n 次根即可.

将 $G(t)$ 对 t 求导得到

$$\begin{aligned}G'(t)&=\frac{nt^{n-1}}{(1+t)^n}-\frac{n(1+t^n)}{(1+t)^{n+1}}\\&=\frac{n}{(1+t)^{n+1}}[t^{n-1}(1+t)-(1+t^n)]=\frac{n(t^{n-1}-1)}{(1+t)^{n+1}},\end{aligned}$$

可见在 $t=1$ 处 $G(t)$ 达到最小值 $G(1)=1/2^{n-1}$. 因此所要求的下确界是 $1/2^{\frac{n-1}{n}}$, 这就证明了不等式. □

(e) **解 1** 用中学数学关于正弦函数与余弦函数的叠加知识已可解决. 设 a,b 不同时为 0, 于是 $a^2+b^2>0$. 从

$$f(x)=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

就可以确定角 $\varphi\in[0,2\pi)$, 使得满足

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

从而得到一个重要的等式:

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi).$$

由此即得到所要的不等式 $|f(x)|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$. □

解 2 用平均值不等式 $xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 也可解决. 将 $f(x)$ 平方即有

$$\begin{aligned}f^2(x)&=a^2\sin^2x+2(a\cos x)(b\sin x)+b^2\cos^2x\\&\leqslant a^2\sin^2x+(a\cos x)^2+(b\sin x)^2+b^2\cos^2x=a^2+b^2.\quad\square\end{aligned}$$

解 3 用柯西不等式 (即 §2.7.2 的习题 1293) 的证明可能是最简短的了:

$$|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\sin^2x+\cos^2x}=\sqrt{a^2+b^2}.\quad\square$$

解 4 用微分学也可给出简短的证明.

由于 $f(x)=a\sin x+b\cos x$ 是周期连续函数, 因此有最大值 M 和最小值 m. 利用 $f(x+\pi)=-f(x)$, 可见 $m=-M$, 因此有 $|f(x)|\leqslant M$. 以下只要计算最大值 M.

根据费马定理, 达到 M 的点 x_0 处导数为 0. 于是有

$$f'(x_0)=a\cos x_0-b\sin x_0=0.$$

利用这个关系即可计算得到

$$\begin{aligned}M^2&=f^2(x_0)=(a\sin x_0+b\cos x_0)^2\\&=a^2\sin^2x_0+2(a\cos x_0)(b\sin x_0)+b^2\cos^2x_0=a^2+b^2.\quad\square\end{aligned}$$

2.11.4　偏差计算 (习题 1457–1461)

这里的几个习题与两个函数 $f(x), g(x)$ 在指定区间 $[a, b]$ 上的绝对偏差

$$\Delta = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - g(x)|$$

有关. 若其中 $g(x) \equiv 0$, 则就是函数 $f(x)$ "与零的偏差".

下面只举与二次函数的最佳线性逼近有关的两道题. 其中的第一题可看成是用零次多项式 (即常数) 在 $[-1, 1]$ 上来逼近 x^2.

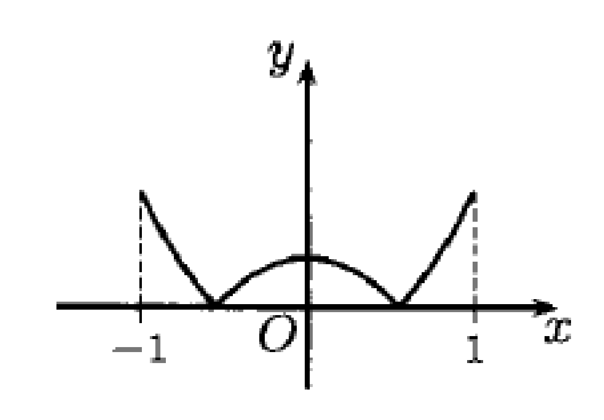
习题 1458 当参数 q 选为何值时, 多项式

$$P(x) = x^2 + q$$

在区间 $[-1, 1]$ 上与零有最小的偏差, 即

$$E_P = \sup_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = \min.$$

解　如右边的附图 1 所示, 作出了 $q = -\dfrac{3}{10}$ 时的 $|P(x)|$ 的图像. 问题是要对每一个 q 求出 $|P(x)|$ 在 $[-1, 1]$ 上的最大值, 它是 q 的函数, 然后再对于 q 取最小值.



习题 1458 的附图 1

分两步来做. 首先引入参数 q 的函数

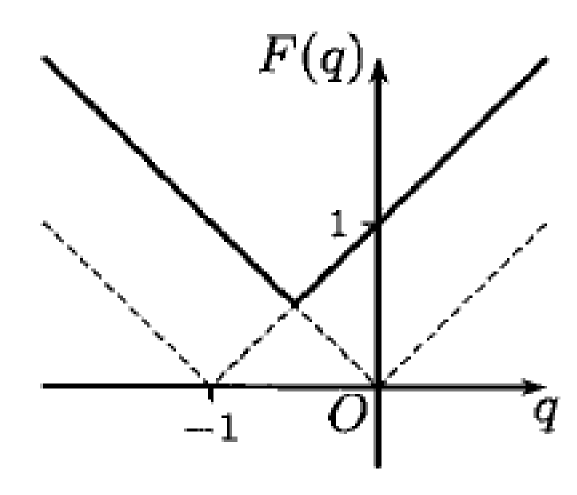
$$F(q) = \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| = \max_{x \in [-1, 1]} |x^2 + q|,$$

并求出它的值, 然后再求 $\min F(q)$.

如前面求最值与确界问题中所说, 为了求 $F(q)$, 只要列举出 $P(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的极值和在端点处的值, 取绝对值后选取其中的最大数即可.

于是有

$$F(q) = \max\{|P(-1), P(0), P(1)\} = \max\{|1 + q|, |q|\}.$$



习题 1458 的附图 2

然后分别在 $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$ 和 $[0, +\infty)$ 上讨论 $F(q)$, 或者如左边的附图 2 所示, 先用虚线作出 $|q|$ 和 $|1 + q|$ 的图像, 然后在纵坐标方向取它们的最大值, 用粗黑线表示, 就可以得到

$$F(q) = \begin{cases} -q, & q \leqslant -\dfrac{1}{2}, \\ q + 1, & q > -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

可见最小偏差 $\min F(q)$ 在 $q = -\dfrac{1}{2}$ 时达到, 且同时有 $E_P = \dfrac{1}{2}$.　□

在习题 1458 的基础上, 我们可以解决下一题中的更复杂一点的最佳线性逼近问题.

习题 1460 函数 $f(x) = x^2$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上用线性函数

$$g(x) = (x_1 + x_2)x + b$$

近似代替, 使得函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的绝对偏差是最小的, 求这个最小的绝对偏差.

解　这里的参数是 b. 引入函数

$$F(b)=\max_{x\in[x_1,x_2]}|x^2-(x_1+x_2)x-b|,$$

问题就是求出 $F(b)$, 然后求其最小值. (这是一个典型的 $\min\max$ 问题.)

为用习题 1458 的结果, 可用线性变换将区间 $[x_1,x_2]$ 变换为 $[-1,1]$. 为此令

$$t=\frac{x-\dfrac{x_1+x_2}{2}}{\dfrac{x_2-x_1}{2}},$$

则当 x 从 x_1 递增到 x_2 时, t 从 -1 递增到 1, 于是就可以将 $F(b)$ 变换为

$$\begin{aligned}F(b)&=\max_{x\in[x_1,x_2]}\left|\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(-b-\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\right)\right|\\&=\frac{(x_2-x_1)^2}{4}\cdot\max_{t\in[-1,1]}|t^2+q|,\end{aligned}$$

其中的参数

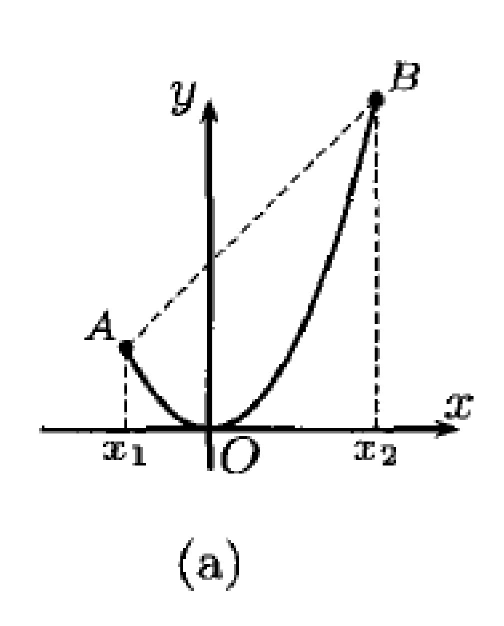
$$q=-\frac{4b+(x_1+x_2)^2}{(x_2-x_1)^2}.$$

最后, 引用习题 1458 的结果, 就知道当参数 $q=-\dfrac{1}{2}$, 也就是

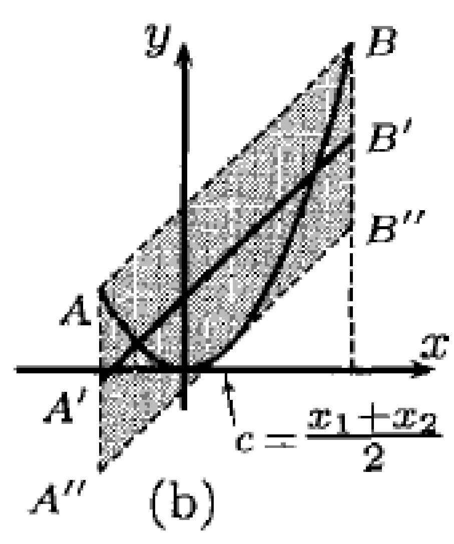
$$\begin{aligned}b&=\frac{1}{4}\left[\frac{(x_2-x_1)^2}{2}-(x_1+x_2)^2\right]\\&=-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2)\end{aligned}$$

时, $f(x)=x^2$ 与 $g(x)=(x_1+x_2)x+b$ 的绝对偏差达到最小值

$$\Delta=\frac{1}{8}(x_2-x_1)^2.\quad\square$$



(a)



(b)

习题 1460 的附图

注　以下配合附图作几点补充说明. (附图中取 $x_1<0<x_2$, 但以下说明对于其他情况都是成立的.)

(1) 如习题 1460 所说, 其意义是在指定的区间 $[x_1,x_2]$ 上用线性函数 $g(x)=(x_1+x_2)x+b$ 逼近抛物线 $f(x)=x^2$ 时, 如何选取 b 才能使得两个函数在 $[x_1,x_2]$ 上的绝对偏差最小. 为什么这条直线的斜率是 x_1+x_2? 它有什么意义?

如左边的分图 (a) 所示, 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的抛物线 $y=x^2$ 的两个端点记为 A 和 B, 则连接它们的弦 AB 的斜率是

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}=x_1+x_2,$$

这也就是直线 $y=g(x)$ 的斜率.

(2) 最佳的参数 b 所对应的直线的几何意义是什么? 如左边的分图 (b) 所示, 这条最佳的直线在图中是填以灰色的平行四边形 $ABB''A''$ 的平行于边 AB 的中线 $A'B'$, 其中边 $A''B''$ 与抛物线相切.

为此可以计算如下.

切线 $A''B''$ 的斜率为 x_1+x_2, 因此从 $y=x^2$ 的导数公式 $y'=2x$ 可求出切点的横坐标, 并记为 $c=(x_1+x_2)/2$.

弦 AB 的方程为 $y=x_1^2+(x_1+x_2)(x-x_1)$, 用 $x=c$ 代入, 并减去 $f(c)=c^2$ 后除以 2, 就得到

$$\frac{1}{2}\Big(x_1^2+(x_1+x_2)\big(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1\big)-\frac{(x_1+x_2)^2}{4}\Big)=\frac{1}{8}(x_2-x_1)^2,$$

即题中最后得到的最佳绝对偏差 Δ.

从弦 AB 的方程减去 Δ 就得到最佳直线 $A'B'$ 的方程为

$$\begin{aligned}&x_1^2+(x_1+x_2)(x-x_1)-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)\\&=(x_1+x_2)x-x_1x_2-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)\\&=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2),\end{aligned}$$

这也即是题中最后得到的 $g(x)=(x_1+x_2)x-b$.

(3) 是否可以考虑用更一般的直线 $g(x)=ax+b$ 来逼近 $f(x)=x^2$? 这时有两个参数 a,b 可供选择.

这个问题的提法完全合理, 但可以证明, 参数 a 的最佳值就是 x_1+x_2. 因此习题 1460 的意义在于解决了用直线最佳逼近抛物线这个问题的一半, 即在 a 给定为最佳值时如何选择 b 的问题.

有兴趣的读者可以对此作出证明. 其中只用到初等运算.

(4) 以上对抛物线的最佳线性逼近概念可以推广到对一般函数的最佳多项式逼近. 这就是给定区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$, 同时又给定多项式的次数 n, 要求在所有的 n 次多项式中找到与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的绝对偏差达到最小. 这与 §2.10 中用 $f(x)$ 在点 x_0 处的泰勒多项式逼近$f(x)$ 是不同的, 参见后面 §2.11.6 的命题 2.11 (切比雪夫定理).

2.11.5 根的个数问题 (习题 1462–1470)

下面几题都可统一为确定方程 $f(x)=c$ 的实根个数, 其中 c 为参数. 在对 f 作单调性分析后, 每个单调区间内满足 $f(x)=c$ 的根至多只有一个, 而是否存在这样的根则取决于该区间在 f 映射下的像是否包含 c. 这时函数 $f(x)$ 在各个极值点处的极值将直接出现在答案中. 容易看出, 作出函数 f 的图像对于判定实根的个数是很有帮助的.

习题 1463 求方程 $x^3-3x^2-9x+h=0$ 的实根的个数, 并确定这些根的范围.

解 记 $f(x)=x^3-3x^2-9x$, 则方程为 $f(x)=-h$.

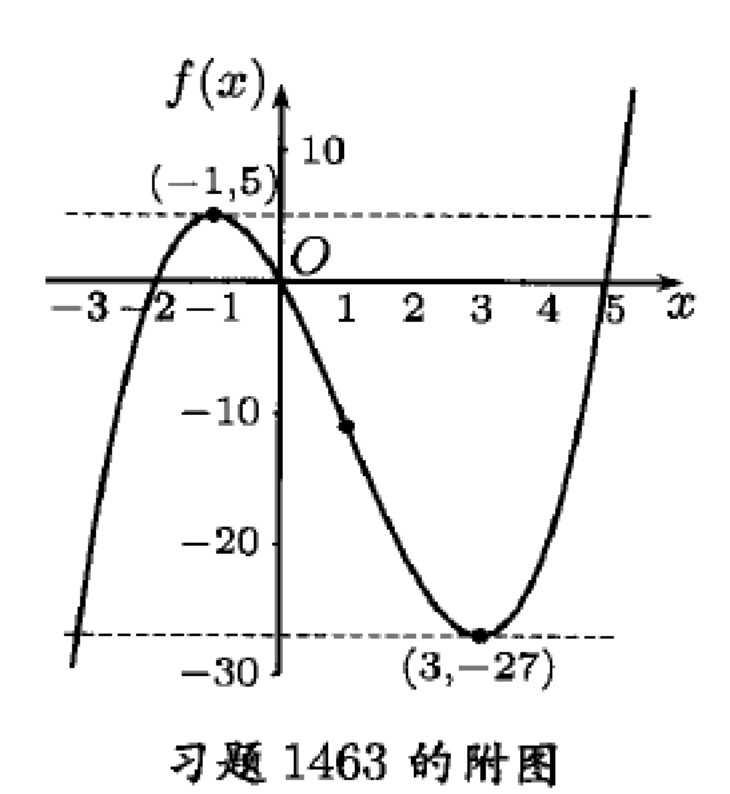
将 f 对 x 求导得到

$$f'(x)=3x^2-6x-9,\ f''(x)=6x-6.$$

从 $f'(x)=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$ 可见有两个驻点 -1 和 3. 从单调性讨论可见 $x=-1$ 是极大值点, 极大值 $f(-1)=5$; $x=3$ 是极小值点, 极小值 $f(3)=-27$. 此

外, $x=1$ 对应的点 $(1,-11)$ 是拐点, 其左侧的曲线凹, 右侧的曲线凸. 这样就可以作出附图中的图像. 为方便起见, 在两个坐标轴上所取的标度不同.

再利用 $f(-\infty)=-\infty$ 和 $f(+\infty)=+\infty$, 就可以对于方程 $f(x)=-h$ 的实根个数作出以下结论:



习题 1463 的附图

(1) 当 $h>27$ 时, 方程只有小于 -1 的一个实根;

(2) 当 $h=27$ 时方程有两个实根, 除了小于 -1 的根之外有一个二重根 $x=3$;

(3) 当 $h\in(-5,27)$ 时, 方程有三个实根, 分别在 $(-\infty,-1)$, $(-1,3)$ 和 $(3,+\infty)$ 内;

(4) 当 $h=-5$ 时方程有两个实根, 除了大于 3 的根之外有一个二重根 $x=-1$;

(5) 当 $h<-5$ 时方程只有大于 3 的一个实根. □

注 在作出最后的结论时没有详细写出其过程, 这里给出结论 (1) 的来历, 其余可类推, 从略.

由于方程是 $f(x)=-h$, 当 $h>27$ 时在三个单调性区间上, 只有在 $(-\infty,-1]$ 上 f 的值从 $-\infty$ 到 5, 从而覆盖了 $-h<-27$ 的点, 而在其余的两个单调性区间上函数值都大于等于极小值 $f(3)=-27$, 因此不会提供实根.

习题 1466 求方程 $\ln x=kx$ 的实根的个数, 并确定这些根的范围.

解 1 定义 $f(x)=\ln x/x\ (x>0)$, 则方程改为 $f(x)=k$. 求导得到

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2},$$

可见有极大值点 $x=\mathrm{e}$, 极大值 (也是最大值) 为 $f(\mathrm{e})=1/\mathrm{e}\approx 0.368$. 又可见 f 在 $(0,\mathrm{e}]$ 上严格单调递增, 在 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上严格单调递减, 且有 $f(+0)=-\infty$, $f(+\infty)=0$. 此外还有 $f(1)=0$ (见附图 1).

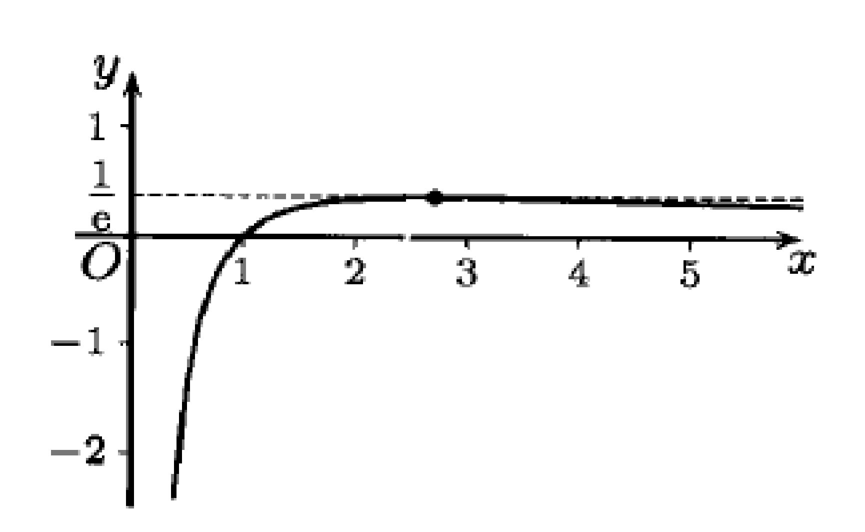
利用单调性区间 $(0,\mathrm{e}]$ 和 $[\mathrm{e},+\infty)$ 上 f 的取值范围就可以得到:

(1) $k>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时方程没有实根;

(2) $k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时方程只有一个实根 e;

(3) $0<k<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时方程恰好有两个实根, 它们分别在 $(1,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内;

(4) $k\leqslant 0$ 时方程只有一个实根, 在 $(0,1)$ 内. □



习题 1466 的附图 1

解 2 换一个角度来考虑本题, 则方程 $\ln x=kx$ 的实根个数问题就是我们熟知的对数曲线 $y=\ln x$ 和直线 $y=kx$ 有几个交点的问题.

引入辅助函数

$$F(x) = \ln x - kx, \quad x > 0.$$

问题转化为确定 F 的零点个数. 从 F 的导函数

$$F'(x) = \frac{1}{x} - k$$

可见, 当 $k \leqslant 0$ 时 F 为严格单调递增. 利用 $F(+0) = -\infty$ 和 $F(+\infty) = +\infty$ 可见方程 $F(x) = 0$ 恰有一个实根, 其中利用了 $\ln x = o(x)$ $(x \to +\infty)$.

以下讨论 $k > 0$. 这时函数 F 在 $(0, \frac{1}{k}]$ 上严格单调递增, 而在 $[\frac{1}{k}, +\infty)$ 上严格单调递减. 于是知道 $x = 1/k$ 是极大值点, 也是最大值点.

由此可见, 问题在于 F 的极大值 (也是最大值) 的符号. 可以计算得到

$$F(0^+) = -\infty, \quad F(\frac{1}{k}) = -\ln k - 1, \quad F(+\infty) = -\infty,$$

根据 $F(\frac{1}{k})$ 的符号就得到以下结论 (参见附图 2):

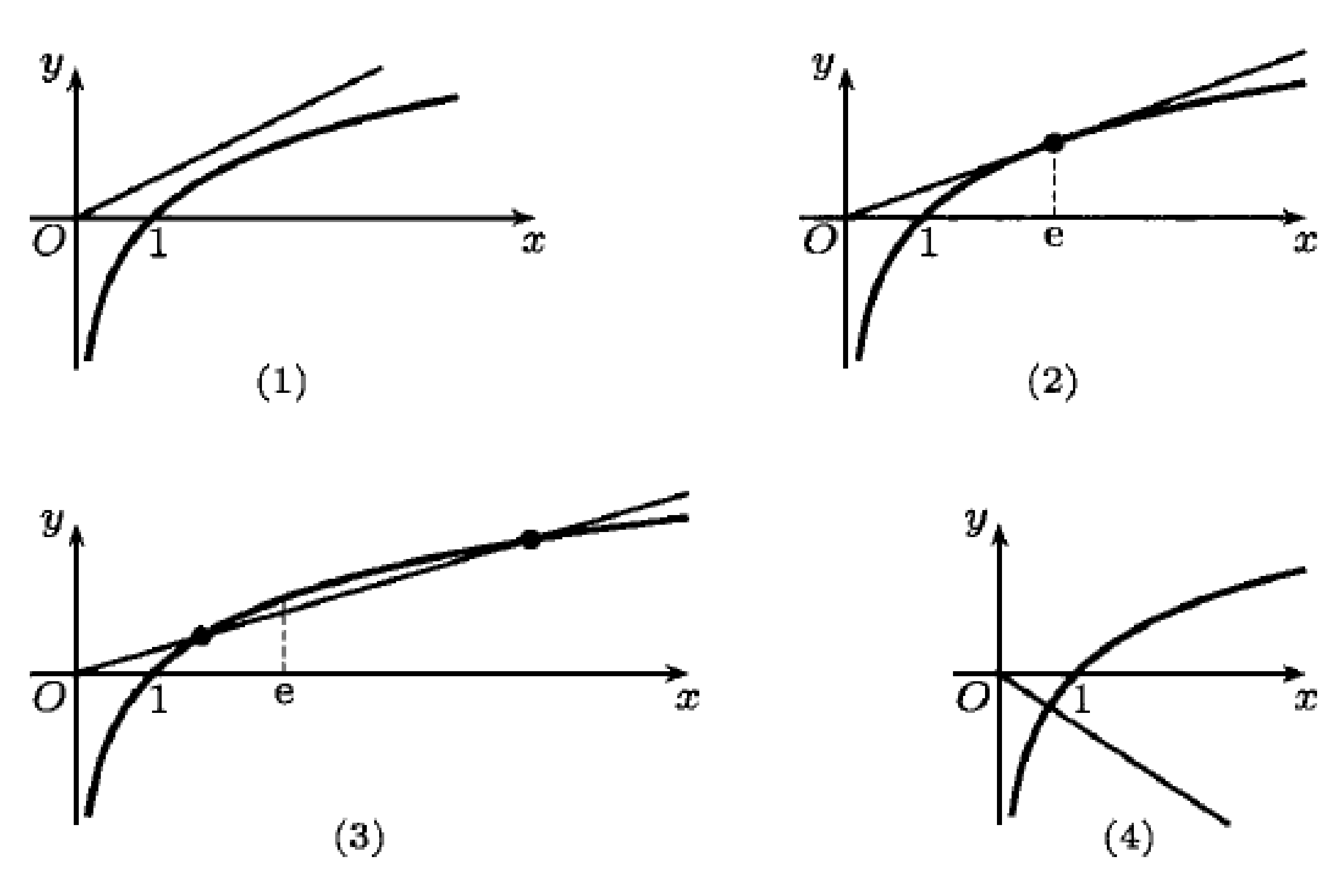
(1) $\ln k > -1$, 即 $k > \mathrm{e}^{-1}$, 这时 $F(x)$ 没有零点, 即方程 $\ln x = kx$ 无实根;

(2) $k = \mathrm{e}^{-1}$, 方程 $\ln x = kx$ 恰有一个实根, 即 $x = \mathrm{e}$;

(3) $0 < k < \mathrm{e}^{-1}$, 方程 $\ln x = kx$ 恰有两个实根, 分别在点 $1/k$ 的两侧;

此外还有前面已经得到的结论:

(4) $k \leqslant 0$ 时方程 $\ln x = kx$ 恰有一个实根. □



习题 1466 的附图 2

习题 1468 求方程 $\sin^3 x \cdot \cos x = a$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 的实根的个数, 并确定这些根的范围.

解 记 $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$, 则在区间 $[0, \pi]$ 上 $f(x) = -f(\pi - x)$, 因此其图像关于区间 $[0, \pi]$ 的中点 $\pi/2$ 为中心对称, 或说是奇函数.

求出导数

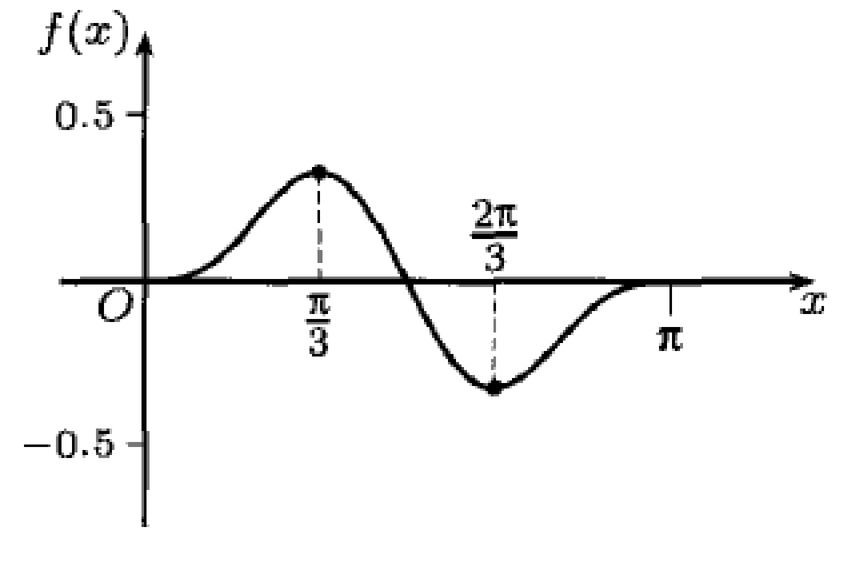
$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = \sin^2 x(3\cos^2 x - \sin^2 x),$$

可见在开区间 $(0,\pi)$ 内存在关于其中点 $\pi/2$ 对称的两个驻点 x_1, x_2, 其中 $x_1 < \pi/2 < x_2$, 满足 $\tan x_1 = \sqrt{3}$, $\tan x_2 = -\sqrt{3}$. 即有 $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$, $x_2 = \dfrac{2\pi}{3}$. 还可看出 $f(x)$ 在 $[0, x_1]$ 上严格单调递增, 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减, 在 $[x_2, \pi]$ 上严格单调递增, 因此 x_1 是极大值点, 而 x_2 是极小值点.

从 $\sin x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x_1 = \dfrac{1}{2}$, 可计算得到

$$f(x_1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \approx 0.325,$$

然后由对称性即得到 $f(x_2) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{16} \approx -0.325$.



习题 1468 的附图

由以上单调性分析就可以得到如下结论:

(1) 当 $|a| > \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ 时 $f(x) = a$ 没有实根;

(2) 当 $|a| = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ 时 $f(x) = a$ 有一个实根;

(3) 当 $0 < |a| < \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ 时 $f(x) = a$ 有两个实根;

(4) 当 $a = 0$ 时 $f(x) = 0$ 有三个实根. □

习题 1470 在什么条件下, 方程

$$x^3 + px + q = 0$$

有: (a) 一个实根; (b) 三个实根?

在 (p, q) 平面上描绘出相应的区域.

解 为清楚起见, 我们约定本题中的三个实根是指彼此互异的三个实根, 而在一个实根的情况允许它是三重根.

记 $f(x) = x^3 + px + q$, 则求导得到

$$f'(x) = 3x^2 + p, \quad f''(x) = 6x.$$

如果 $f(x) = 0$ 有三个实根, 则根据罗尔定理, $f'(x) = 0$ 就必须有两个实根, 可见只能是 $p < 0$. 这时从 $f'(x) = 0$ 得到两个驻点

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}, \quad x_2 = +\sqrt{\frac{-p}{3}}.$$

利用 $f''(x) = 6x$ 与 x 同号, 可见 x_1 是极大值点, 而 x_2 是极小值点.

从 $f'(x) = 3(x - x_1)(x - x_2)$ 可见, $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1]$ 上严格单调递增, 在 $[x_1, x_2]$ 上严格单调递减, 在 $[x_2, +\infty)$ 上严格单调递增. 因此 $f(x) = 0$ 有三个实根时, $f(x)$ 的极小值 $f(x_2) < 0$. 这时极大值 $f(x_1) > 0$ 也一定成立. 于是得到不等式

$$f(x_2) = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + q < 0 < f(x_1) = -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} + q,$$

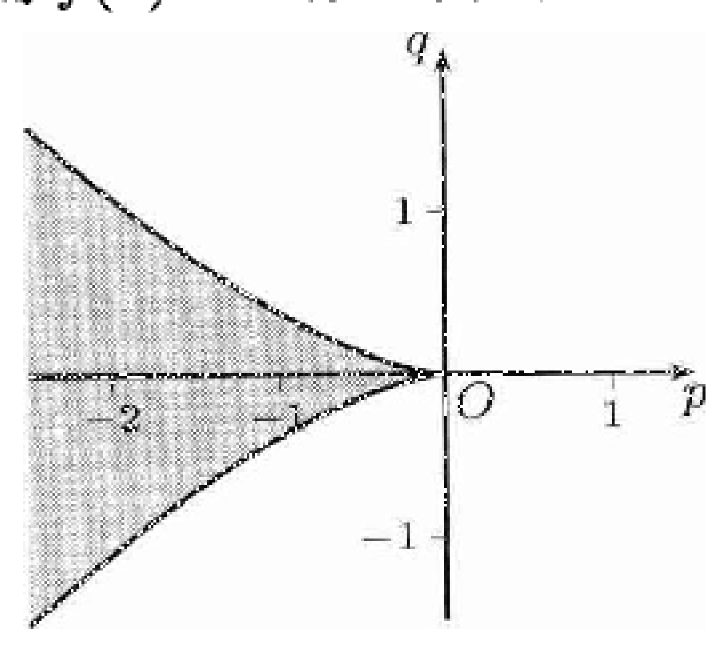
由此得到

$$\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} < q < -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}},$$

也就是

$$q^2 + \frac{4p^3}{27} < 0. \tag{2.19}$$

反之, 若这个不等式成立, 则已蕴含 $p < 0$. 然后反推就可以得到 $f(x_2) < 0 < f(x_1)$, 从而 $f(x) = 0$ 有三个实根. 这就证明了 (2.19) 是方程有三个实根的充分必要条件.



习题 1470 的附图

根据以上分析即可作出参数 (p, q) 平面上的曲线 $q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0$. 如左边的附图所示, 在该曲线的左方, 即图中的灰色区域, 不包含其边界即是 $f(x) = 0$ 有三个互异实根所对应的参数 (p, q) 点全体.

然后再分析该区域的边界. 其中原点 $p = q = 0$ 对应的方程$f(x) = 0$ 只有一个三重实根. 然而边界上其他点对应的方程, 从前面的分析可见这时 $x_1 \neq x_2$, 且其中有一个为二重根.

容易看出, 若 $p > 0$, 则 $f'(x) = 3x^2 + p \geqslant p > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调递增, 且 $f(\pm\infty) = \pm\infty$, 因此恰有一个实根. 若 $p = 0$, 则方程 $x^3 + q = 0$ 只有一个实根 (包括 $q = 0$ 在内). 若 $p < 0$, 但 $q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$, 则前面的推导表明这时的极小值 $f(x_2) > 0$, 因此 $f(x) = 0$ 只有一个实根.

结论: $q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$ 或 $p = q = 0$ 是 $x^3 + px + q = 0$ 只有一个实根的充要条件. □

2.11.6 补注

这个补注有两个内容: 1. 作为 §2.11.4 的偏差计算的引申, 简要地介绍切比雪夫的一致逼近多项式的基本概念; 2. 作为 §2.11.5 的根的个数问题的应用, 举出两个具体的例题, 它们都是在下一节的函数作图中需要解决的问题.

1. 一致逼近多项式的介绍

在 §2.10.3 已经看到, 利用带拉格朗日型余项的泰勒公式, 不但可以用泰勒多项式来逼近某些函数, 同时还能提供误差限的估计.

然而泰勒多项式的逼近效果很不均匀. 例如, 用 $x - \frac{1}{6}x^3$ 来逼近正弦函数 $y = \sin x$ 时, 在习题 1394(b) 中得到的误差估计是由余项

$$R_4(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{\cos(\theta x)}{5!}x^5$$

给出的. 于是误差不仅与 $\sin x$ 的五阶导函数 $(\sin x)^{(5)} = \cos x$ 有关, 而且还和 x 有关. 只有当 $|x|$ 充分小时才有很好的逼近效果.

在实际问题中的逼近要求往往是对于一定范围提出的. 例如, 若要求在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上用多项式来逼近 $\sin x$, 且提出误差不超过 0.5×10^{-4}, 则就可能要用次数相当高的泰勒多项式才能达到.

为此切比雪夫提出了最佳一致逼近多项式的概念.

定义 设给定区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 和正整数 n. 在所有的 n 次多项式中, 与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的绝对偏差最小的多项式就称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最佳一致逼近 n 次多项式.

在 §2.11.4 中的习题 1460 就是这样的问题. 如该题的注 (3) 中所说, 该题的答案实际上已经给出对于 $[x_1,x_2]$ 上的函数 x^2 的最佳一致逼近线性函数.

可以证明, 在给定有界闭区间上的连续函数和正整数 n 之后, 上述定义中的最佳一致逼近多项式是存在唯一的.

关于这方面的内容可以参考 [15] 的第六章或计算数学的其他教材. 下面只介绍刻画了最佳一致逼近多项式的切比雪夫定理, 并证明其中较容易的充分性部分.

命题 2.11 (切比雪夫定理) 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, n 为正整数, 则 n 次多项式 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳一致逼近 n 次多项式的充分必要条件是: 差 $f(x)-P(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少有 $n+2$ 个正负相间的等值偏差点.

证 只给出充分性的证明.

记 $f(x)$ 和 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上的绝对偏差为

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-P(x)|.$$

根据条件, 在 $[a,b]$ 内存在 $n+2$ 个点 $x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}$, 使得 $f(x_i)-P(x_i)=(-1)^i\sigma\Delta$, 其中 σ 等于 1 或者 -1.

用反证法. 如果具有以上性质的 $P(x)$ 不是最佳一致逼近的 n 次多项式, 则存在另一个 n 次多项式 $Q(x)$, 使得成立

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-Q(x)|<\Delta.$$

这时两个多项式之差

$$Q(x)-P(x)=[f(x)-P(x)]-[f(x)-Q(x)]$$

在偏差点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+2}$ 上的符号完全由 $f(x_i)-P(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n+2)$ 决定. 由于后者正负相间, 因此 $Q(x)-P(x)$ 存在 $n+1$ 个零点. 由于多项式 $Q(x)-P(x)$ 的次数不会超过 n, 引出矛盾. □

回到 §2.11.4 的习题 1460, 从其附图(b) 可见, 在 $[x_1,x_2]$ 上对于 $f(x)=x^2$ 的最佳一致逼近一次多项式, 即直线

$$g(x)=(x_1+x_2)x-\frac{1}{8}(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2),$$

恰好有三个等值偏差点: x_1, $c=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ 和 x_2. 可以看出, 这是这条直线所具有的独一无二的特征.

2. 关于方程的根的个数问题的两个例子

例题 1 证明三次代数方程

$$f(x)=5x^3-21x^2+15x+17=0$$

只有一个实根.

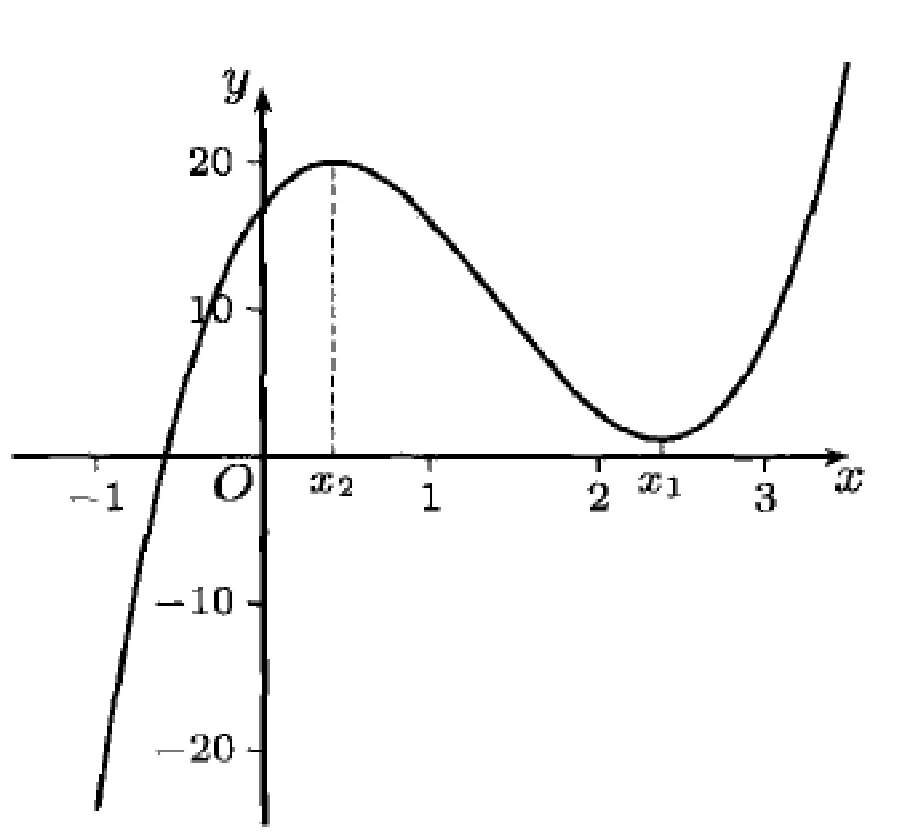
解 1 作代换 $x = t + \dfrac{7}{5}$, 则得到缺少二次项的三次方程
$$t^3 + pt + q = 0,$$
其中 $p = -\dfrac{72}{25} = -2.88$, $q = \dfrac{264}{125} = 2.112$.

应用习题 1470 的结果, 由于 $p < 0$, 而按照 (2.19) 的不等式左边的表达式计算得到
$$q^2 + \frac{4p^3}{27} = \frac{576}{625} = 0.9216 > 0,$$
可见 $f(x) = 0$ 只有一个实根. □

如解 1 那样应用 §2.11.5 的习题 1470 的现成结果并不方便, 因此还不如用该题解中的思想, 这就是下一个解法.

解 2 在三次多项式存在极值点的情况, 若两个极值同号, 则三次方程只有一个实根.

对 $f(x) = 5x^3 - 21x^2 + 15x + 17$ 求导得到
$$f'(x) = 15x^2 - 42x + 15,$$
即可解出两个极值点为 $x_{1,2} = \dfrac{7}{5} \pm \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, 其近似值为
$$x_1 \approx 2.380,\ x_2 \approx 0.420.$$
由此即可求出 $f(x_1), f(x_2)$ 的近似值为
$$f(x_1) \approx 1.154,\ f(x_2) \approx 19.601,$$
可见 $f(x) = 0$ 只有一个实根 (参见附图). □



例题 1 的附图

例题 2 证明四次代数方程
$$g(x) = x^4 - 16x^3 - 2x + 8 = 0$$
恰有两个实根.

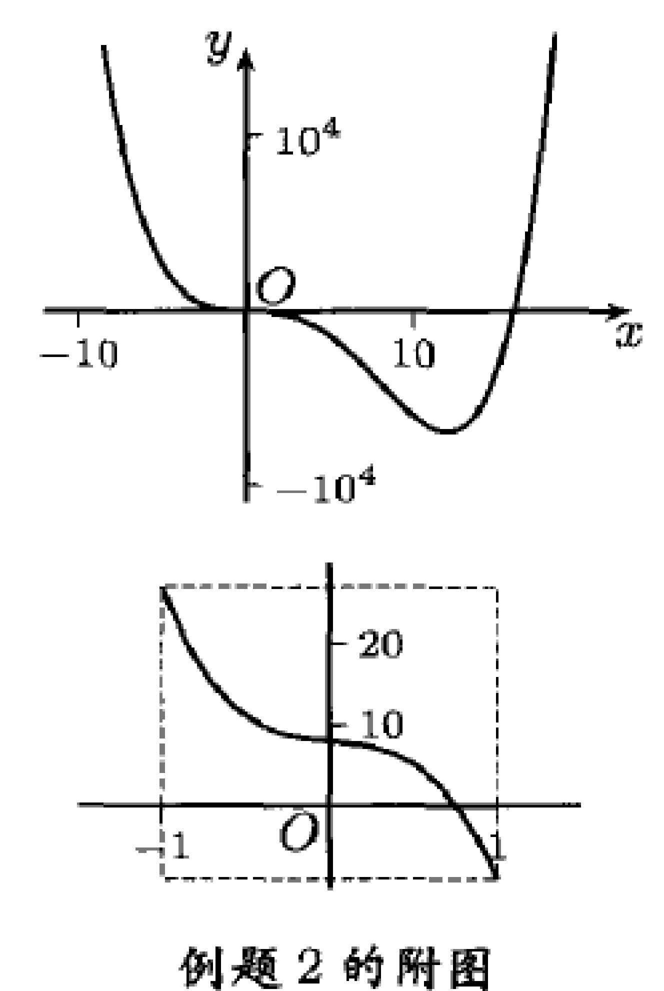
解 从 $g(0) = 8 > 0$, $g(1) = -9 < 0$, 可知 $g(x) = 0$ 至少有两个实根. 若它还有两个实根, 则从罗尔定理可知, $g'(x) = 4x^3 - 48x^2 - 2 = 0$ 必定有三个实根.

从 $g''(x) = 12x(x-8)$ 和 $g'''(x) = 24(x-4)$ 可见, 三次多项式 $g'(x)$ 有两个极值点: $x_1 = 0$, $x_2 = 8$. 计算出极大值 $g'(x_1) = -2 < 0$, 可见极小值 $g'(x_2)$ 必定也小于 0.

由于两个极值同号, 因此 $g'(x) = 0$ 只有一个实根, 记为 $x_3 \approx 12.004$. 它是 $g(x)$ 的极小值点, 也是最小值点.

于是在 $(-\infty, x_3)$ 上 $g(x)$ 严格单调递减, 而在 $(x_3, +\infty)$ 上 $g(x)$ 严格单调递增. 由此可见, $g(x) = 0$ 只有两个实根. □

注 可以计算出 $g(x) = 0$ 的两个实根, 记为 $x_4 \approx 0.752$ 和 $x_5 \approx 16.006$. 在附图的上方是 $y = g(x)$ 的图像, 又为清楚起见, 将原点附近的图像放大后作在下方.



例题 2 的附图

§2.12 根据特征点作函数图像 (习题 1471–1555)

内容简介 本节是用微分学知识来作出函数的比较准确的图像. 将这里的方法与 §1.4 中作草图像的许多方法相结合, 就有可能既把握住图像的基本趋势, 同时又抓住重要的细节 (即所谓特征点).

与 §1.4 的情况类似, 本学习指引专门设置了附录二, 其中包含了 §2.12 的每个习题的图像供参考. (对于含参数的题则取定某个参数后作图.)

由于特征点是通过求解方程 $f'(x) = 0$ 或 $f''(x) = 0$ 得到的, 在不一定能得到根的精确表达式时可以用它们的近似值来代替. 《习题集》中打了星号的题就是如此. 求根的方法可以是 §2.15 中那样的算法, 也可以用 Mathematica, Maple 等软件.

2.12.1 有理函数的图像 (习题 1471–1483)

一开始是关于多项式的三个习题. 与 §1.4 中不同的是, 目前不仅可以利用多项式的一般规律, 而且可以用微分学方法确定极值点和拐点, 作出严格的单调性分析和凸性分析, 从而得到相当准确的图像. 下面只举一个例子, 并指出可以用列表法将求得的信息集中起来以便于观察和使用.

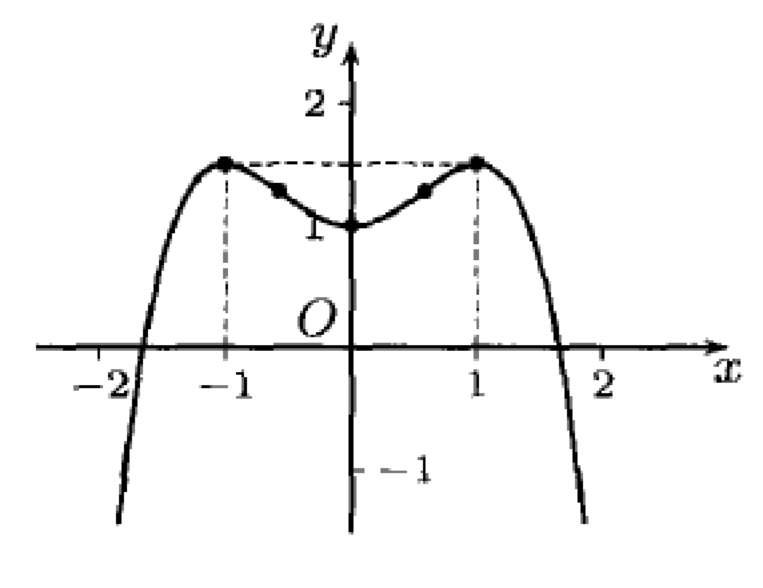
习题 1472 作函数 $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$ 的图像.

解 从方程可见 $y(x)$ 是偶函数, 其图像是开口向下的四次抛物线, 余下的问题就是确定单调区间、极值点、凹凸性区间和拐点. 为此只要计算出

$$y'(x) = 2x - 2x^3 = 2x(1 - x)(1 + x),$$

就得到驻点为 $0, \pm 1$. 从上式因式分解即可确定单调区间, 且确定 $x = 0$ 为极小值点, $x = \pm 1$ 为极大值点. 现将这些信息列表如下. 由于 $y(x)$ 是偶函数, 只需列出 $[0, +\infty)$ 上的信息即可.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
y'	0	$+$	0	$-$	$-\infty$
y	极小值 1	↗	极大值 3/2	↘	$-\infty$



习题 1472 的附图

然后再作凹凸性分析. 计算出

$$y''(x) = 2 - 6x^2,$$

可见有两个零点 $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. 从 $y''(x)$ 在经过这些点时的符号变化可知它们对应于两个拐点 $(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, 1\dfrac{5}{18})$, 近似的坐标值为 $(\pm 0.577, 1.278)$. 当 x 从 $-\infty$ 递增至 $+\infty$ 时, 曲线的凹凸性变化顺序为凹凸凹.

根据以上信息作出的图像已经具有相当的准确性, 不再是草图了. □

接下来的习题是有理分式函数的作图. 它们比多项式要复杂得多. 这时可能出现垂直渐近线和斜渐近线 (包括水平渐近线), 关于极值点和拐点的计算也可能出现复杂的情况. 下面看几个例子.

习题 1475 作函数 $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ 的图像.

解 这是比较简单的一个有理分式函数. 按照 §1.4.1 习题 251 中提示的方法, 将它分解为

$$y = 1 + \frac{8}{x-3} - \frac{3}{x-2},$$

就不难用图像叠加的方法作出草图. 特别是可以从上述分解看出存在两条垂直渐近线 $x=2$, $x=3$ 和水平渐近线 $y=1$. 此外还有两个零点 $x=-1$ 和 1. 于是图像分为三支. 然后用微分学求特征点.

先将 y 对 x 求导得到

$$y'(x) = -\frac{8}{(x-3)^2} + \frac{3}{(x-2)^2} = -\frac{5x^2-14x+5}{(x^2-5x+6)^2}.$$

从 $y'=0$ 解得两个实根:

$$x_1 = \frac{7-2\sqrt{6}}{5} \approx 0.420, \quad x_2 = \frac{7+2\sqrt{6}}{5} \approx 2.380.$$

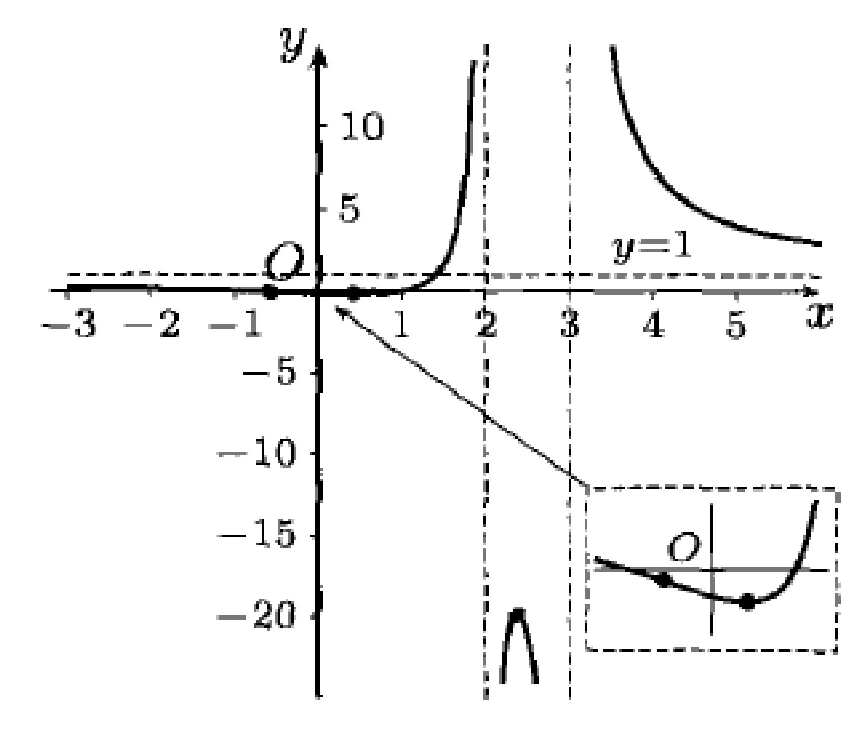
又从 y' 的符号变化可以知道 x_1 是极小值点, 极小值 $y(x_1) \approx -0.202$, x_2 为极大值点, 极大值 $y(x_2) \approx -19.798$.

再求二阶导数得到

$$y''(x) = \frac{2(5x^3-21x^2+15x+17)}{(x^2-5x+6)^3}.$$

在 §2.11.6 的例题 1 中已经证明上式的分子只有一个实根 $x_3 \approx -0.586$. 当 x 从小到大经过 x_3 时 y'' 从负到正, 即凸性从严格凹变到严格凸. 因此 $(x_3, y(x_3))$ 是拐点, 其中 $y(x_3) \approx -0.071$.

此外, 在 $2 < x < 3$ 时 y'' 的表达式中分子为正, 分母为负, 因此 $y'' < 0$, 因此相应的一支曲线是严格凹的. 同样可知, 在 $x > 3$ 的一支上 $y'' > 0$, 曲线是严格凸的.



习题 1475 的附图

根据以上信息就可以作出 $y(x)$ 的图像, 其中还将原点附近用分图放大, 以看出极小值点和拐点附近的情况. □

习题 1482 作 $y = \dfrac{x^4+8}{x^3+1}$ 的图像.

解 若先作分解

$$y(x) = x + \frac{3}{x+1} + \frac{-3x+5}{x^2-x+1},$$

就可以直接看出存在垂直渐近线 $x=-1$ 和斜渐近线 $y=x$. 又若再利用 §1.4.1 中的习题 256–257 的图像作出上述分解式右边第三项的图像, 则就不难用图像叠加的方法作出 $y(x)$ 的草图.

下面用微分学计算特征点. 先求导得到

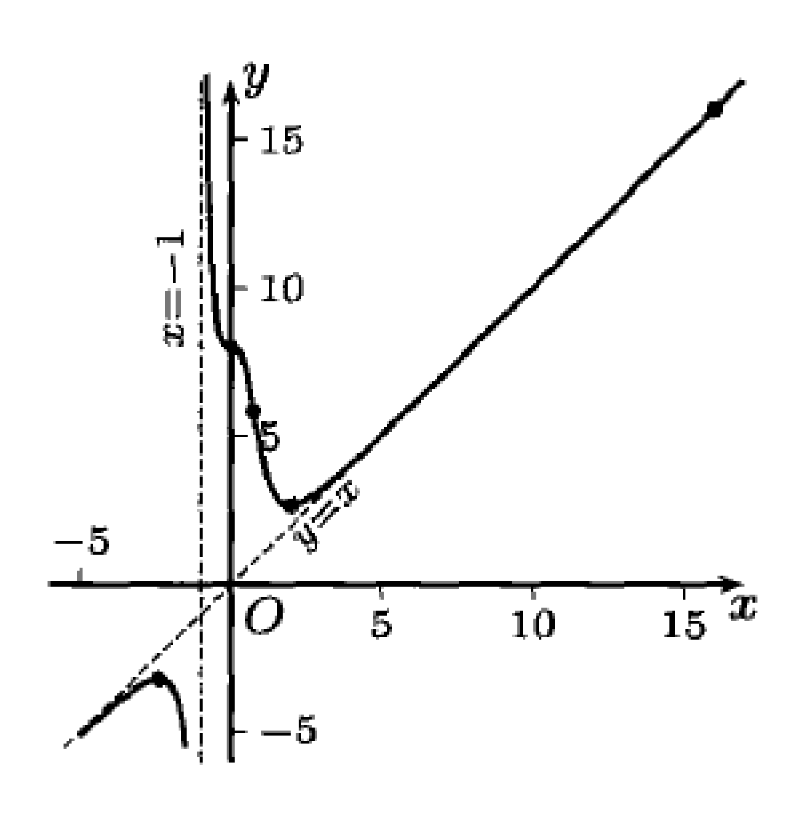
$$y'(x)=\frac{4x^3(x^3+1)-3x^2(x^4+8)}{(x^3+1)^2}=\frac{x^2(x^4+4x-24)}{(x^3+1)^2}.$$

容易得到的实根是 $x_1=0$ 和 $x_2=2$. 从 $x^4+4x-24$ 劈去因子 $x-2$ 后得到三次多项式 $x^3+2x^2+4x+12$. 它的导数 $3x^2+4x+4$ 的判别式大于 0, 可见只有一个实根, 虽然它可以通过四则运算和根式表示, 但这样的公式并不方便, 我们取它的近似值, 记为 $x_3\approx-2.41$.

从 $y'(x)$ 的符号可以判定 $x_2=2$ 是极小值点, 极小值 $y(x_2)=2\frac{2}{3}$; x_3 是极大值点, 极大值 $y(x_3)\approx-3.21$. 然而 $x_1=0$ 的两侧 $y'(x)$ 均小于 0, 因此它不是极值点.

再计算二阶导数得到

$$\begin{aligned}y''(x)&=\frac{(6x^5+12x^2-48x)(x^3+1)^2-2(x^3+1)\cdot3x^2(x^6+4x^3-24x^2)}{(x^3+1)^4}\\&=-\frac{6x(x^4-16x^3-2x+8)}{(x^3+1)^3}.\end{aligned}$$



习题 1482 的附图

从 §2.11.6 的例题 2 可知, 分子除了 $x_1=0$ 这个根之外, 还有两个实根. 求出两个实根的近似值并记为 $x_4\approx0.752$ 和 $x_5\approx16.006$. 通过 $y''(x)$ 的符号变化可以判定它们都对应于图像上的拐点, 其中 $x=0$ 既是驻点, 又对应于一个拐点.

最后计算出拐点的坐标 (的近似值) 为 $(0,8)$, $(0.752,5.835)$, $(16.006,16.004)$, 其中最后一个拐点与渐近线 $y=x$ 非常接近, 在草图上是很难表示的.

根据以上分析即可作出附图所示的图像. □

2.12.2 无理函数与初等超越函数的图像 (习题 1484–1530)

先看一个无理函数的作图, 它表现出与前面的有理函数不同的一些特点.

习题 1487 作 $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$ 的图像.

解 本题的草图是容易得到的, 只需要先作出三次多项式 $y=x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$ 的图像, 然后与幂函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 复合即可. 它显然有两个零点 -1 和 1. 但为了准确把握图像的特性, 还是需要用微分学工具来做.

求导得到

$$y'(x) = \frac{3x^2-2x-1}{3(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x+1}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}}},$$

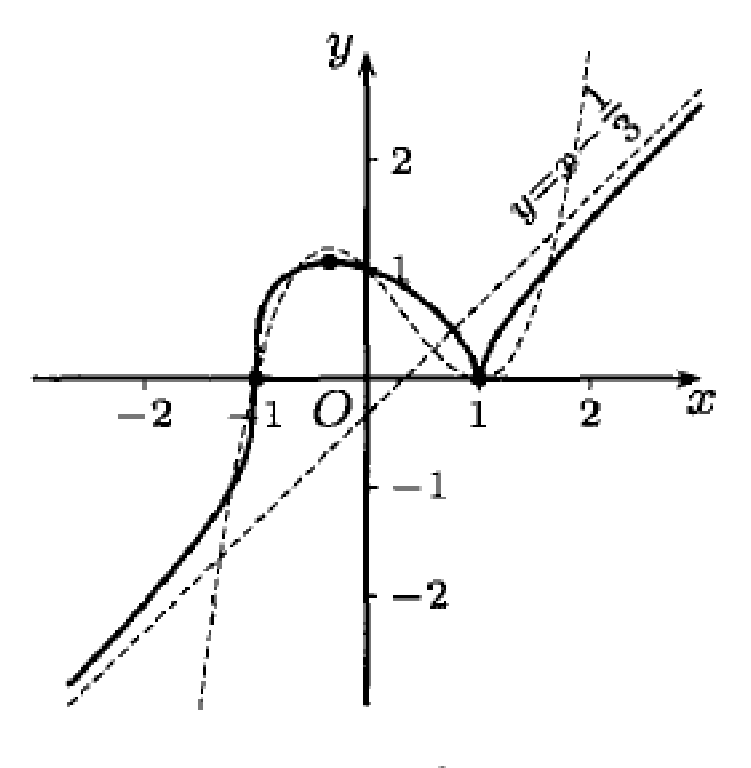
可见其分子有零点 $x_1 = -\dfrac{1}{3}$. 由导数的符号可知 x_1 是极大值点, 极大值为 $y(x_1) = \sqrt[3]{32/27} \approx 1.058$.

由于 $y'(x)$ 的分母在 $x = \pm 1$ 时为 0, 可见 $y(x)$ 在这两点处的导数为 ∞, 即存在垂直切线. 不但如此, 进一步分析在这两个点的两个单侧导数, 可见 $y'(-1\pm 0) = +\infty$, $y'(1-0) = -\infty$, $y'(1+0) = +\infty$, 因此在 $x = 1$ 处图像有尖点 $(1,0)$.

再求二阶导数得到

$$\begin{aligned}
y''(x) &= [(x+\frac{1}{3})(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{2}{3}}]' \\
&= (x-1)^{-\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(x+\frac{1}{3})(x-1)^{-\frac{4}{3}}(x+1)^{-\frac{2}{3}} \\
&\qquad - \frac{2}{3}(x+\frac{1}{3})(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x+1)^{-\frac{5}{3}} \\
&= \frac{3(x-1)(x+1) - \frac{1}{3}(3x-1)(3x+1)}{3(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}.
\end{aligned}$$

可见在 $x < -1$ 时 $y'' > 0$, 曲线为凸, 而在 $x > -1$ 时 $y'' < 0$, 曲线为凹, 因此点 $(-1,0)$ 是拐点.



习题 1487 的附图

从 $y(x) \sim x\ (x\to\infty)$ 可见有可能存在斜率 1 的斜渐近线. 为此计算极限

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}(y(x)-x) \\
&= \lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}-x) \\
&= \lim_{x\to\infty} x\Big(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\Big) \\
&= \lim_{x\to\infty} x\Big(1-\frac{1}{3x}+O(\frac{1}{x^2})-1\Big) = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

即得到斜渐近线 $y = x - \dfrac{1}{3}$.

将以上信息结合草图就可以作出附图中的图像, 其中的虚曲线是三次多项式 $y = x^3 - x^2 - x + 1$ 的图像. □

习题 1509(b) 作函数 $y = \mathrm{e}^{-2x}\sin^2 x$ 的图像.

解 由于 $y = \mathrm{e}^{-2x}$ 和 $y = \sin^2 x$ 都是很熟悉的函数, 因此只要用图像乘法就可以描出 $y(x)$ 的草图, 它夹在 e^{-2x} 与 x 轴之间, 且在每一个区间 $[k\pi,(k+1)\pi]$ 上将 $\sin^2 x$ 在 y 方向拉长. 更具体来说, 从函数 $y(x)$ 的表达式可见成立恒等式

$$y(x+\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi}y(x),$$

因此只要作出在 $[0,\pi]$ 上的 $y(x)$ 的图像, 然后按照 y 方向的比例 $\mathrm{e}^{-2\pi}$ 即可逐次作出任何 $[k\pi,(k+1)\pi]$ 上的图像. 当然其中的许多特征点是需要用微分学来计算的.

计算导数得到

$$y'(x) = e^{-2x}(-2\sin^2 x + 2\sin x\cos x)$$
$$= -2e^{-2x}\sin x(\sin x - \cos x)$$
$$= -2\sqrt{2}e^{-2x}\sin x\sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

于是可从 y' 的符号确定两组极值点:

$$x_k = k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ 和 } x'_k = k\pi,$$

x_k 是极大值点, 极大值为 $y(x_k) = \frac{1}{2}e^{-2k\pi-\frac{\pi}{2}}$, x'_k 是极小值点, 极小值为 0. 其中 k 取所有整数.

再求二阶导数

$$y''(x) = -2\sqrt{2}e^{-2x}[-2\sin x\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos x\sin(x - \frac{\pi}{4}) + \sin x\cos(x - \frac{\pi}{4})]$$
$$= -2\sqrt{2}e^{-2x}[\cos(2x - \frac{\pi}{4}) - \cos\frac{\pi}{4} + \sin(2x - \frac{\pi}{4})]$$
$$= 2e^{-2x}(1 - 2\sin 2x).$$

于是可从 y'' 的符号讨论确定两组拐点:

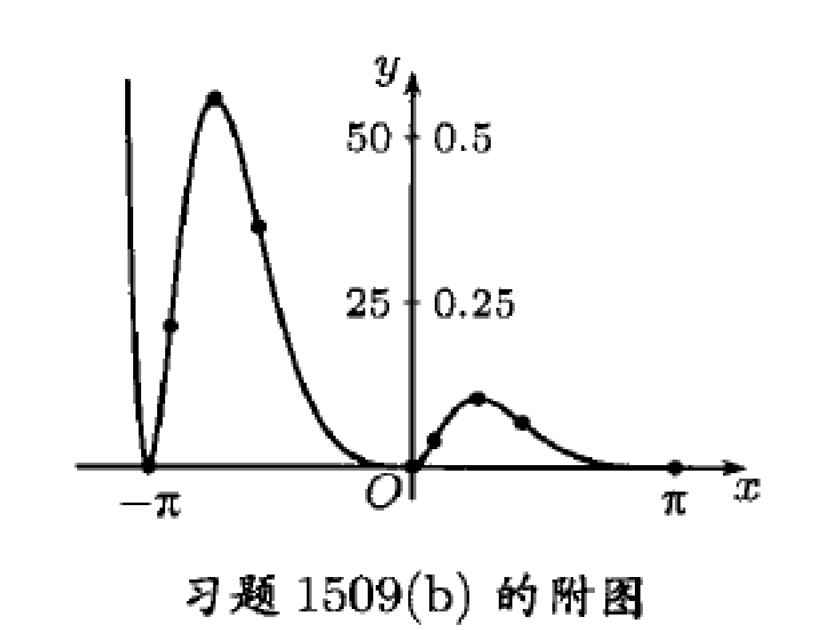
$$(k\pi + \frac{\pi}{12}, e^{-2k\pi-\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{4}) \text{ 和 } (k\pi + \frac{5\pi}{12}, e^{-2k\pi-\frac{5\pi}{6}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{4}),$$

其中 k 取所有整数.

最后是作图像的问题. 如前所说, 可以先作出 $[0,\pi]$ 上的图像, 然后按照 y 方向的比例系数得到在每个 $[k\pi,(k+1)\pi]$ 上的图像. 然而由于这个比例系数是 $e^{2\pi}\approx 535.5$, 要在一张图上画出 $y(x)$ 在较大范围上的图像是有困难的.

在附图中作出了 $[-3.4, 3.4]$ 上的函数图像, 其中在 $x<0$ 和 $x>0$ 的纵坐标的尺度为 100 : 1.

在图上用黑圆点标出的是: 函数 $y(x)$ 的 3 个零点 $x=-\pi,0,\pi$, 它们也是极小值点; 4 个拐点, 它们的坐标近似值为 $(-2.88, 21.3)$, $(-1.83, 36.4)$, $(0.262, 0.0397)$, $(1.31, 0.068)$; 两个极大值点, 它们的坐标近似值为 $(-2.36, 55.6)$, $(0.785, 0.104)$. □



习题 1509(b) 的附图

注　以上附图在点 $x=0$ 有失真之处. 这是因为两侧的 y'' 差了 100 倍, 尽管 $y'=0$ 都成立. 用 §2.14 的曲率概念来说, 在点 $(0,0)$ 两侧邻近的曲线弧若用曲率圆的弧来代替的话, 圆半径差了 100 倍.

习题 1521　作 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的图像.

解　函数 $y(x)$ 在点 $x=0$ 处没有定义. 将 y 对 x 求导得到

$$y'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{x+2}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(x-2)(x+1),$$

可见 $x=-1$ 是极大值点, 极大值为 $y(-1)=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.368$, $x=2$ 是极小值点, 极小值为 $y(2)=4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\approx 6.595$.

再求二阶导数得到

$$y''(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}\big(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\big)\Big)$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big(\frac{2+5x}{x^4}\Big),$$

可见 $x=-\frac{2}{5}$ 对应的点 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}})$ 是图像的一个拐点, 其左侧为凹, 右侧为凸.

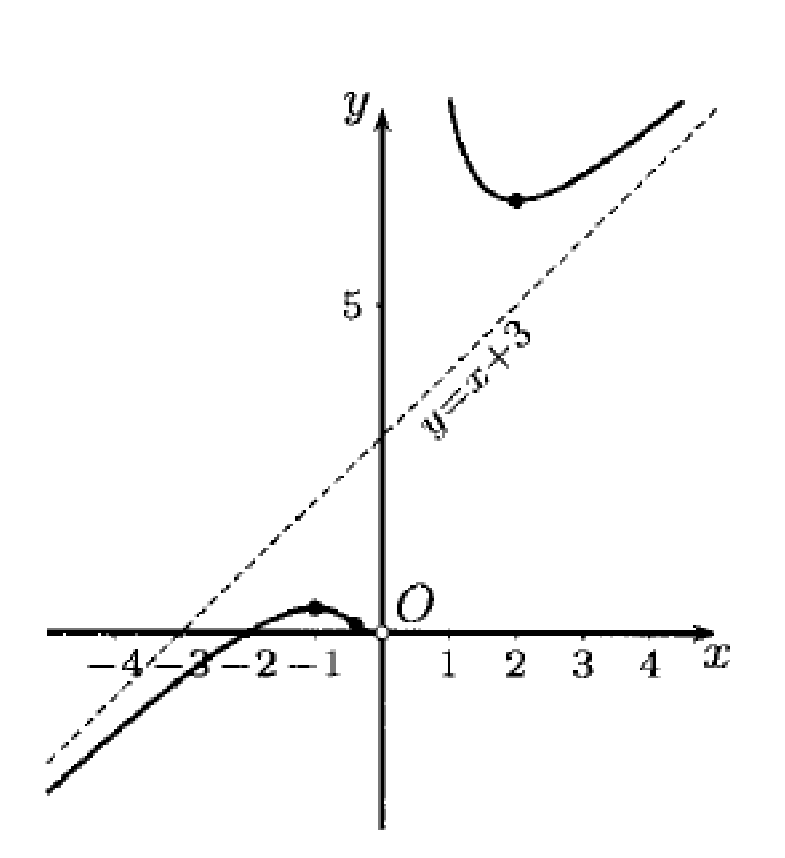
此外从 $y(+0)=+\infty$ 可见存在垂直渐近线 $x=0$, 又从 $y(-0)=0$ 可见, 若在点 $x=0$ 补充定义 $y(0)=0$, 则在该点左连续.

从 $y(x)\sim x\ (x\to\infty)$ 知可能存在斜渐近线. 计算

$$\lim_{x\to\infty}(y(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\Big(x\,(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)+2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\Big)$$
$$=2+\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=3,$$

即有斜渐近线 $y=x+3$.

根据以上分析即可作出附图所示的图像. □



习题 1521 的附图

注 图像中的拐点的纵坐标为 $\frac{8}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}\approx 0.131$, 在作草图中很容易被忽略. 这也是选讲本题的动机之一.

下面两个题中的函数都是经常会见到的基本例子.

习题 1526 作函数 $y=x^x$ 的图像.

解 函数的定义域为 $(0,+\infty)$. 从习题 1342 知道有 $y(+0)=1$.

求导数得到

$$y'(x)=x^x(x\ln x)'=x^x(1+\ln x),$$

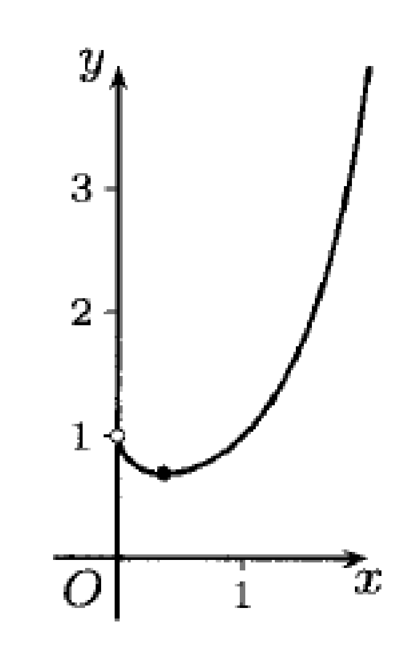
可见在 $(0,\mathrm{e}^{-1}]$ 上 $y(x)$ 严格单调递减, 在 $[\mathrm{e}^{-1},+\infty)$ 上严格单调递增, $x=\mathrm{e}^{-1}\approx 0.368$ 是极小值点, 极小值 $y(\mathrm{e}^{-1})=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}\approx 0.692$.

再求二阶导数得到

$$y''(x)=x^x\Big((1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\Big)>0,$$

可见 $y(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数.

根据以上分析即可作出附图中所示的图像. □



习题 1526 的附图

习题 1527 作 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的图像.

解 函数的定义域是 $(0,+\infty)$. 求 $x\to+0$ 时的极限

$$y(+0)=\lim_{x\to+0}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln x}{x}}=0$$

(这并非不定式). 又有

$$y(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}=\mathrm{e}^0=1,$$

因此存在水平渐近线 $y=1$.

计算出导数为

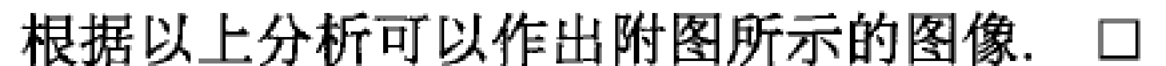
$$y'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x),$$

因此有极大值点 $x=\mathrm{e}$, 极大值为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\approx 1.444\,668$.

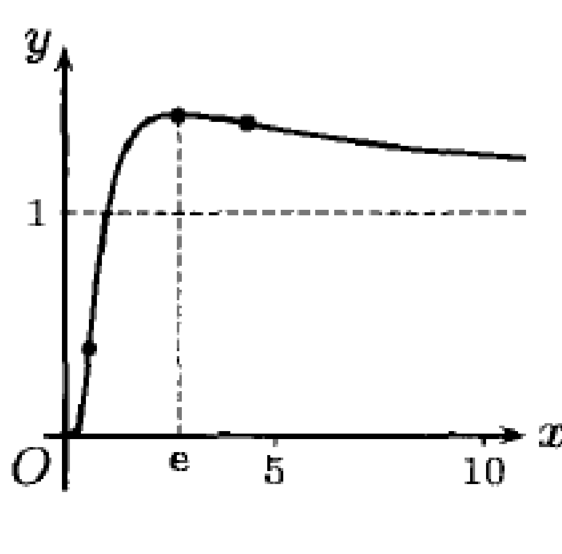
再求二阶导数为

$$y''(x)=x^{\frac{1}{x}-4}[1-3x+2(x-1)\ln x+\ln^2 x],$$

求出两个根的近似值为 0.582 和 4.368, 它们对应于两个拐点, 其近似的坐标为 (0.582, 0.394) 和 (4.368, 1.401).



根据以上分析可以作出附图所示的图像. □



习题 1527 的附图

注 1 这里指出本题与前面某些习题的联系.

在 $x^{\frac{1}{x}}$ 中取 x 为正整数 n 就得到数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$. 利用 §1.2.2 的习题 65 (即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$), 就可以直接证明本题中的 $y(+\infty)=1$. 在 §2.11.2 的习题 1455(c) 中确定该数列的最大项也是用本题的函数 $y(x)$ 作为工具来解决的.

注 2 介绍与此题有关的一个有趣的小问题: 在 e^{π} 和 π^{e} 中哪一个更大?

由于本题已经证明 $\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 是函数 $x^{\frac{1}{x}}$ 的最大值, 即对于任何 $x\neq\mathrm{e}$ 的正数 x, 都有

$$x^{\frac{1}{x}}<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}},$$

从而就有

$$x^{\mathrm{e}}<\mathrm{e}^{x},$$

可见 $x=\pi$ 只是其中的特例而已. 可计算出 $\pi^{\mathrm{e}}\approx 22.459<\mathrm{e}^{\pi}\approx 23.141$.

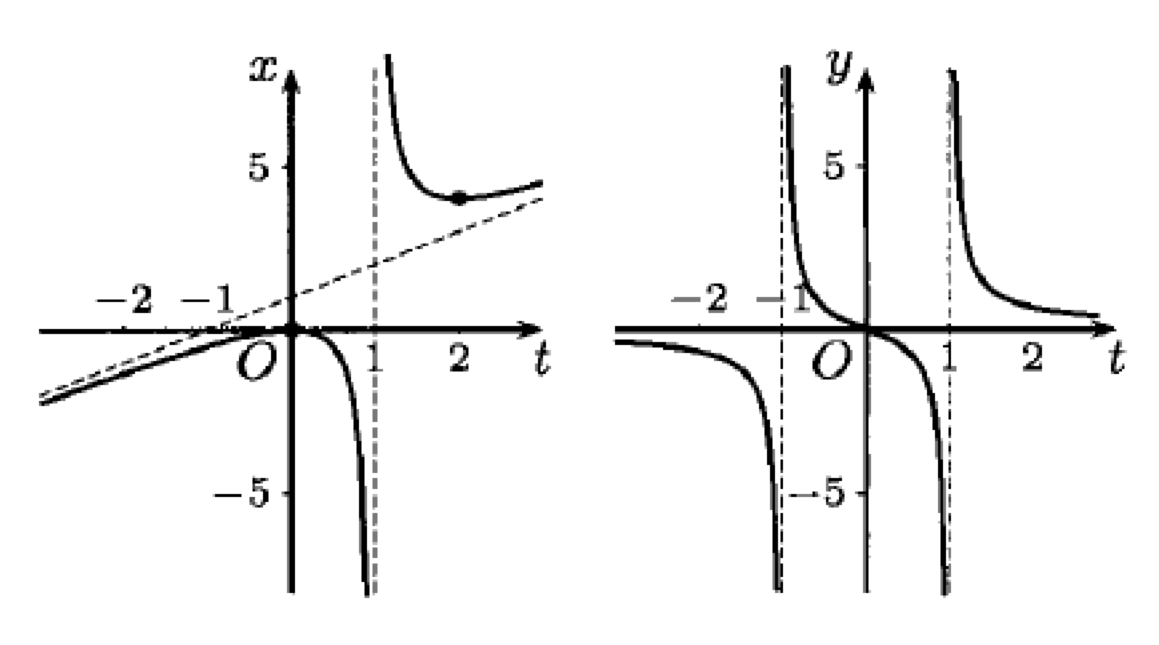
注 3 类似地导出以下不等式: 当 $0<a<b<\mathrm{e}$ 时 $a^b<b^a$, 而当 $\mathrm{e}<a<b$ 时 $a^b>b^a$.

2.12.3 参数方程与隐函数方程表示的曲线 (习题 1531–1545)

在 §1.4.4 中通过对习题 369 的两个小题 (b), (g) 的讨论, 已经介绍了作其草图的基本方法. 将这样的方法配合微分学工具后, 就有可能通过对特征点的计算将图作得更为准确. 这在 §2.2.2 的习题 1038 中已经有所体现, 只是当时的微分学工具还太少.

习题 1531 中的函数的方程也可以改写为 $\sqrt{x}-\sqrt{y}=1$, 它的作图不难. 对于习题 1532 则可以参考 §2.2.2 中的习题 1038, 两者的图像只相差平移与关于 x 轴的反射.

习题 1533 作出由参数方程 $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$ 给定的曲线.



习题 1533 的附图 1

解 先分别考虑 $x(t)=t+1+\dfrac{1}{t-1}$ 和 $y(t)=\dfrac{t}{t^2-1}$ 的图像. 参考附录一中的习题 253 和 259 的图像就不难如附图 1 所示作出它们的图像. 从图上可见 $y(t)$ 的三支都随 t 的递增而单调递减, 而对于 $x(t)$ 则需要计算

$$x'(t)=1-\frac{1}{(t-1)^2}=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2},$$

从而知道 $t=0$ 为极大值点, 极大值 $x(0)=0$, $t=2$ 为极小值点, 极小值 $x(2)=4$.

由此即可对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别作单调性分析, 并列表如下:

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
x	↗	-0.5	↗	0	↘		↘	4	↗
y	↘		↘	0	↘		↘	$2/3$	↘

由于 $y(t)$ 的三支都是 t 的严格单调递减函数, 因此将 x 看作为 y 的函数更为方便. 这样就可以确定函数 $x=x(y)$ 有三支曲线. 以 t 的变化为序并对照附图 1 叙述如下.

第 I 支曲线对应于 $t\in(-\infty,-1)$, y 从 0 递减趋于 $-\infty$, $x(y)$ 从 $-\infty$ 递增趋于 $-\dfrac{1}{2}$; 第 II 支曲线对应于 $t\in(-1,1)$, y 从 $+\infty$ 递减趋于 $-\infty$, $x(y)$ 从 $-\dfrac{1}{2}$ 递增至 0, 然后递减趋于 $-\infty$; 第 III 支曲线对应于 $t\in(1,+\infty)$, y 从 $+\infty$ 递减趋于 0, $x(y)$ 从 $+\infty$ 递减至 4, 然后递增趋于 $+\infty$. 这样就完成了每一支曲线的 $x=x(y)$ 的单调性分析.

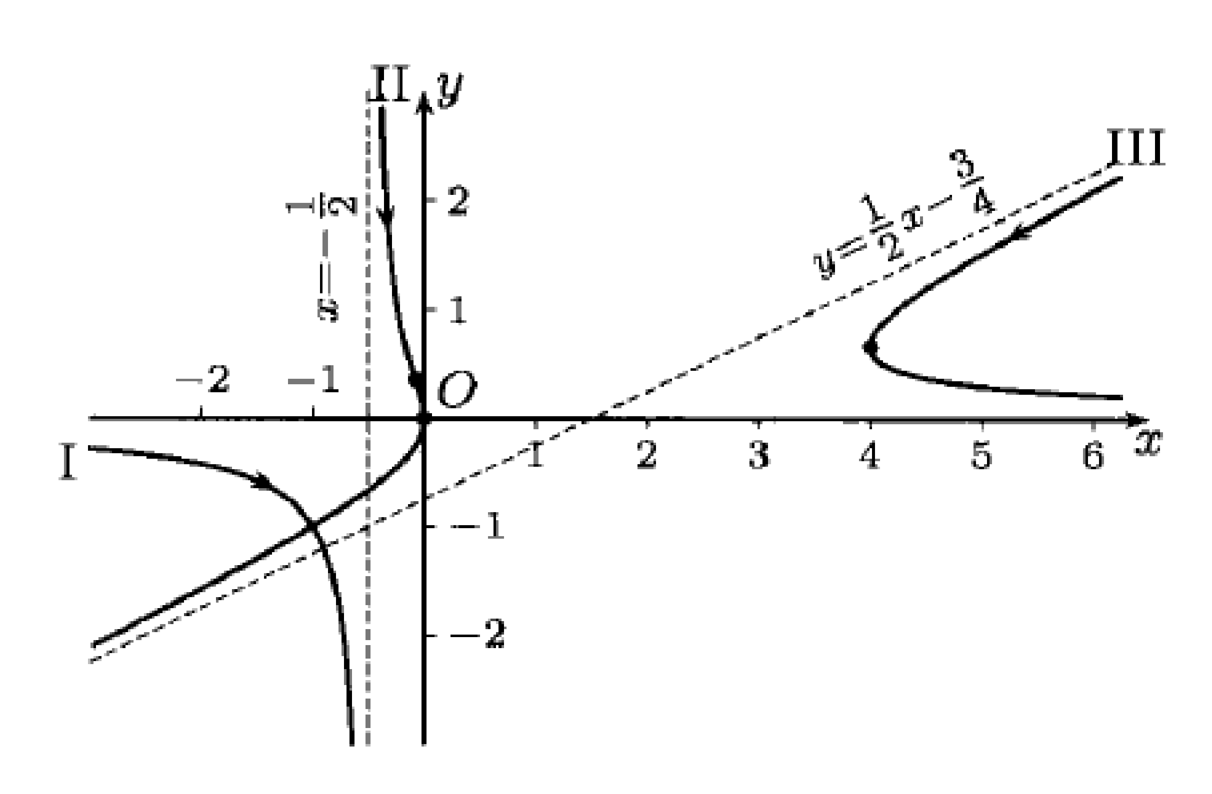
从表格可见当 t 趋于 $-1, 1$ 和 ∞ 时点 $(x(y),y)$ 都趋于无穷远处, 即有可能存在渐近线.

首先是当 $t\to-1$ 时, 有垂直渐近线 $x=-\dfrac{1}{2}$, 而当 $t\to\infty$ 时有水平渐近线 $y=0$. 然后计算极限

$$\lim_{t\to1}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to1}\frac{1}{t(t+1)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{t\to1}[y(t)-\frac{1}{2}x(t)]=\lim_{t\to1}\frac{2t-t^3-t^2}{2(t^2-1)}=-\frac{3}{4},$$

可见有斜渐近线 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$.



习题 1533 的附图 2

这样就可如附图 2 所示作出三支曲线. 若考虑函数 $y=y(x)$, 则没有任何极值点. 反之, 若考虑 $x=x(y)$, 则 $y=0$ 是极大值点, 极大值 $x(0)=0$, $y=2/3$ 是极小值点, 极小值 $x(2/3)=4$.

最后作凸性分析. 仍然以 x 作为自变量, 则先求出导数

$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t^2+1}{2t+3t^2-t^4},$$

$$y''(x)=\frac{[y'(x)]'_t}{x'(t)}=\frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{(t-2)^3t^3(t+1)^3},$$

可以证明 $t^3+3t+1=0$ 只有一个实根, 其近似值为 -0.322, 对应于第 II 支曲线中的拐点 $(-0.079, 0.360)$.

从 $y''(x)$ 和参数 t 的变化范围与方向, 可知第 I 支曲线为凹, 第 II 支曲线为凸凹凸, 第 III 支曲线为凹凸. □

以下是用引入参数的方法作隐函数方程确定的函数的图像. 其中第一题即是前面 §1.4.4 的习题 370.1(b), 因此只作一些补充说明, 请读者完成解题的全过程.

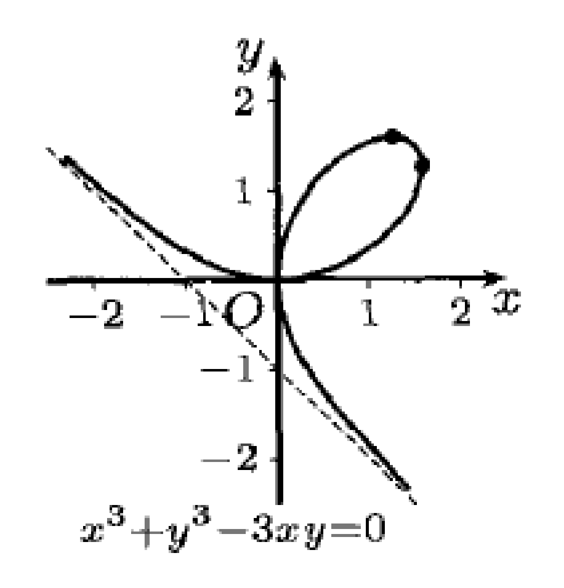
习题 1541 作 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ 的图像 (笛卡儿叶形线).

补充 只要令 $x=ax', y=ay'$ 代入, 并将 x', y' 重记为 x, y, 就得到 $x^3+y^3-3xy=0$, 即已经归结为 §1.4.4 的习题 370.1(b), 它相当于这里的 $a=1$. 以下只对此作补充.

如习题 370.1(b) 的解所示, 由于方程关于 x, y 对称, 可知图像关于直线 $y=x$ 是对称的. 令 $y=tx$, 即以点 (x,y) 到原点的连接线的斜率 t 为参数, 就得到参数方程

$$x(t)=\frac{3t}{1+t^3},\quad y(t)=\frac{3t^2}{1+t^3},$$

然后就可用微分学工具作出单调性分析. 与此有关的特征点和 $y(x)$ (或者 $x(y)$) 的单调性在习题 370.1(b) 中都已经求出. 此外, 在那里也已经求出了渐近线方程 $x+y+1=0$. 这些不再重复.



习题 1541 的附图

以下列出 y 关于 x 的一阶和二阶导数的计算结果供参考:

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t(t^3-2)}{2t^3-1},\quad y''_x=\frac{[y'_x]'_t}{x'(t)}=-\frac{2(t^3+1)^4}{3(2t^3-1)^3}.$$

凹凸性分析的结果表明, 笛卡儿叶形线没有拐点, 细节从略. □

习题 1543 作 $x^2y^2=x^3-y^3$ 的图像.

解 在方程中将 x 与 $-y$ 对换后方程不变, 这表明图像关于直线 $y=-x$ 对称.

通过 $y=tx$ 引入参数 t, 得到参数方程

$$x(t)=\frac{1}{t^2}-t,\quad y(t)=\frac{1}{t}-t^2.$$

求导得到

$$x'_t=-\frac{2}{t^3}-1,\quad y'_t=-\frac{1}{t^2}-2t,$$

然后就有 $y=y(x)$ 的导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

由此可见需要注意以下几个参数值:

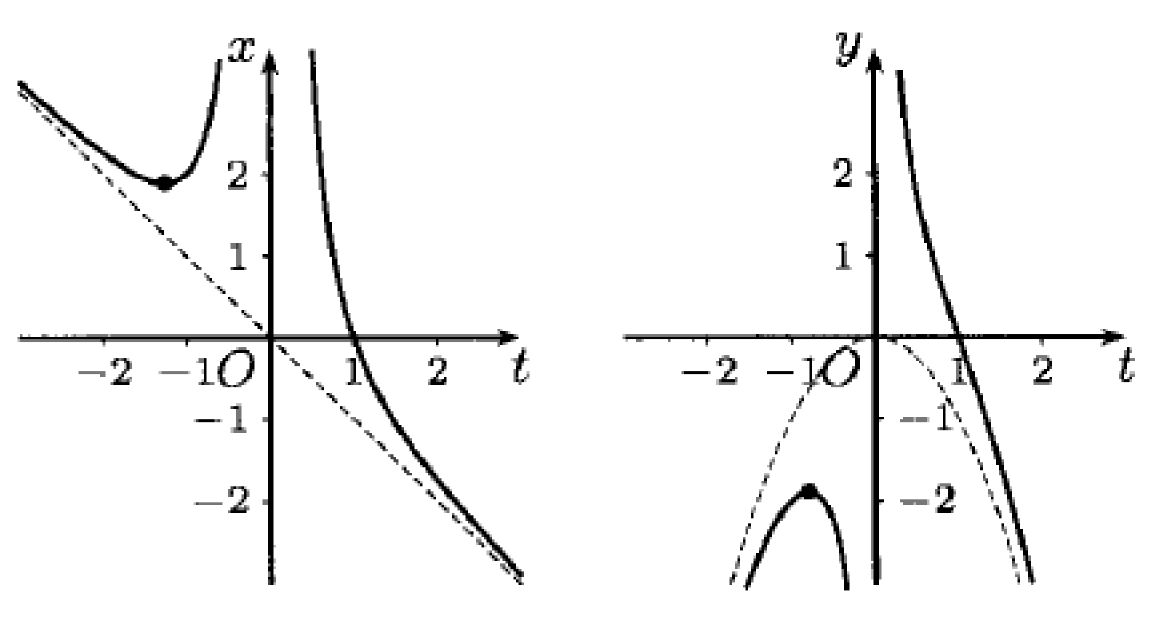
$$t_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0.794,\ t_2 = \frac{1}{t_1} = -\sqrt[3]{2} \approx -1.260.$$

以下是关于上述导数的符号信息的列表表示:

t	$(-\infty, t_2)$	t_2	(t_2, t_1)	t_1	$(t_1, 0)$	$(0, +\infty)$
x'_t	−	0	+	+	+	−
y'_t	+	+	+	0	−	−
y'_x	−	∞	+	0	−	+

从 $x(t)$ 的表达式可见它有垂直渐近线 $t=0$ 和斜渐近线 $x=-t$, 从 $y(t)$ 的表达式可见它有垂直渐近线 $t=0$, 且当 $t\to\infty$ 时趋于抛物线 $y=-t^2$.

根据表格中的单调性分析可作出附图 1 所示的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的图像. 其中 $x(t)$ 有极小值点 $t_2\approx -1.260$, 极小值 $x(t_2) = 3/\sqrt[3]{4} \approx 1.890$. $y(t)$ 有极大值点 $t_1 \approx -0.794$, 极大值 $y(t_1) = -x(t_2)$.



习题 1543 的附图 1

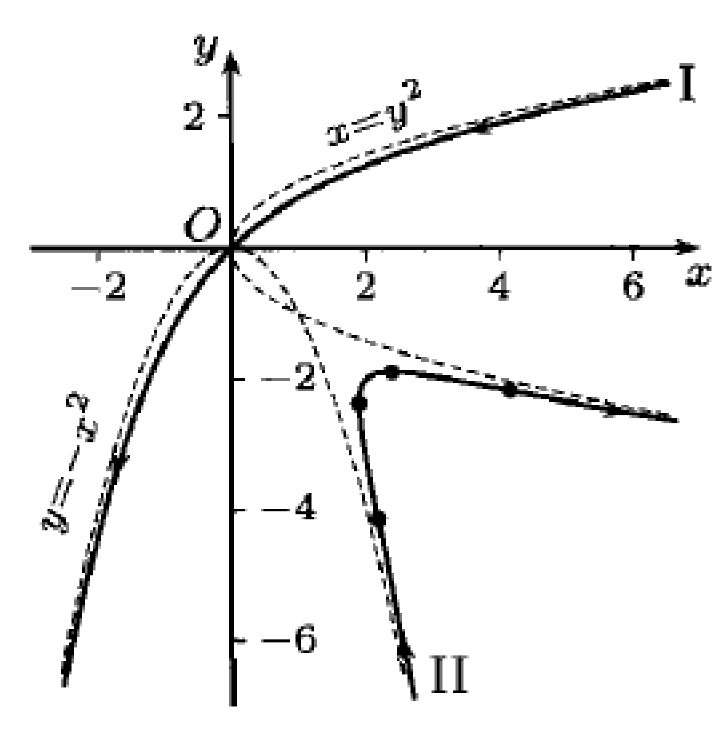
由以上分析可知本题的函数图像分为两支. 参数 $t\in(0,+\infty)$ 对应于第 I 支. $t\in(-\infty,0)$ 对应于第 II 支. 前者的 $y(x)$ 关于 x 严格单调递增, 后者则随参数 t 的递增按照递减、递增再递减的顺序变化.

从 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的表达式可见, 当 $t\to 0$ 和 $t\to\infty$ 时点 $(x(t), y(t))$ 会远离原点, 且可看出与抛物线 $y=-x^2$ 和 $x=y^2$ 接近. 直接用参数方程即可证明

$$\lim_{t\to 0}[x(t) - y^2(t)] = \lim_{t\to 0}[\frac{1}{t^2} - t - (\frac{1}{t^2} - 2t + t^4)] = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}[y(t) + x^2(t)] = \lim_{t\to\infty}[\frac{1}{t} - t^2 + (\frac{1}{t^4} - \frac{2}{t} + t^2)] = 0.$$

根据以上分析就可以作出如附图 2 所示的隐函数方程 $x^2y^2 = x^3 - y^3$ 的图像, 在其中的箭头为 t 递增方向, 还用虚线作出了 $y=-x^2$ 和 $x=y^2$ 这两条"渐近抛物线".



习题 1543 的附图 2

在图中的 4 个小黑圆点除了两个分别为 x 和 y 的极值点之外, 其余两个是拐点. 它们是如下得到的.

按照公式计算二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{t+2t^4}{2+t^3}\right)'_t \cdot \left(-\frac{t^3}{2+t^3}\right) = -\frac{2t^3(t^6+7t^3+1)}{(t^3+2)^3},$$

可见当 $t>0$ 时 $y(x)$ 始终是凹函数, 这就是图中穿过第一、三象限的第 I 支曲线. 然而当 $t<0$ 时的第 II 支曲线的凹凸性则有较复杂的变化. 分析如下.

当 $t<0$ 时从 $y''(x)=0$ 解得两个参数值

$$t_3=-\sqrt[3]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\approx -1.899,\quad t_4=\frac{1}{t_3}=-\sqrt[3]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}\approx -0.526.$$

它们对应的拐点坐标的近似值为 $(2.18,-4.14),(4.14,-2.18)$.

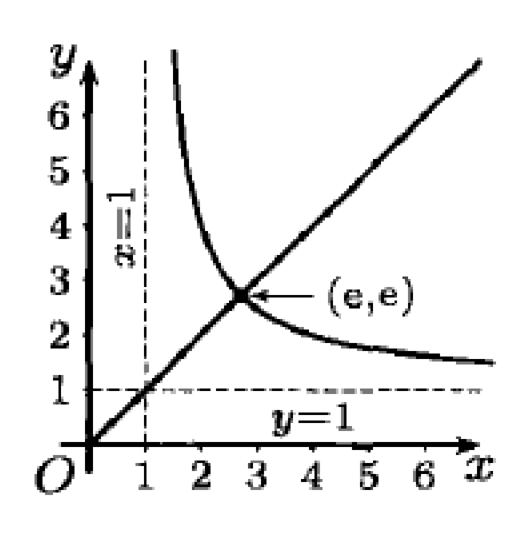
最后利用二阶导数 $y''(x)$ 的表达式对第 II 支曲线作凹凸性分析并列表如下:

t	$(-\infty,t_3)$	t_3	(t_3,t_2)	t_2	(t_2,t_4)	t_4	$(t_4,0)$
$y''(x)$	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$
$y(x)$	凹	拐点	凸	x 的极小值点	凹	拐点	凸

□

注 t_2 对应的就是在附图 2 中的点 $(1.89,-2.38)$, 在该处 x 达到极小值. 在上述列表中似乎在它的两侧的曲线分别为凸和凹, 然而这是就参数 t 来观察的. 从附图中可见, 该点的左侧邻近没有函数图像中的点, 而在该点右侧邻近则对一个 x 值有两个 y 值满足隐函数方程, 因此该点不是拐点. 这种情况在参数方程和隐函数方程给出的曲线中是常见的.

习题 1544 作 $x^y=y^x\ (x>0,y>0)$ 的图像.



习题 1544 的附图

补充 由于本题已经在 §1.4.4 的习题 370.1(g) 中作过详细讨论, 这里只作一点补充. 主要的问题就是在那里的草图中是否遗漏了什么重要的特征点?

已知图像有两支, 其中平凡的一支就是 $y=x\ (x>0)$, 另一支记为 $y(x)\ (x>1)$, 它是我们研究的主要对象.

这里有两种方法. 第一种是用隐函数理论可以证明 $y=y(x)$ 的存在和可微性, 并可以用 §2.2.3 的方法计算出它的一阶导数和二阶导数. 由于这方面的理论本身要到多元微积分中学习, 这里从略.

第二种方法就是如前一样从 $y=tx$ 引入参数方程, 即得到

$$x(t)=t^{\frac{1}{t-1}},\ y(t)=t^{\frac{t}{t-1}},\ t>0,$$

然后在 $t\neq 1$ 时的可微性以及从 $x=x(t)$ 推出反函数的存在性都没有原则上的困难. 下面只作一点计算.

按照参数方程定义的函数的求导法则得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{t^{\frac{t}{t-1}}\cdot[(1+\frac{1}{t-1})\ln t]'}{t^{\frac{1}{t-1}}\cdot[\frac{1}{t-1}\ln t]'}=\frac{t^2(t-1-\ln t)}{t-1-t\ln t}.$$

将分子的括号内的表达式记为 $f(t)$, 则 $f'(t)=1-\frac{1}{t}$, 可见在 $t>1$ 时 $f'(t)>0$, 在 $0<t<1$ 时 $f'(t)<0$. 由于 $f(1)=0$, 可见当 $t\neq 1$ 时分子 $f(t)$ 总是大于 0 的. 又将分母改写为

$$t-1-t\ln t=t\Big(1-\frac{1}{t}+\ln\frac{1}{t}\Big)=-tf\big(\frac{1}{t}\big),$$

可见在 $t>0$ 时分母总是小于 0 的. 于是除了 $t=1$ 对应的点 $x=\mathrm{e}$ 之外, 总有 $y'(x)<0$, 即 $y(x)$ 为严格单调递减. (在 $x=\mathrm{e}$ 处如前所说可以按照 $y=\mathrm{e}$ 连续延拓.)

不但如此, 在导函数 $y'(x)$ 的表达式中令 $t\to 1$, 然后对不定式作计算就得到极限值为 -1. 从导数极限定理可知, 在点 $x=\mathrm{e}$ 处的导数也存在, 且使得导函数在该处连续.

为了讨论图像的凹凸性, 需要计算二阶导数 $y''(x)$. 可以证明它处处大于 0, 因此 $y(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的凸函数. 于是本题的图像没有任何特征点.

这最后一步的计算和证明虽然只是初等的运算, 但较为复杂, 我们将它写成为 §2.12.6 中的命题 2.12. □

注 与隐函数方程 $x^y=y^x$ 有关的问题很多. 下面介绍伯努利对的结果.

1728 年丹尼尔·伯努利写信给哥德巴赫, 说他证明了方程 $x^y=y^x$ 除了 $2^4=4^2$ 这一组解之外, 不存在任何其他正整数解. 他又说, 该方程存在无穷多个有理数组解. 此后, 满足该方程的一对正数 (x,y) 就称为伯努利对.

读者容易验证, 对每一个正整数 n, 在 §1.2.3 的习题 69 中与数 e 有关的

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

恰好就是伯努利对. $n=1$ 时就是 $(2,4)$, $n=2$ 时就是 $\left(\frac{9}{4},\frac{27}{8}\right)$, 实际上不难看出有

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3\cdot\frac{9}{4}}=\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}}.$$

胡尔维茨已经证明, 在有理数的范围内, 除了这些解之外没有其他伯努利对.

2.12.4 极坐标系中的函数图像 (习题 1546–1550)

在 §1.4.5 中已经介绍过在极坐标中作函数草图的方法. 下面选两个例子来讲解.

习题 1549 在极坐标系 (φ,r) $(r\geqslant 0)$ 中作函数 $r=a\dfrac{\tanh\varphi}{\varphi-1}$ 的图像, 其中 $\varphi>1$, $a>0$.

解 如 §1.4.5 所示, 首先在 (φ,r) 的直角坐标系中观察 $r=r(\varphi)$ 的变化趋势. 为此只要计算 r 对 φ 的导数. 由于双曲正切函数的求导公式一般使用较少, 下面还是将该函数用指数函数表示后求导 (双曲函数的定义与图像见附录一 的习题 340).

为简单起见取 $a=1$.

于是先写出 $r=\dfrac{1}{\varphi-1}\cdot\dfrac{\mathrm{e}^\varphi-\mathrm{e}^{-\varphi}}{\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi}}$, 然后求导得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}&=-\frac{1}{(\varphi-1)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^\varphi-\mathrm{e}^{-\varphi}}{\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi}}+\frac{1}{\varphi-1}\cdot\frac{(\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi})^2-(\mathrm{e}^\varphi-\mathrm{e}^{-\varphi})^2}{(\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi})^2}\\&=-\frac{1}{(\varphi-1)^2}\cdot\frac{\mathrm{e}^\varphi-\mathrm{e}^{-\varphi}}{\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi}}+\frac{1}{\varphi-1}\cdot\frac{4}{(\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi})^2}\\&=\frac{1}{(\varphi-1)^2(\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi})^2}\cdot[4(\varphi-1)-(\mathrm{e}^\varphi-\mathrm{e}^{-\varphi})(\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi})]\\&=\frac{1}{(\varphi-1)^2(\mathrm{e}^\varphi+\mathrm{e}^{-\varphi})^2}\cdot[4(\varphi-1)-(\mathrm{e}^{2\varphi}-\mathrm{e}^{-2\varphi})],\end{aligned}$$

于是只要研究最后一式的方括号内的符号. 将它记为

$$f(\varphi)=4(\varphi-1)-(\mathrm{e}^{2\varphi}-\mathrm{e}^{-2\varphi}),$$

则有 $f(0)=-4<0$,

$$f'(\varphi)=4-2\mathrm{e}^{2\varphi}-2\mathrm{e}^{-2\varphi},$$

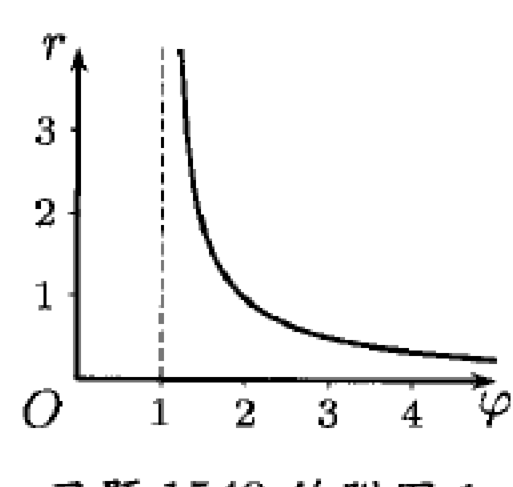
$$f''(\varphi)=-4\mathrm{e}^{2\varphi}+4\mathrm{e}^{-2\varphi},$$

可见在 $\varphi>0$ 时 $f''(\varphi)<0$, 然后结合 $f'(0)=0$ 和 $f(0)=-4$ 就可推出 $f(\varphi)<0$. (原来只需要在 $\varphi>1$ 上建立这个不等式, 但从上面的讨论可见在 $\varphi>0$ 上讨论更方便.)

由此可见 $\varphi>1$ 时 $r(\varphi)$ 是严格单调递减函数 (见附图 1). 又容易得到

$$r(1+0)=+\infty,\ r(+\infty)=0,$$

即当 $\varphi\to 1+0$ 时图像上的点趋于无穷远. 随着 φ 的递增, r 递减趋于 0, 因此在极坐标中的图像是趋于极点 O 的螺线. (参见在 §1.4.5 的习题 371.1(h) 和附录一中的其他螺线的例子.)



习题 1549 的附图 1

为了把握 $\varphi\to 1+0$ 时图像远离原点时的性态, 我们来看本题的图像是否存在渐近线. 从 $\varphi\to 1+0$ 时 $r\to+\infty$ 可以知道, 如果存在渐近线, 它的斜率只能是 $\tan 1$. 引入直角坐标方程

$$x(\varphi)=\frac{\tanh\varphi}{\varphi-1}\cdot\cos\varphi,$$

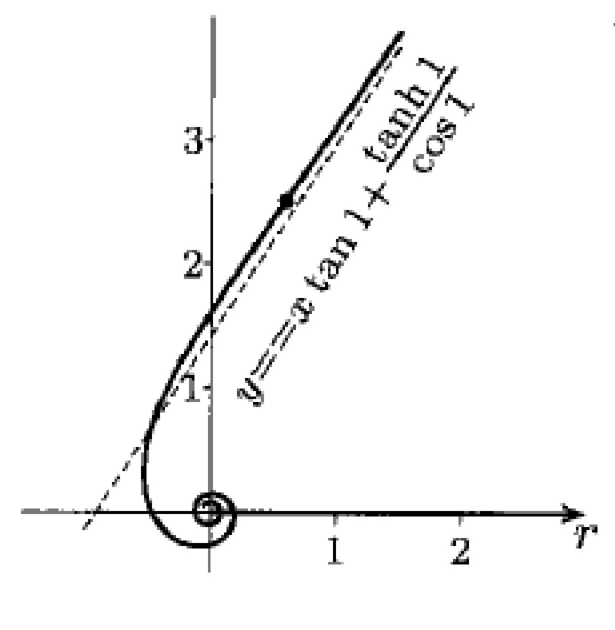
$$y(\varphi)=\frac{\tanh\varphi}{\varphi-1}\cdot\sin\varphi,$$

然后就有

$$\lim_{\varphi\to 1+0}\frac{y(\varphi)}{x(\varphi)}=\lim_{\varphi\to 1+0}\tan\varphi=\tan 1.$$

再求下列极限:

$$\begin{aligned}&\lim_{\varphi\to 1+0}[y(\varphi)-\tan 1\cdot x(\varphi)]\\&=\lim_{\varphi\to 1+0}\frac{\tanh\varphi}{\varphi-1}\cdot(\sin\varphi-\tan 1\cdot\cos\varphi)\\&=\tanh 1\cdot\cos 1\cdot\lim_{\varphi\to 1+0}\frac{\tan\varphi-\tan 1}{\varphi-1}\\&=\tanh 1\cdot\cos 1\cdot\sec^2 1\\&=\frac{\tanh 1}{\cos 1}.\end{aligned}$$



习题 1549 的附图 2

可知存在渐近线

$$y=x\tan 1+\frac{\tanh 1}{\cos 1}.$$

根据以上分析可以作出附图 2 所示的图像. 从曲线与渐近线相交可知存在拐点 (见 §2.8.2 的习题 1317 的注). 用 Mathematica 软件可求出拐点的直角坐标的近似值为 (0.593, 2.506), 在附图中用小黑圆点标出. □

习题 1550 在极坐标系中作函数 $\varphi = \arccos\dfrac{r-1}{r^2}$ 的图像.

(此题中的函数在《习题集》的以前版本中为 $\cos\varphi = \dfrac{r-1}{r^2}$, 这与现在的题不全相同.)

解 记 $f(r) = \dfrac{r-1}{r^2}$ $(r>0)$, 则由于反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$, 因此必须满足 $|f(r)| \leqslant 1$. 容易解出 r 的范围为 $[r_0,+\infty)$, 其中

$$r_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618.$$

如附图 1 的分图 (a) 所示, 当 r 从 r_0 递增到 2 时, $f(r)$ 从 -1 递增到 0.25, 然后当 r 从 2 递增到 $+\infty$ 时, $f(r)$ 从 0.25 递减趋于 0.

在此基础上与反余弦函数复合, 就如附图 1 的分图 (b) 所示, 得到了在 (r,φ) 的直角坐标系中 $\varphi = \arccos f(r)$ 的图像. (这里可参考附录一的习题 312 关于反余弦函数的图像. 当 x 从 -1 递增到 1 时, $\arccos x$ 从 π 严格单调递减到 0. 特别是有 $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$.)

这样就确定了 $\varphi = \arccos\dfrac{r-1}{r^2}$ 的定义域为 $[r_0,+\infty)$, 当 r 从 r_0 递增到 2 时, φ 从 π 递减到 $\arccos 0.25 \approx 75.5°$, 而当 r 从 2 递增趋于 $+\infty$ 时, φ 则递增趋于 $\dfrac{\pi}{2}$.

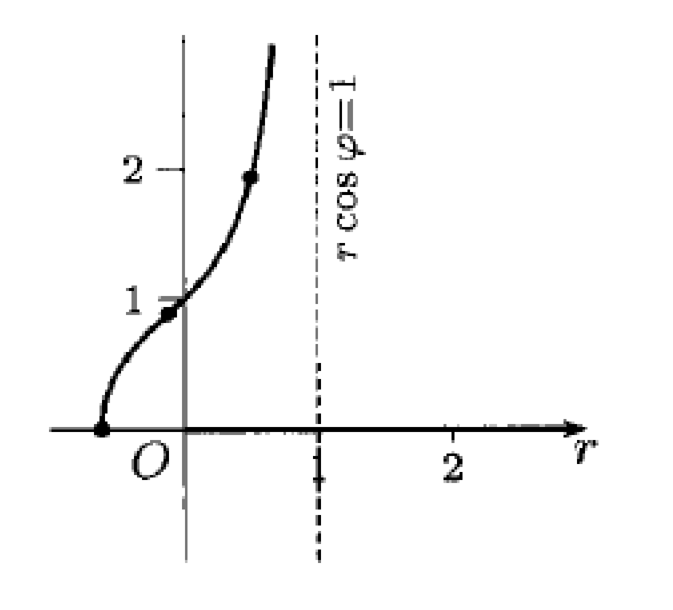


习题 1550 的附图 1

这已经表明图像有垂直渐近线. 从直角坐标变量

$$x = r\cos\varphi = \frac{r-1}{r} = 1 - \frac{1}{r}$$

可见 $r = \dfrac{1}{1-x}$, 因此当 $x \to 1-0$ 时点 (x,y) 与原点的距离 $r \to +\infty$, 即有垂直渐近线 $x=1$. 在极坐标系中可写成为 $r\cos\varphi = 1$.



习题 1550 的附图 2

根据以上分析在附图 2 中作出极坐标系中的函数图像, 其中直角坐标近似值为 $(-0.618, 0)$ 的小黑圆点是 r 的最小值点, 直角坐标近似值为 $(0.5, 1.936)$ 的小黑圆点是 φ 的最小值点.

附图 2 提示我们该图像有拐点. 由于本题虽然是极坐标作图题, 但完全可以用 $y=y(x)$ 表示出来, 因此从 $r = \dfrac{1}{1-x}$ 即可写出该函数的显式为

$$y = \frac{\sqrt{1-x^2(1-x)^2}}{1-x}, \quad x \in \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right),$$

然后用标准的求二阶导数的方法求出拐点, 它的坐标近似值为 $(-0.123, 0.882)$ (在附图 2 上也用小黑圆点标出). 具体的计算从略. □

2.12.5 曲线族的图像 (习题 1551–1555)

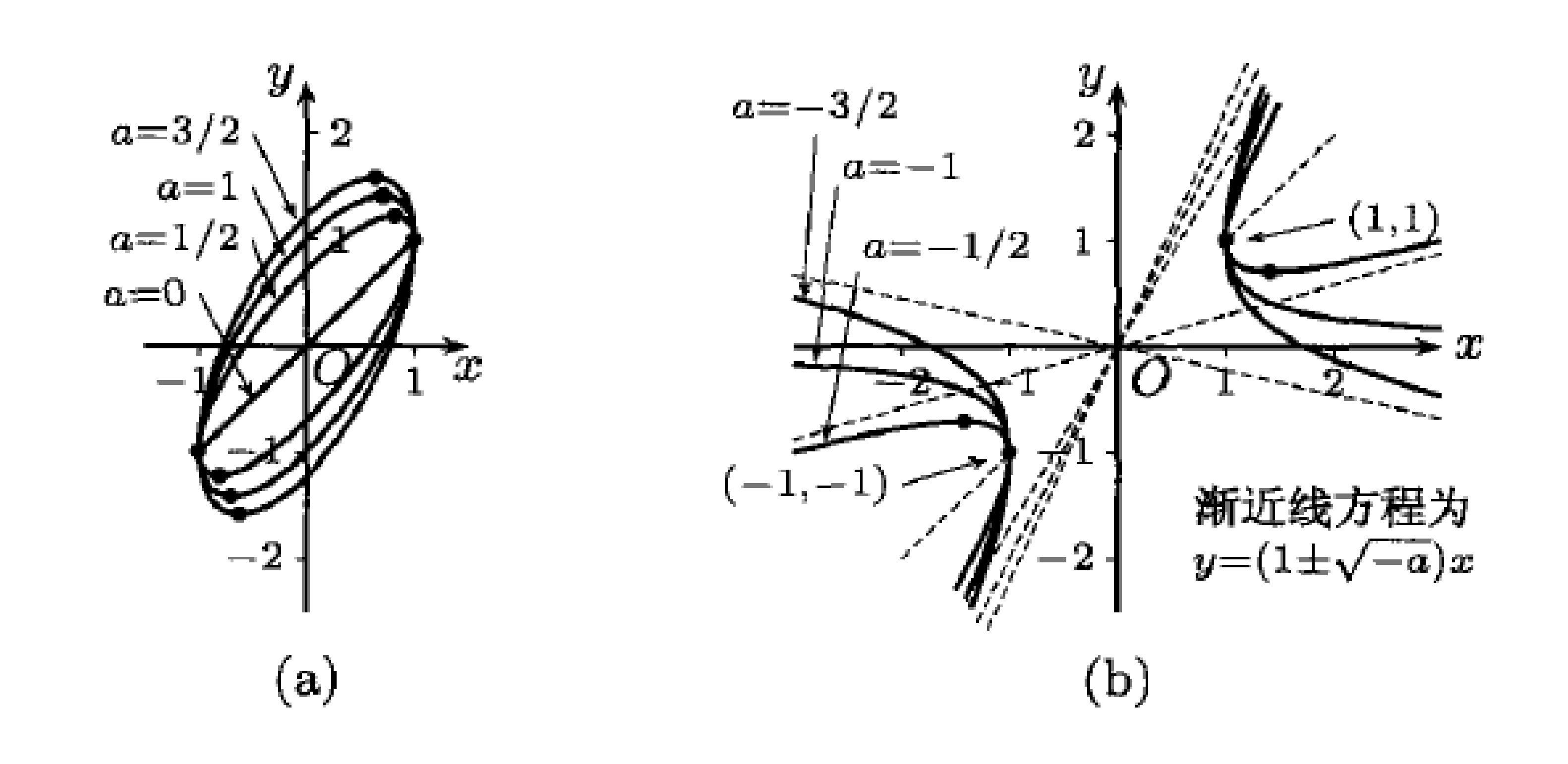
这些是含有参数的曲线族的作图题. 它们都可以用 §1.4 中作草图的技巧得到大致正确的图像, 然后用计算特征点等方法加以精确化, 最后再考虑参数变化对图形的影响, 作出曲线族. 下面只讲其中的一题.

习题 1553 作曲线族 $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$ 的图像, 其中 a 为参变数.

解 当 $a=0$ 时就是直线 $y=x$, 对于 $a \neq 0$ 的其他情况可以将方程改写为

$$(y-x)^2 - a(1-x^2) = (1+a)x^2 - 2xy + y^2 - a = 0,$$

因此是平面上的二次曲线. 根据平面解析几何知识, 这是以坐标原点 O 为中心的二次曲线, 当 $a>0$ 时为椭圆, 而当 $a<0$ 时为双曲线. 它们的图像如下面的附图所示.



习题 1553 的附图: (a) $a>0$ 时的椭圆族, (b) $a<0$ 时的双曲线族

下面我们不依赖解析几何知识来对于图像作出概要描述, 具体计算细节从略.

分两种情况, 即对于分图 (a) 中的椭圆族和分图 (b) 中的双曲线族分别讨论.

(a) 当 $a>0$ 时, 函数 $y(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$. 图像是有界的.

求导数得到

$$y'(x) = 1 \pm \frac{-ax}{\sqrt{a(1-x^2)}},$$

从 $y'=0$ 解出 $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$. 再求二阶导数得到

$$y''(x) = \mp\frac{a^2}{(a(1-x^2))^{\frac{3}{2}}},$$

可知没有拐点. 利用二阶导数的符号可以判定: 当 $y(x)$ 的表达式中第二项前取加号时曲线为凹, 同时知道点 $\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 为极大值点, 极大值为 $y=\sqrt{1+a}$; 而当 $y(x)$ 的表达式中第二项前取减号时曲线为凸, 点 $-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 为极小值点, 极小值为 $y=-\sqrt{1+a}$.

在分图 (a) 中对于参数 $a=\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}$ 作出了三个椭圆, 并标出它们的极值点.

这个椭圆族中的每一个椭圆都通过点 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$. 它们的主轴方向各不相同, 可以用解析几何或其他方法确定.

(b) 当 $a < 0$ 时, 函数 $y(x)$ 的定义域是区间 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$ 的并集. 曲线是无界的.

不必重新求导, 但求解 $y' = 0$ 时发现当 $-1 < a < 0$ 时才有实根. 同样利用二阶函数的符号可以判定: $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 为极小值点, 极小值为 $\sqrt{1+a}$; $x = -\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}$ 为极大值点, 极大值为 $-\sqrt{1+a}$.

(注意这里的极值类型与 $a > 0$ 时相反.)

关于凹凸性的结果与 $a > 0$ 相同, 但目前曲线存在渐近线. 按照标准的方法可求出渐近线方程为

$$y = (1 \pm \sqrt{-a})x.$$

在分图 (b) 中对于参数 $a = -\dfrac{1}{2}, -1, -\dfrac{3}{2}$ 作出了三对双曲线, 并标出极值点, 又用虚线表示它们的渐近线.

这个双曲线族的每一对双曲线都通过点 $(1,1)$ 和 $(-1,-1)$. 它们的主轴方向各不相同, 可以用解析几何或其他方法确定. □

2.12.6 补注

下面的命题是对 §2.12.3 的习题 1544 的补充, 也是 §2.7.2 的习题 1288 中用于证明不等式的定理的一次应用.

命题 2.12 隐函数方程 $x^y = y^x$ $(x > 0, y > 0)$ 的非平凡解 $y = y(x)$ 是区间 $(1, +\infty)$ 上的凸函数.

证 如前所说, 从 $y = tx$ 引入参数 t 后将隐函数方程转换为参数方程

$$x(t) = t^{\frac{1}{t-1}}, \quad y(t) = t^{\frac{t}{t-1}},$$

在 $t = 1$ 处可以连续延拓得到 $x = \mathrm{e}, y = \mathrm{e}$.

然后按照参数方程定义的函数的求导法则得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{t^{\frac{t}{t-1}} \cdot [(1 + \frac{1}{t-1}) \ln t]'}{t^{\frac{1}{t-1}} \cdot [\frac{1}{t-1} \ln t]'}$$
$$= \frac{t^2(t - 1 - \ln t)}{t - 1 - t\ln t},$$

且已经证明上述导函数处处小于 0. 下面要计算二阶导数 $y''(x)$ 并证明它处处大于 0.

按照参数方程给定的函数求导法则有

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{[y'(x)]_t'}{x_t'},$$

由于分母在前面已经计算得到为 $x_t' = t^{\frac{1}{t-1}} \cdot \dfrac{t - 1 - t\ln t}{t(t-1)^2}$, 且已经证明在 $t > 0$ $(t \neq 1)$ 时小于 0, 因此以下只要证明 $[y'(x)]_t' < 0$ 即可.

直接计算得到

$$[y'(x)]'_t = \frac{t[3(t-1)^2-2(t^2-1)\ln t+t\ln^2 t]}{(t-1-t\ln t)^2},$$

因此若记分子的方括号中的表达式为

$$F(t)=3(t-1)^2-2(t^2-1)\ln t+t\ln^2 t,$$

则只要证明当 $t>0\ (t\neq 1)$ 时 $F(t)<0$.

利用 §2.7.2 的习题 1288 提供的方法, 从 $F(t)$ 开始列出它的逐次导数如下:

$$\begin{aligned}
F(t)&=3(t-1)^2-2(t^2-1)\ln t+t\ln^2 t,\\
F'(t)&=6(t-1)-2(t-\frac{1}{t})-4t\ln t+2\ln t+\ln^2 t\\
&=4t-6+\frac{2}{t}-4t\ln t+2\ln t+\ln^2 t,\\
F''(t)&=4-\frac{2}{t^2}-4+\frac{2}{t}-4\ln t+\frac{2}{t}\ln t\\
&=-\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}-4\ln t+\frac{2}{t}\ln t,\\
F'''(t)&=\frac{4}{t^3}-\frac{2}{t^2}-\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}-\frac{2}{t^2}\ln t\\
&=\frac{2}{t^3}[2(1-t^2)-t\ln t].
\end{aligned}$$

可以看出, 当 $t>1$ 时有 $F'''(t)<0$. 又因 $F''(1)=F'(1)=F(1)=0$, 从而可以逐次推出当 $t>1$ 时 $F''(t)<0$, $F'(t)<0$ 和 $F(t)<0$.

又可以看出当 $0<t<1$ 时有 $F'''(t)>0$. 于是又可逐次推出当 $0<t<1$ 时 $F''(t)<0$, $F'(t)>0$ 和 $F(t)<0$ ①.

合并以上可知 $t>0\ (t\neq 1)$ 时 $F(t)<0$. 因此函数方程 $x^y=y^x\ (x>0, y>0)$ 的非平凡解 $y=y(x)$ 的二阶导数 $y''(x)$ 除了在点 $x=\mathrm{e}$ 外, 处处大于 0, 因此是严格凸函数. □

注 利用连续延拓的方法, 已知 $y(x)$ 于点 $x=\mathrm{e}$ 处连续. 然后计算 $t\to 1$ 时的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 的极限值, 利用导数极限定理, 就可以证明 $y(x)$ 在点 $x=\mathrm{e}$ 处有一阶和二阶的连续导数.

---

① 由于有下列恒等式

$$F(t)=t^2\left[3\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-2\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\ln\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\ln^2\left(\frac{1}{t}\right)\right]=t^2F\left(\frac{1}{t}\right),$$

因此 $F(t)$ 在 $0<t<1$ 时和 $t>1$ 时一定同号.

§2.13 函数的极大值和极小值问题(习题 1556–1590)

内容简介 本节除了开始几个题之外都是极大极小问题的应用题, 内容丰富多彩, 有许多题的结论具有实际意义或参考价值.

本节的不少题已经成为各种教科书或参考书中常用的经典例题, 本书只能选讲其中的一部分.

开始的两题不是应用题, 然而它们对于解决极值问题有用. 由于其中没有对函数加上可微等条件, 因此它们的可应用范围就更大了.

习题 1556 证明, 如果函数 $f(x)$ 非负, 那么函数

$$F(x) = Cf^2(x) \ \ (C > 0)$$

与函数 $f(x)$ 有相同的极值点.

解 (以下在严格极值的意义上讨论, 对于非严格意义极值的讨论是类似的.)

设 x_0 是 f 的极小值点, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 且 $x \neq x_0$ 时 (即 x 属于去心邻域 $O_\delta(x_0) - \{x_0\}$) 有 $f(x) > f(x_0)$. 由于 f 非负, 因此将上述不等式两边平方且乘以正数 C 后不等式仍然保持原有方向成立, 即在此去心邻域内成立

$$F(x) > F(x_0),$$

因此 x_0 也是函数 $F(x)$ 的极小值点.

反之, 若 $F(x)$ 有极小值点 x_0, 则在该点的一个去心邻域内成立上述不等式. 由于 $F(x) = Cf^2(x)$, $C > 0$ 且 $f(x)$ 非负, 因此在上述不等式两边约去常数 C 且开平方后, 两边的算术根仍保持相同方向的不等式. 即 x_0 也是 $f(x)$ 的极小值点.

对于极大值点的讨论是类似的, 从略. □

下一题可用于 f 不是非负函数的情况.

习题 1557 证明, 如果函数 $\varphi(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上严格单调递增, 那么函数

$$f(x) \ \text{和} \ \varphi(f(x))$$

有同样的极值点.

解 设 $f(x)$ 有极小值点 x_0, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta)$ (这是去心邻域的另一种写法) 时成立不等式 $f(x) > f(x_0)$.

由于 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调递增, 因此当 $x \in (x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta)$ 时就有:

$$\varphi(f(x)) > \varphi(f(x_0)),$$

这表明点 x_0 也是复合函数 $\varphi(f(x))$ 的极小值点.

反之, 若 x_0 是函数 $\varphi(f(x))$ 的极小值点, 则有 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时成立不等式 $\varphi(f(x)) > \varphi(f(x_0))$.

由于 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调递增, 因此从上述不等式只能得到 $f(x) > f(x_0)$, 从而点 x_0 也是 $f(x)$ 的极小值点.

对于极大值点的讨论是类似的, 从略. □

习题 1560 当对数的底为何值时, 存在一个数, 它本身与它的对数相等?

解 设所求的对数的底为 $a>0$, 且 $a\neq 1$, 问题是要使得方程

$$\log_a x = x \tag{2.20}$$

存在实根.

记 $y=\log_a x$, 即有 $a^y=x$. 两边取自然对数, 就有 $y\ln a=\ln x$, 于是 $\log_a x=\ln x/\ln a$. 这样将对数换底之后, 方程变成为

$$\ln x = x\ln a.$$

可见问题已经归结为在 §2.11.5 中的习题 1466, 即是求方程 $\ln x=kx$ 的实根的个数.

利用 $k=\ln a$, 直接引用该题的解答, 就知道有以下结论:

(1) $\ln a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时, 即 $a>\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\approx 1.4447$ 时方程 (2.20) 无解. 平时使用的自然对数和常用对数都在这个范围内;

(2) $a=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时方程 (2.20) 有一个实根 $x=\mathrm{e}$;

(3) $1<a<\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ 时方程 (2.20) 有两个实根;

(4) $0<a<1$ 时方程 (2.20) 有一个实根. □

注 在习题 1466 中的 $k=0$ 时该问题有解, 但对本题则当 $k=\ln a=0$ 时只能是 $a=1$, 它不能用作为对数的底.

以上是用习题 1466 的现成结果, 当然可以直接用习题 1466 中的两种方法之一或其他方法来解本题.

从习题 1558 起, 除了上述习题 1560 之外, 都是求最大值或最小值问题, 因此本节的标题若改为函数的最大值和最小值问题更为确切一点. 这是数学的最优化方向中的起点. 其中常将要求最值的函数称为目标函数. 这也是最优化方向中的常用术语.

以下的主要步骤是根据问题写出目标函数, 确定其定义域. 在定义域为有界闭区间而目标函数又连续的情况, 可以确定最值的存在. 对于其他情况则还要考虑求确界. 确界若能达到就是最值. 最后还要研究所得到的最值点是否符合问题的实际情况.

习题 1562 已知直角三角形的一条直角边和斜边之和为定值, 求一个面积最大的直角三角形.

解 1 设题设的定值为 $a>0$, 记一条直角边的长为 x, 则 $0<x<\frac{a}{2}$. 这时斜边长 $a-x$, 而另一条直角边长为 $\sqrt{(a-x)^2-x^2}=\sqrt{a^2-2ax}$, 因此直角三角形的面积 (的两倍) 为

$$S(x)=x\sqrt{a^2-2ax}.$$

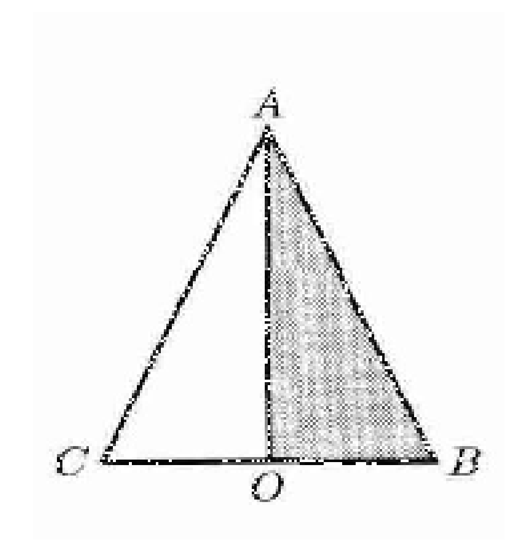
将其对 x 求导得到

$$S'(x)=\sqrt{a^2-2ax}+\frac{-ax}{\sqrt{a^2-2ax}}=\frac{a^2-3ax}{\sqrt{a^2-2ax}},$$

可见有实根 $x_0=\frac{a}{3}$.

从 $S'(x)$ 于 $(0,x_0)$ 时大于 0, 于 $(x_0,\frac{a}{2})$ 时小于 0, 而 $S(+0)=0$, $S(\frac{a}{2}-0)=0$, 可见 $S(x_0)=\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$ 就是最大值. 从 $x_0=\frac{a}{3}$ 可知该直角边等于斜边的一半, 也就是该边对应的直角三角形的锐角为 30° 的情况. □

解 2 设直角三角形 OAB 的斜边 AB 与直角边 OB 的和为定值 s. 如附图所示将这个直角三角形关于另一条直角边 OA 作反射, 就得到面积为直角三角形 OAB 面积的两倍的等腰三角形 ABC. 它的周长为 $2s$. 于是只要在所有周长 $2s$ 的等腰三角形中找面积最大的即可.



习题 1562 的附图

可以证明在所有周长 $2s$ 的三角形中面积最大的就是等边三角形, 它同时也是等腰三角形. 因此只要解决了这个更一般的问题, 也就回答了习题 1562 中的问题. 这也说明为什么解 1 的最后解答中, 直角边 OB 的边长为斜边 AB 的边长的一半, 其对角 OAB 恰好是 30°.

可以用微分法证明, 周长为定值的所有三角形中等边三角形面积最大. 这里我们将给出用平均值不等式的初等方法.

根据海伦公式, 周长 $2s$ 且三边为 a,b,c 的三角形的面积为

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

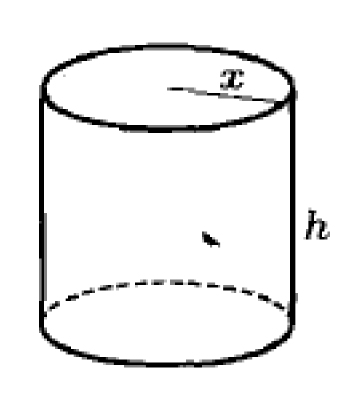
于是有

$$S^2=s[(s-a)(s-b)(s-c)]\leqslant s\left[\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right]^3$$
$$=s\left(\frac{3s-a-b-c}{3}\right)^3=\frac{s^4}{27},$$

其中成立等号的条件是 $s-a=s-b=s-c$, 也就是 $a=b=c$. 于是已经证明了在周长 $2s$ 的所有三角形中等边三角形的面积最大, 最大值为 $\max S=\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$. □

习题 1563 一圆柱形封闭罐子的容积为 V, 当它的尺寸大小为何值时, 罐子的表面积最小?

解 1 设罐子顶盖面的圆半径为 x, 圆柱高为 h, 则有 $\pi x^2h=V$. 罐子的表面积为本题的目标函数, 记为



习题 1563 的附图

$$S(x)=2\pi x^2+2\pi xh=2\pi x^2+\frac{2V}{x},$$

理论上 $S(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 虽然实际上我们不可能制造底圆半径任意大或任意小的罐子.

由 $S(+0)=+\infty$ 和 $S(+\infty)=+\infty$ 可见 $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上下方有界, 从而有最小值. 这时的最小值点也是极小值点, 可从 $S'(x)=0$ 解得.

将 $S(x)$ 对 x 求导得到

$$S'(x)=4\pi x-\frac{2V}{x^2}=\frac{4\pi}{x^2}\cdot\left(x^3-\frac{V}{2\pi}\right),$$

因此只有唯一的实根 $x_0=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. 从 $S'(x)$ 经过点 x_0 的符号变化可知 x_0 就是要求的最小值点. 目标函数的最小值是

$$S(x_0)=2\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}+\frac{2V}{\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

这时的圆柱高

$$h=\frac{V}{\pi x_0^2}=\frac{V}{\pi}\cdot\frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\sqrt[3]{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}=2x_0,$$

即最佳尺寸是圆柱高与顶盖圆直径相等. □

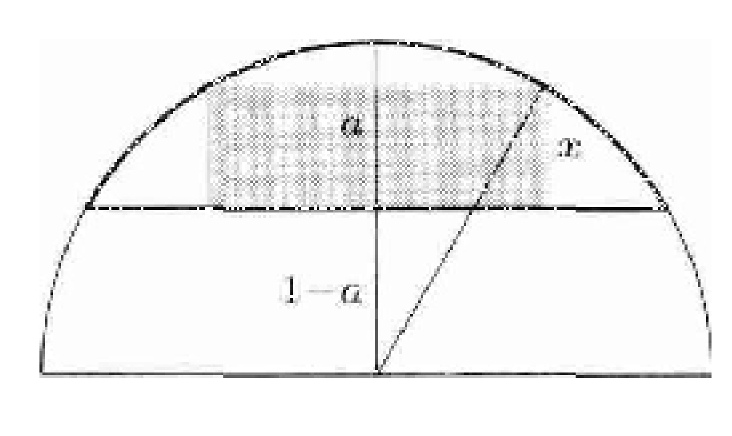
解 2 与习题 1562 的解 2 类似, 这类问题经常可以通过巧妙地应用平均值不等式而得到解决. 实际上只要将目标函数写成为三项之和, 然后用平均值不等式且利用 $\pi x^2h=V$, 就可以得到

$$S(x)=2\pi x^2+\pi xh+\pi xh\geqslant 3\sqrt[3]{2\pi^3x^4h^2}=3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

不但如此, 从平均值不等式成立等号的充分必要条件还知道, 当 $2\pi x^2=\pi xh$ 时上述不等式成立等号. 这同时给出了目标函数的最小值以及达到此最小值的条件为 $2x=h$. □

注 本题表明有盖圆柱形容器用料最省的尺寸是顶圆直径与高相等, 这在日常生活和工农业中是常见的. 然而当罐身和盖底的材料不同时就会得到不同的结论.

习题 1564 在不超过半圆的已知弓形中, 试内接一个面积最大的矩形.



习题 1564 的附图

解 不妨取圆半径为 1. 如附图所示, 将弓形的矢 (或称拱高) 记为 a. 内接矩形用灰色表示, 它的一边在弓形的弦上. 将与弦垂直的边的边长记为 x, 则矩形的另一边的边长为 $2\sqrt{1-(x+1-a)^2}$.

于是作为目标函数的矩形面积是

$$S(x)=2x\sqrt{1-(x+1-a)^2},\ 0\leqslant x\leqslant a.$$

$S(x)$ 在区间 $[0,a]$ 的两个端点处等于 0, 在区间的内点处达到最大值, 因此该点的导数等于 0. 将 $S(x)$ 对 x 求导数得到

$$\begin{aligned}S'(x)&=2\sqrt{1-(x+1-a)^2}+2x\cdot\frac{-(x+1-a)}{\sqrt{1-(x+1-a)^2}}\\&=-\frac{2}{\sqrt{1-(x+1-a)^2}}\cdot[2x^2+3x(1-a)+(1-a)^2-1],\end{aligned}$$

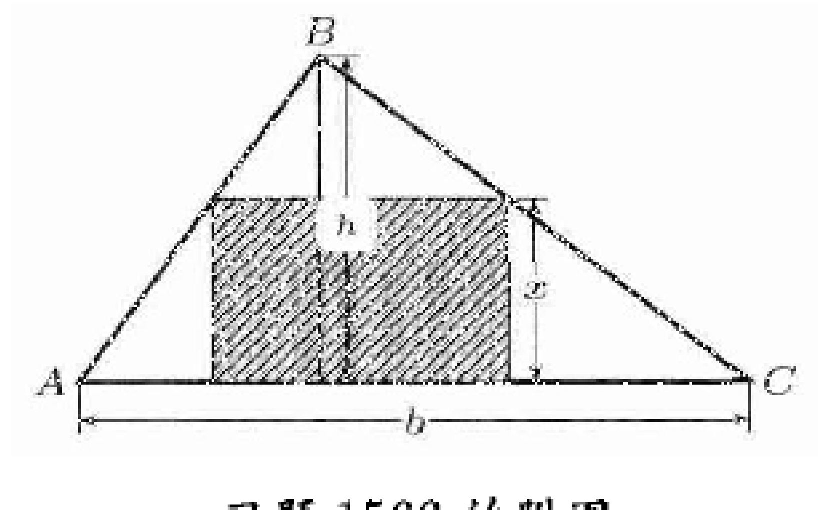
方程 $S'(x)=0$ 只有一个正根, 因此它就是最大值点. 将它记为 x_0, 其表达式为

$$x_0=\frac{-3(1-a)+\sqrt{(1-a)^2+8}}{4}.\quad\square$$

注 将最大值点的上述表达式除以 a, 可以研究 x_0 与弓形的拱高 a 之比的变化范围. 将 x_0/a 对 a 求导就可以知道这个比是 a 的递增函数. 从 $x_0(+0)=\dfrac{2a}{3}$ 和 $x_0(1)=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$, 可见它约在 0.667 到 0.707 之间.

习题 1566 在底为 b, 高为 h 的三角形中内接一个周长最大的矩形. 讨论解这个问题的可能性.

解 只限于考虑矩形至少有一条边在三角形的某条边上的情况.



习题 1566 的附图

这时的周长计算已经在 §1.3.1 的习题 171 中做过. 这里不再重复.

如附图所示, 设矩形的一边在三角形 ABC 的边 AC 上, 该边长度为 b, 对应的高为 h. 取矩形的平行于高的边长为 x, 则如习题 171 所示, 矩形的周长为

$$P(x) = 2\left(1 - \frac{b}{h}\right)x + 2b \ (0 \leqslant x \leqslant h).$$

为研究周长随 x 而变化的情况, 求导得到

$$P'(x) = \frac{2}{h} \cdot (h - b),$$

可见当 $h > b$ 时 x 越大越好, 因此最大周长在 $x = h$ 时达到. 这时矩形是一边长度为 0 的退化矩形, 与高 h 重合, 最大的矩形周长为 $2h$.

若 $h < b$, 则 x 越小越好, 最大周长在 $x = 0$ 时达到, 矩形变成与三角形底边 AC 重合的退化矩形, 最大的矩形周长为 $2b$.

特别当 $h = b$ 时, 则无论取什么 $x \in [0, h]$, 矩形的周长始终等于一个常数 $2h$.

但问题还没有完. 如图所示, 如果矩形的一条边不是在 AC 边, 而是在三角形的另外两条边上, 则是否会得到周长更大的内接矩形?

从附图可见, 三角形的任何一边的高不会超过另两条边的长度. 由此可见, 如果 b 是三角形最长边的长度, 则它所对应的 h 不会超过另外两条边长, 从而必定小于 b. 同时另外两条边和高的长度都不会超过 b. (换言之, 若发生 $h \geqslant b$, 则 b 一定不是最长边的长度.)

由此得到结论: 三角形的最大周长内接矩形只能是宽度为 0 的退化矩形, 它与三角形的最大边重合, 矩形的周长是该边长度的两倍. □

习题 1576 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \ (0 < b < a)$ 过顶点 $B(0, -b)$ 的最长弦.

解 这时要求椭圆上的点 (x, y) 到顶点 $(0, -b)$ 的距离达到最大. 为方便起见, 如习题 1556 所述, 取其平方为目标函数:

$$S(x) = x^2 + (y + b)^2,$$

其中 $y = y(x)$ 是满足椭圆方程的非负隐函数. $S(x)$ 的定义域是 $[-a, a]$.

将 $S(x)$ 对 x 求导得到

$$S'(x) = 2x + 2(y + b)y',$$

然后从椭圆方程用隐函数求导法得到 $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$, 代入后得到

$$S'(x) = 2x - \frac{2b^2x}{a^2} - \frac{2b^3x}{a^2y}.$$

这时使 $S'(x)=0$ 的解除了 $x=0$ 是解之外还要考虑 $1-\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{b^3}{a^2y}=0$ 的可能性. 我们先考虑后者. 记 $c=\sqrt{a^2-b^2}$, 这时有

$$y=\frac{b^3}{a^2-b^2}=\frac{b^3}{c^2}.$$

将它与椭圆方程联合就得到

$$x^2=a^2\Big(1-\frac{y^2}{b^2}\Big)=\frac{a^4}{c^4}\cdot(a^2-2b^2).$$

可见在 $a>\sqrt{2}b$ 的条件下存在两个驻点

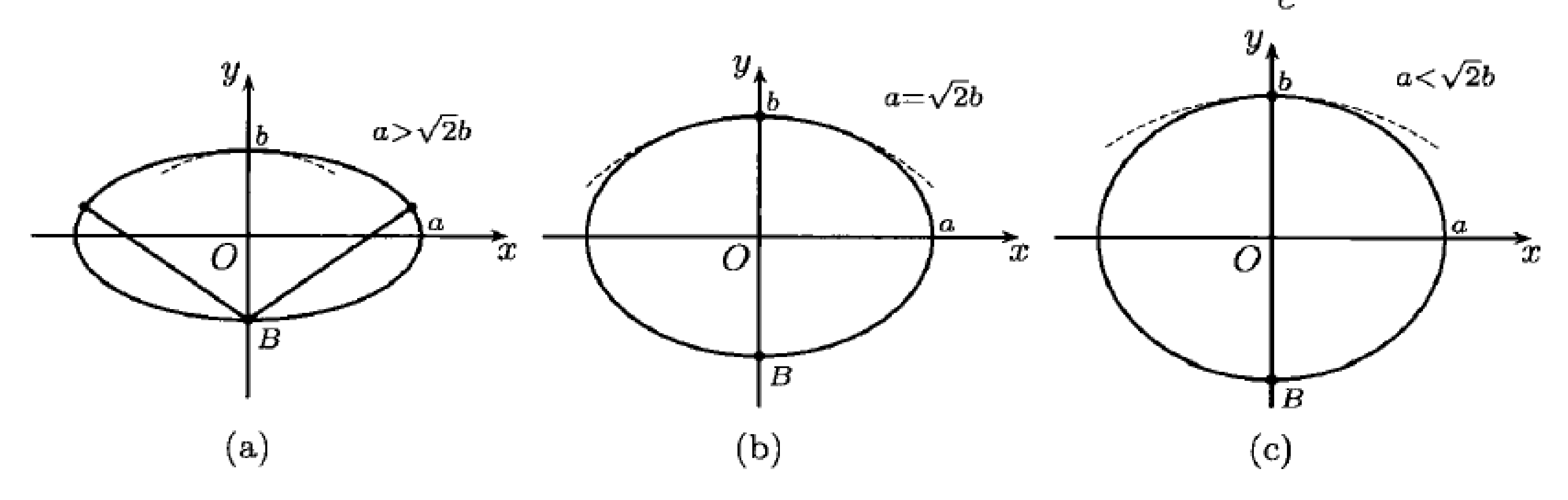
$$x_{1,2}=\pm\frac{a^2\sqrt{a^2-2b^2}}{c^2}.$$

观察取正号的 x_1, 这时在给点附近的 $y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}<0$, 即 $y(x)$ 严格单调递减, 从而可推出 $S'(x)$ 在 x_1 左侧大于 0, 而在其右侧小于 0, 因此 x_1 是极大值点. 同样可证明 x_2 也是极大值点.

比较目标函数 $S(x)$ 在端点 $x=\pm a$ 和 $x_{1,2}$ 处的值, 从

$$S(\pm a)=a^2+b^2<S(x_{1,2})=\frac{a^4}{c^2},$$

可见 $x_{1,2}$ 是目标函数的最大值点. 在附图的分图 (a) 中对于 $a>\sqrt{2}b$ 的情况, 分别作出了连接顶点 $(0,-b)$ 和点 $(x_1,y(x_1)),(x_2,y(x_2))$ 的两条最长弦, 长度为 $\dfrac{a^2}{c}$.



习题 1576 的附图

在 $a\leqslant\sqrt{2}b$ 时只存在唯一的驻点 $x=0$. 由于在闭区间 $[-a,a]$ 上的连续函数 $S(x)$ 有最大值, 而

$$S(0)=4b^2>2a^2>a^2+b^2=S(\pm a),$$

因此 $x=0$ 就是最大值点, 连接顶点 $(0,-b)$ 和 $(0,b)$ 的椭圆短轴就是所求的最长弦, 长度为 $2b$. 在附图的分图 (b),(c) 中画出了 $a=\sqrt{2}b$ 和 $a<\sqrt{2}b$ 的情况. □

注 本题的内容与下一节的曲率圆概念直接有关. 三个分图恰好是点 $(0,b)$ 处的曲率半径大于 $2b$, 等于 $2b$ 和小于 $2b$ 的三种情况. 在三个分图中用虚曲线作出了以点 $(0,-b)$ 和 $2b$ 为半径的圆弧. 分图 (a) 和分图 (c) 分别表明 $S(x)$ 在点 $x=0$ 处达到极小值和极大值. 对于分图 (b), 上述圆弧就是曲率圆的一部分. 这时的圆弧与椭圆曲线为密切接触, 即在该处的一阶和二阶导数都相等. 用带佩亚诺型余项的泰勒公式可以写出

$$S(x) = 4b^2 - \frac{x^4}{8a^4} + o(x^4),$$

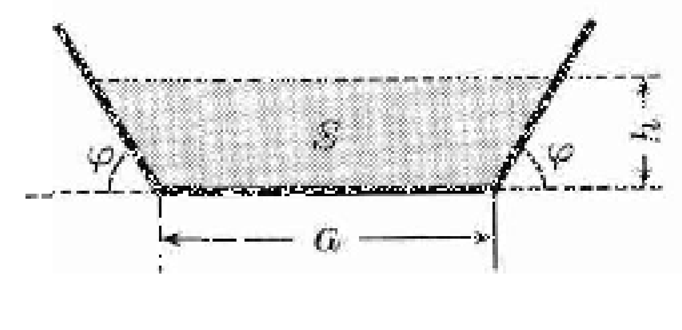
这同时也对 $a = \sqrt{2}b$ 情况的 $x = 0$ 为极大值点给出了一个直接证明.

同样可以对于 $a > \sqrt{2}b$ 和 $a < \sqrt{2}b$ 情况的驻点 $x = 0$ 计算出

$$S''(0) = \frac{2(a^2 - 2b^2)}{a^2},$$

从而分别判定该驻点为极小值点和极大值点.

习题 1579 开放式水渠的横截面为等腰梯形, 已知水渠中水的截面面积为 S, 水深为 h. 当水渠侧边的坡角 φ 为何值时, 水渠横截面被水浸的那部分周长为最小值?



习题 1579 的附图

解 如附图所示, 将梯形的底边长记为 a, 则从 $S = ah + h^2 \cot\varphi$ 可得到

$$a = \frac{S}{h} - h\cot\varphi,$$

从而得到以 φ 为自变量的目标函数为

$$P(\varphi) = \frac{S}{h} - h\cot\varphi + 2h\csc\varphi = \frac{S}{h} + \frac{2h - h\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

然而这里如何确定 $P(\varphi)$ 的定义域呢?

根据题意可见 φ 为锐角, 其上界可取为 $90°$. 又从底边 $a \geqslant 0$, 可见 $\cot\varphi \leqslant S/h^2$, 于是有 $\varphi \geqslant \operatorname{arccot}\frac{S}{h^2} = \varphi_0$. 这样就可以取目标函数 $P(\varphi)$ 的定义域为闭区间 $[\varphi_0, \frac{\pi}{2}]$. 当 $\varphi = \varphi_0$ 时 $a = 0$, 等腰梯形退化为三角形.

将 $P(\varphi)$ 对 φ 求导得到

$$P'(\varphi) = \frac{h(1 - 2\cos\varphi)}{\sin^2\varphi},$$

可见驻点为 $\xi = \arccos\frac{1}{2} = 60°$.

求出二阶导数

$$P''(\varphi) = \frac{2h}{\sin^3\varphi} \cdot (1 + \cos^2\varphi - \cos\varphi) > 0,$$

可见 $P''(\varphi)$ 为 $[\varphi_0, \frac{\pi}{2}]$ 上的凸函数, $P'(\varphi)$ 是严格单调递增函数. 若驻点 ξ 在目标函数的定义区间内, 则 $P'(\varphi)$ 在驻点左边小于 0, 在驻点右边大于 0, 因此 ξ 是极小值点, 也是最小值点. 这对于 ξ 是区间的边界点 φ_0 的情况也成立.

然而当 $\xi < \varphi_0$ 时 $P(\varphi)$ 的最小值点就不是 ξ 了. 由于这时 $P(\varphi)$ 在 $[\varphi_0, \frac{\pi}{2}]$ 上严格单调递增, 在左端点 φ_0 达到最小值. 发生这种情况的条件是 $\varphi_0 > \xi = 60°$, 也就是

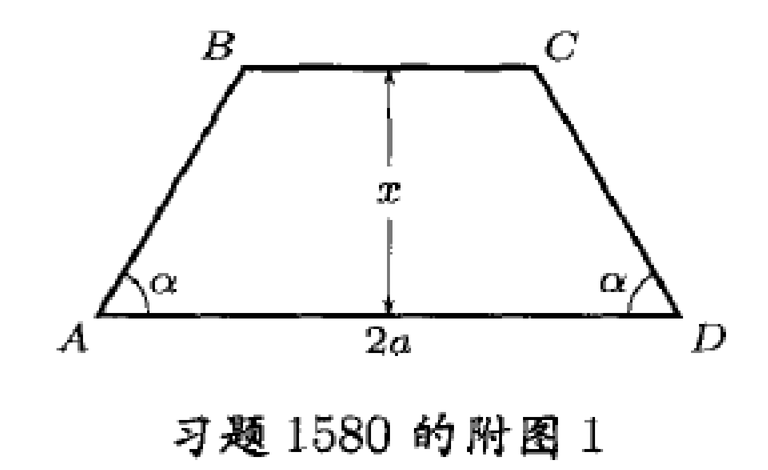
$$\cot\varphi = \frac{S}{h^2} < \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

结论: 若 $S \geqslant \frac{h^2}{\sqrt{3}}$, 则最佳坡角取 $60°$, 否则只能取 $\operatorname{arccot}\frac{S}{h^2}$. □

注 《习题集》所附的答案只有前一种情况, 可能是因为在实际问题中的 S 与 h^2 之比足够大, 很少会出现后一种情况. 上述讨论表明在决定 h 时应当考虑 S 的实际大小.

习题 1580 包围面积为 S 的封闭曲线的周长与面积为 S 的圆的周长之比称为这条周线的弯曲度.

在等腰梯形 $ABCD$ $(AD//BC)$ 中, 设底 $AD = 2a$, 锐角 $BAD = \alpha$, 当梯形为怎样的形状时, 它有最小的弯曲度?



习题 1580 的附图 1

解 将等腰梯形的高设为变量 x (参见附图 1), 则可以计算出梯形的周长为

$$p(x) = 4a - 2x\cot\alpha + 2x\csc\alpha,$$

同时梯形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot[2a + (2a - 2x\cot\alpha)] = 2ax - x^2\cot\alpha.$$

由于面积为 $S(x)$ 的圆的周长为 $2\pi\sqrt{\dfrac{S(x)}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S(x)}$, 因此就可以得到梯形周线的弯曲度的表达式为

$$w(x) = \frac{p(x)}{2\sqrt{\pi S(x)}} = \frac{2a - x\cot\alpha + x\csc\alpha}{\sqrt{\pi(2ax - x^2\cot\alpha)}},$$

这就是本题的目标函数, 自变量 x 的定义域为 $(0, +\infty)$.

将 $w(x)$ 对 x 求导得到

$$w'(x) = \frac{(\csc\alpha - \cot\alpha)\sqrt{2ax - x^2\cot\alpha} - \dfrac{(a - x\cot\alpha)[2a + x(\csc\alpha - \cot\alpha)]}{\sqrt{2ax - x^2\cot\alpha}}}{\sqrt{\pi}(2ax - x^2\cot\alpha)}$$

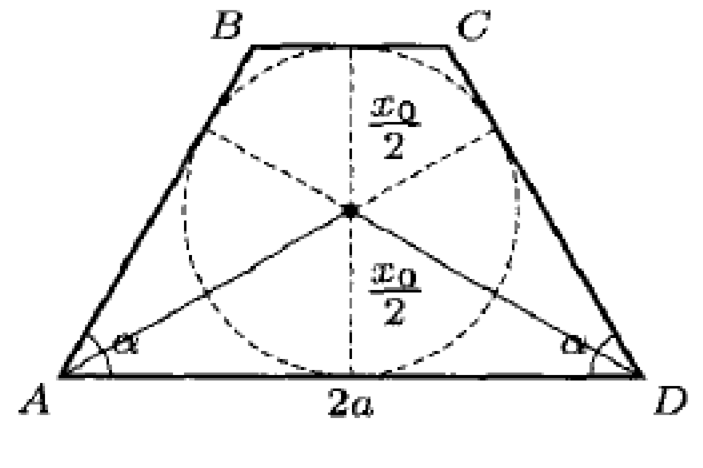
$$= \frac{a\left(x\cdot\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} - 2a\right)}{\sqrt{\pi}(2ax - x^2\cot\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a\cot\dfrac{\alpha}{2}(x - 2a\tan\dfrac{\alpha}{2})}{\sqrt{\pi}(2ax - x^2\cot\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

可见有驻点 $x_0 = 2a\tan\dfrac{\alpha}{2}$. 又从 $w'(x)$ 的符号变化可见 x_0 是极小值点, 也是最小值点.

在附图 2 中作出了弯曲度最小的等腰梯形. 从

$$\frac{x_0}{2} = a\tan\frac{\alpha}{2}$$

可见, 只要作两个底角的角平分线, 就得到所求的高 x_0 的一半, 然后再延长一倍得到 x_0. 这时上述角平分线的交点与梯形的每一条边的距离都是 $\dfrac{x_0}{2}$, 因此以该交点为圆心和以 $\dfrac{x_0}{2}$ 为半径的圆就成为等腰梯形的内切圆, 这即是弯曲度最小的等腰梯形的几何特征. □



习题 1580 的附图 2

习题 1583 两艘轮船分别以速度为 u 和 v 匀速直线行驶, 两条直线的夹角为 θ. 如果在某一时刻它们离开两条航道的交叉点的行驶距离分别为 a 和 b, 试确定两艘轮船的最短距离.

解 如附图所示, 若将两艘轮船分别处于点 A 和 B 的位置的时刻记为 $t_0 = 0$, 则在时刻 t 的两船之间的距离 s 的平方就可以用三角函数的余弦定理写出为

$$s^2(t) = (a-ut)^2 + (b-vt)^2 - 2(a-ut)(b-vt)\cos\theta.$$

将 s^2 对 t 求导得到

$$2ss' = 2(a-ut)(-u) + 2(b-vt)(-v) - 2\cos\theta[-u(b-vt) - v(a-ut)].$$

整理后得到

$$ss' = (u^2+v^2-2uv\cos\theta)t - [ua+vb-(ub+va)\cos\theta],$$

由于 θ 不等于 0, 因此 t 的系数大于 0, 于是可解得唯一的驻点为

$$t_0 = \frac{ua+vb-(ub+va)\cos\theta}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}.$$

习题 1583 的附图

且可看出当 t 递增经过 t_0 时, s'_t 从负到正, 因此 t_0 是极小值点, 也是最小值点.

为求 $s^2(t_0)$, 可先将 s^2 整理为二次三项式 $At^2+2Bt+C$, 就知道最小值为 $C-\dfrac{B^2}{A}$, 于是可计算得到

$$s^2(t_0) = (a^2+b^2-2ab\cos\theta) - \frac{[ua+vb-(ub+va)\cos\theta]^2}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}$$
$$= \frac{(ub-va)^2\sin^2\theta}{u^2+v^2-2uv\cos\theta}.$$

于是最短距离为 $\min s = \dfrac{|ub-va|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}$.

可以看出最短距离为 0 的两个条件是 $\dfrac{u}{v}=\dfrac{a}{b}$ 和 $\theta=0,\pi$, 这都容易理解.

此外还可以看出最短距离有可能在 $t_0 \leqslant 0$ 时达到. 例如, 设 $a>b$, $u<v$, 则就有 $ua+vb<ub+va$. 这时若 θ 充分小, 则就有 t_0 小于 0. 这几乎相当于用速度慢的船去追赶速度快的船, 在 $t>0$ 时距离只会越来越远.

以上只考虑了两船同时向航道交点前进的情况. 可以看出, 若两船同时背离交点反向行驶则答案相同. 此外, 如果在两船之一向交点前进, 而另一船背离交点反向行驶, 则只要将 u,v 之一反号即可. 因此在《习题集》中所附的本题答案为

$$\min s = \frac{|ub \pm va|\sin\theta}{\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\theta}}. \quad \square$$

习题 1590 在半径为 a 的半球形碗中放一根长为 l ($l>2a$) 的匀质棒, 求棒在碗中的平衡位置.

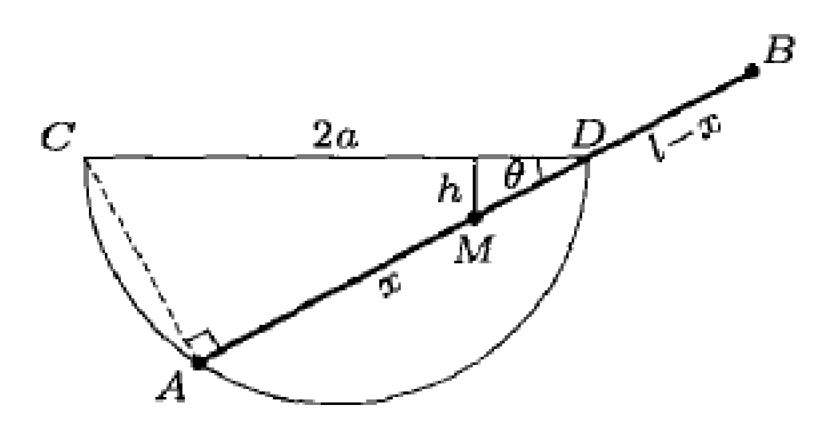
解 如附图所示, 用直线段 AB 表示题中的棒, 长为 l. 用半径为 a 的半圆周表示碗, 代表碗口的直径 CD 处于水平位置. 记棒的中点为 M, 即棒的重心. 当 M 处于最低位置时, 棒达到平衡. 这即是要使得点 M 到 CD 的距离 h 达到最大值.

由题设条件 $l>2a$ 可见棒总有一端 (即点 B) 在碗外.

设角 $CDA=\theta$, 则棒在碗内的部分 AD 的长度 $x=2a\cos\theta$. 由于 M 是棒的中点, $MD = x-\dfrac{l}{2}$, 这样就得到目标函数 h 为

$$h(\theta)=\left(x-\frac{l}{2}\right)\sin\theta=2a\sin\theta\cos\theta-\frac{l}{2}\sin\theta.$$

$h(\theta)$ 的定义域应当由重心 M 位于碗内来决定. 这就是要求 $x\geqslant\frac{l}{2}$. 由 $x=2a\cos\theta$ 就有 $\frac{l}{4a}\leqslant\cos\theta$, 因此要求 $l<4a$. 这显然是一个合理的限制, 否则重心 M 在碗外, 不可能实现题意中的平衡.



习题 1590 的附图

由此可知 θ 的范围是

$$0\leqslant\theta\leqslant\theta_0=\arccos\frac{l}{4a}<\frac{\pi}{2},$$

且可看出目标函数 $h(\theta)$ 在端点 0 和 θ_0处都等于 0, 而在 $(0,\theta_0)$ 上大于 0. 这已经保证了 $h(\theta)$ 有最大值, 且在最大值点处导数为 0.

计算导数并求解方程

$$h'(\theta)=2a\cos 2\theta-\frac{l}{2}\cos\theta=4a\cos^2\theta-\frac{l}{2}\cos\theta-2a=0,$$

可见在 $(0,\theta_0)$ 内的驻点是唯一的, 也即是要求的最大值点. 将它记为 ξ, 就有

$$\xi=\arccos\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}.$$

这时处于碗内的棒长部分为

$$x=2a\cos\xi=\frac{l}{8}+\sqrt{\frac{l^2}{64}+2a^2}.\quad\square$$

最后指出, 本节的许多应用题已经成为多种教科书和参考书中普遍采用的经典性例题. 由于篇幅所限, 本书只在上面讲了其中的一小部分. 下面特别提出其中有明显应用背景的部分习题, 希望初学者不要放过①.

习题 1567 是如何从圆木中取出矩形截面的木材, 才能使得其强度最大.

习题 1569 是如何在半径为 R 的球中, 内接一个体积最大的圆柱.

习题 1571 是如何对给定的球, 作体积最小的外切圆锥.

习题 1572 是求母线长度固定的最大圆锥体.

习题 1574 是求点 $M(p,p)$ 到抛物线 $y^2=2px$ 的最短距离.

习题 1581 是如何从圆中截去一个扇形, 使得剩下部分卷成的漏斗的容积最大.

习题 1582 涉及铁路支线如何设计, 才能使得运费最省.

习题 1586 是圆桌中央上方的电灯应当多高, 才能使得桌子边缘有最大的照明度.

习题 1587 是直角相交的河道能够通行的船的最大长度.

习题 1588 是轮船的航行费用与速度有关时的最经济策略.

习题 1589 是在粗糙的水平面上移动重物时, 如何选取推力与水平方向的夹角, 才能使得所用的力最小 (这个角称为磨擦角).

① 还可以指出本节的许多题有初等解法 (参见习题 1562 与 1563), 因此其中有不少题出现在科普读物中. 例如别莱利曼的《趣味代数学》和《趣味几何学》等名著都有专门的章节介绍许多有趣的极大极小问题.

补　充

最后对于前面的习题 1564 和 1566 的解作些补充.

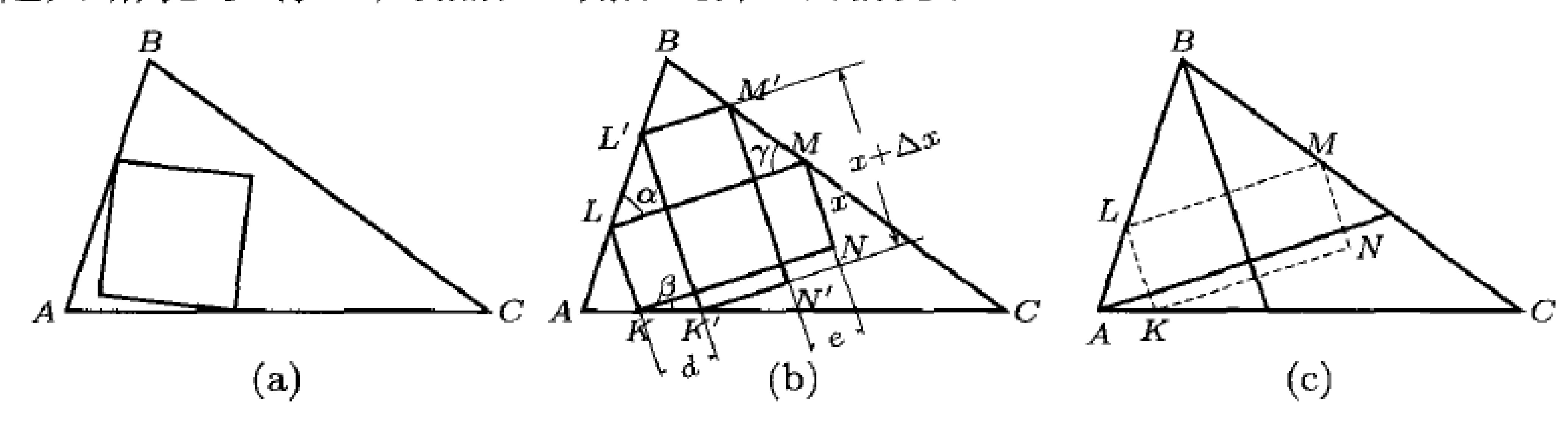
习题 1564 的进一步讨论　首先, 如果在考虑弓形中的内接矩形时, 并不要求其 4 个顶点都在弓形的边界上, 是否会有面积更大的矩形?

这个问题比较容易. 可以看出, 为了求出面积最大的内接矩形, 至少其 3 个顶点应当在弓形的边界上. 只要将矩形围绕弓形的圆心适当旋转, 就可以使得矩形的两条对边与弓形的底边平行, 从而归结为前面已经考虑过的情况.

更有意思的是当弓形大于半圆时的情况. 考虑到圆的内接矩形中面积最大的就是内接正方形, 因此可见它也就是当弓形的圆心角大于等于 $3\pi/2$ 时的最大内接矩形. 对于弓形圆心角介于 π 和 $3\pi/2$ 之间的情况, 问题要复杂一些, 留给读者讨论. □

习题 1566 的进一步讨论　在考虑三角形中的内接矩形时, 如其 4 个顶点都在三角形的边界上, 则如前面的解所示, 矩形至少有一条边在三角形的边界上. 现在若不要求其 4 个顶点都在弓形的边界上, 是否会有周长更大的矩形?

容易看出, 为了求出周长最大的内接矩形, 至少其 2 个顶点应当在三角形的边界上. 如下面的附图 2(a) 所示, 只要将不含有矩形顶点的边 BC 平移到与矩形相遇, 就已经将问题归结为至少有三个顶点在三角形边界上的情况了.



习题 1566 的附图 2

现在看附图 2(b) 中的内接矩形 $LMNK$, 其中顶点 N 不在三角形的边界上. 考虑矩形各边的方向不变时, 改变边长 $MN = LK = x$, 这时的矩形周长 $P(x)$ 会如何变化?

如图所示, 当 x 变为 $x + \Delta x = M'N' = L'K'$ 时, 周长的增量 $\Delta P = 2\Delta x - 2(d+e)$, 而从图上可见 $\Delta x = d(\tan\alpha + \tan\beta)$, $e\tan\gamma = d\tan\alpha$, 因此可计算得到

$$\Delta P = 2\Delta x\Big(1 - \frac{1}{\tan\alpha+\tan\beta} - \frac{\tan\alpha\cdot\cot\gamma}{\tan\alpha+\tan\beta}\Big).$$

由于 α, β, γ 不变, 因此已经证明周长是 x 的线性函数. 于是它的最大值只能在 x 的变化范围的边界点上达到.

如附图 2(c) 所示, 过三角形的顶点 B 作平行于 MN 和 LK 并与边 AC 相交的直线段, 它就是 x 能取到的最大值. 又过顶点 A 作平行于 LM 和 KN 并与边 BC 相交的直线段. 将它们的长度乘以 2 并取其中的最大值, 这就是当 α, β 不变时周长函数 $P(x)$ 能取到的最大值.

由于附图 2(c) 中的三角形内的两个直线段的长度都小于三角形的最大边的长度, 因此在前面的题解中给出的答案仍然是正确的 (相当于这里的 $\beta = 0$). □

§2.14 曲线相切. 曲率圆. 渐屈线 (习题 1591–1616)

内容简介 本节考虑曲线之间高于一阶的相切, 含有曲率半径和渐屈线的计算. 它们与曲线 $y=y(x)$ 的二阶导数有密切联系.

习题 1591 选择直线 $y=kx+b$ 的参数 k 和 b, 使得它与曲线

$$y=x^3-3x^2+2$$

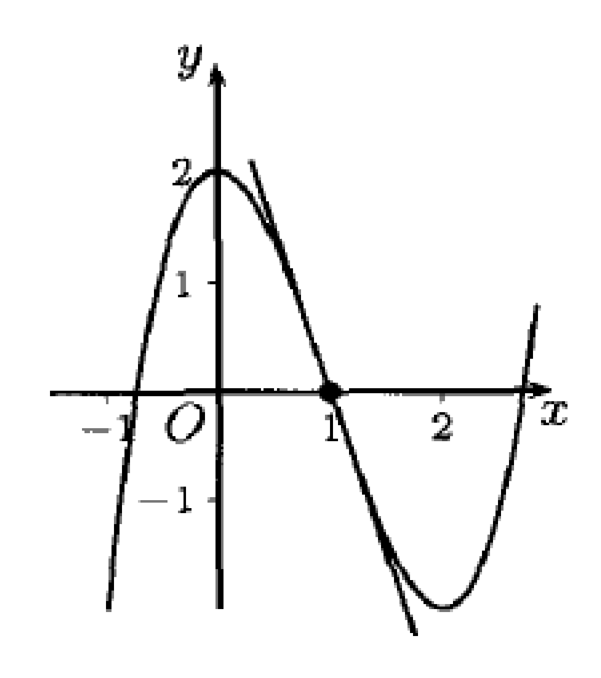
有高于一阶的相切.

解 由于直线的二阶导数恒等于 0, 因此在切点处的 $y=x^3-3x+2$ 的二阶导数也等于 0. 求出

$$y'=3x^2-6x,\quad y''=6x-6,$$

可见只能是 $x=1$. 这时的 $y(1)=0$, 于是直线方程满足 $k+b=0$.

在点 $x=1$ 处直线的斜率为 k, 而 $y'(1)=3-6=-3$, 因此 $k=-3$, $b=3$. 于是所求直线为 $y=-3x+3$. □



习题 1591 的附图

注 由于本题的 $y(x)$ 是三次曲线, 二阶导数等于 0 的点至多只有一个. 如附图所示, 只有在拐点处才可能与一条直线有高于一阶的相切.

习题 1595 求双曲线 $xy=1$ 在下列点处的曲率半径和曲率中心:
(a) $M(1,1)$; (b) $N(100,0.01)$.

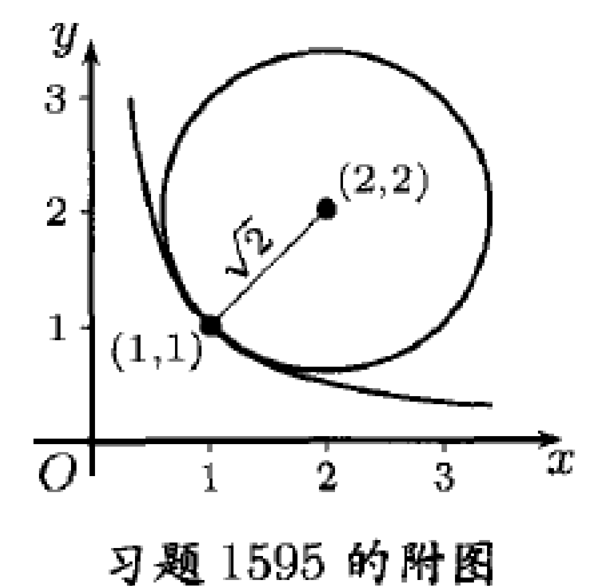
解 先求出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一阶和二阶导数为:

$$y'(x)=-\frac{1}{x^2},\quad y''(x)=\frac{2}{x^3}.$$

然后写出曲率半径公式

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

对于点 $M(1,1)$, 用 $y(1)=1$, $y'(1)=-1$, $y''(1)=2$ 代入就有 $R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.



习题 1595 的附图

最后按照曲率中心公式

$$\xi=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''},$$

就得到点 $M(1,1)$ 的曲率中心为 $(2,2)$ (见附图).

同样对于点 $N(100,0.01)$ 计算出 $y'(100)=-10^{-4}$ 和 $y''(100)=2\times10^{-6}$, 于是可以得到曲率半径 $R\approx0.5\times10^6$, 曲率中心的坐标值近似为 $(150,500\,000)$. □

习题 1602 求圆的渐伸线 $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ 的曲率半径.

解 按照参数方程给定的函数的求导法则, 计算得到导数为

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t,$$

$$y''_x=\frac{[y'_x]'_t}{x'_t}=\frac{\sec^2 t}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}.$$

于是得到曲率半径为 (其中设 $a>0$)

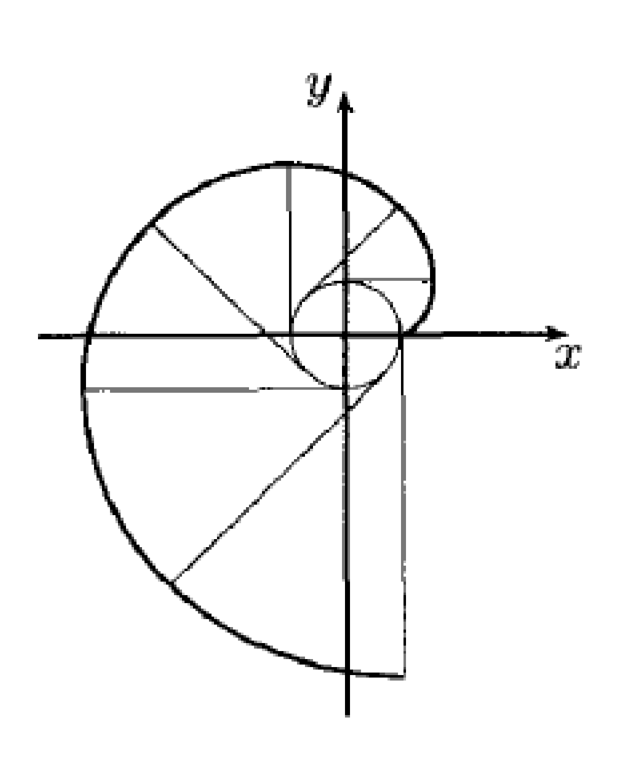
$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{|\sec^3 t|}{\dfrac{1}{a|t\cos^3 t|}}=a|t|.$$

为了理解圆的渐伸线的意义, 可求出曲率中心

$$\xi=a(\cos t+t\sin t)-\frac{\tan t\sec^2 t}{\dfrac{1}{at\cos^3 t}}=a\cos t,$$

$$\eta=a(\sin t-t\cos t)+\frac{\sec^2 t}{\dfrac{1}{at\cos^3 t}}=a\sin t,$$

可见本题的曲线的渐屈线就是半径为 a 的圆周. 如附图所示, 设想在该圆上绕了许多圈细线, 然后拉住其线端展开, 则线端点的轨迹就是本题的曲线. 因此它被称为圆的渐伸线. 附图中所画的恰好是展开一周所得到的渐伸线. □



习题 1602 的附图

习题 1603 证明, 二次曲线

$$y^2=2px-qx^2$$

的曲率半径与法线段的立方成正比.

解 先求法线段的长度. 在点 (x,y) 处的切线斜率为 y', 因此过该点的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x),$$

其中 (X,Y) 是法线上的点. 在 $Y=0$ 时得到法线与 x 轴的交点 $(x+yy',0)$. 从 (x,y) 到该交点的距离即是法线段长 $s=\sqrt{y^2+y^2y'^2}=|y|\sqrt{1+y'^2}$.

写出曲率半径公式

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{s^3}{|y^3y''|}.$$

用隐函数求导法得到

$$yy'=p-qx,$$

$$y'^2+yy''=-q,$$

即可计算得到

$$|y^3y''|=|y^2y'^2+qy^2|=|p^2-2pqx+q^2x^2+q(2px-qx^2)|=p^2,$$

可见曲率半径 R 与 s^3 成正比. □

习题 1604 试写出用极坐标给出的曲线的曲率半径公式.

解 设曲线的极坐标方程为 $r = r(\varphi)$, 则可以写出以 φ 为参数的参数方程:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi.$$

于是就可以按照参数方程给出的函数求导法计算得到

$$y'_x = \frac{y'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi},$$

$$y''_x = \frac{[y'_x]'_\varphi}{x'_\varphi} = \frac{1}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3}\cdot[(r''\sin\varphi + 2r'\cos\varphi - r\sin\varphi)(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)$$
$$-(r''\cos\varphi - 2r'\sin\varphi - r\cos\varphi)(r'\sin\varphi + r\cos\varphi)]$$
$$= \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^3},$$

于是就得到曲率半径

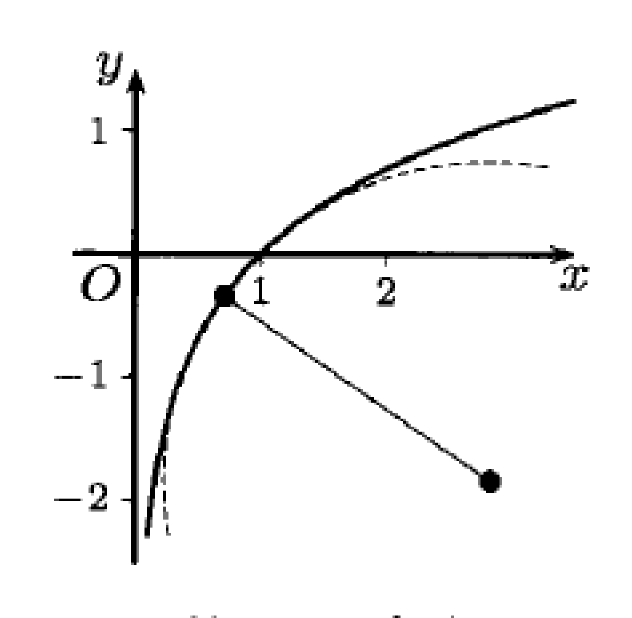
$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}. \quad \square$$

习题 1609 在曲线 $y = \ln x$ 上找一点, 使得在这一点处的曲率最大.

解 从 $y' = \dfrac{1}{x}$ 和 $y'' = -\dfrac{1}{x^2}$ 直接得到曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

于是问题就成为在 $x > 0$ 上求 $K(x)$ 的最大值.



习题 1609 的附图

计算曲率对 x 的导数得到

$$K'(x) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

可见在 $x > 0$ 时的唯一驻点是 $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且从 $K'(x)$ 的符号变化可知 x_0 是最大值点. 在曲线 $y = \ln x$ 上的对应点是 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. 在附图中作出了该点的曲率中心和曲率圆的一部分. $\square$

习题 1610 三次抛物线 $y = \dfrac{kx^3}{6}$ $(0 \leqslant x < +\infty,\ k > 0)$ 的最大曲率等于 $\dfrac{1}{1\,000}$, 求达到这个最大曲率的点 x.

解 先计算该曲线的曲率. 从 $y' = \dfrac{kx^2}{2}$, $y'' = kx$ 得到曲率公式为

$$K = \frac{kx}{\left(1 + \frac{k^2x^4}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

为求 $K(x)$ 的最大值, 将它对 x 求导得到

$$K'(x)=\frac{k\left(1+\frac{k^2x^4}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\left(1+\frac{k^2x^4}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot k^3x^4}{\left(1+\frac{k^2x^4}{4}\right)^3}$$

$$=\frac{k}{\left(1+\frac{k^2x^4}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}\cdot\left(1-\frac{5}{4}k^2x^4\right),$$

可见在 $x\geqslant 0$ 时只有唯一的正根 $x_0=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot k^{-\frac{1}{2}}$. 从 $K'(x)$ 的符号变化可知 x_0 是最大值点. 这时的最大值为

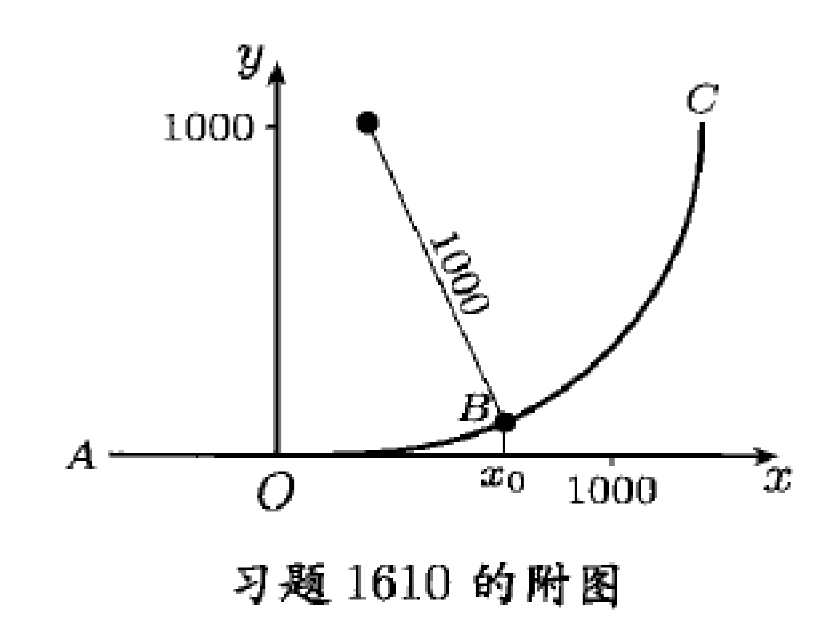
$$K(x_0)=k^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{3}{2}}=k^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{-1}3^{-\frac{3}{2}}5^{\frac{5}{4}}.$$

利用题设条件 $K(x_0)=1/1000$ 就有

$$k^{-\frac{1}{2}}=500\cdot 3^{-\frac{3}{2}}5^{\frac{5}{4}}\ \ (k\approx 1.93\times 10^{-6}),$$

因此最大值点为

$$x_0=k^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}5^{-\frac{1}{4}}=2500\cdot 2^{\frac{1}{2}}3^{-\frac{3}{2}}\approx 680.4.\quad\square$$



习题 1610 的附图

注 本题来自于铁路转弯时的设计问题 (可参看 [6] 的第一卷的 252 小节的 10)). 如题所示的三次抛物线可以作为直线 (曲率半径为无穷大) 和半径为指定值的圆弧之间的过渡曲线. 它不仅保证了一阶导数的连续变化, 而且保证了曲率的连续单调递增变化. 这个要求也出现在许多其他领域的运动轨道衔接中. 本题的答案给出了可以作为过渡曲线使用的曲线段.

如附图所示, 直线段 $\overline{AO}$ 通过曲线弧 $\widehat{OB}$ 与半径为 1000 的圆弧 $\widehat{BC}$ 的连接而实现了曲率的连续过渡, 其中 $\widehat{OB}$ 就是根据上述计算得到的 k 和 x_0 所画的三次抛物线 $y=\frac{k}{6}x^3$, $0\leqslant x\leqslant x_0$.

接下来是求渐屈线的 5 道习题. 其中的习题 1611–1613 和 1615 都是 [6] 第一卷的 254 小节的例题, 这里从略. 下面只讲习题 1614 和 1616.

习题 1614 求出曳物线 $x=a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}$ 的渐屈线方程.

解 先用隐函数求导法计算导数 y'_x. 从方程两边对 x 求导得到

$$1=\left(a\cdot\frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}}\cdot\frac{\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}\cdot y-\left(a+\sqrt{a^2-y^2}\right)}{y^2}-\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}}\right)\cdot y'$$

$$=-\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}\cdot y',$$

因此有

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

再从这个表达式求二阶导数:

$$y'' = -\frac{\sqrt{a^2-y^2} - \dfrac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}} \cdot y}{a^2-y^2} \cdot y' = \frac{a^2 y}{(a^2-y^2)^2}.$$

然后即可计算曲率中心:

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} \cdot \frac{a^2}{a^2-y^2} \cdot \frac{(a^2-y^2)^2}{a^2 y}$$
$$= x + \sqrt{a^2-y^2},$$
$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y + \frac{a^2}{a^2-y^2} \cdot \frac{(a^2-y^2)^2}{a^2 y} = \frac{a^2}{y}.$$

再利用曳物线方程就可以得到以 y 为参数的渐屈线方程:

$$\xi = a \ln \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}, \quad \eta = \frac{a^2}{y}.$$

还可以进一步求出 η 和 ξ 之间的关系①.

将上述第一个方程改写为

$$e^{\frac{\xi}{a}} = \frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

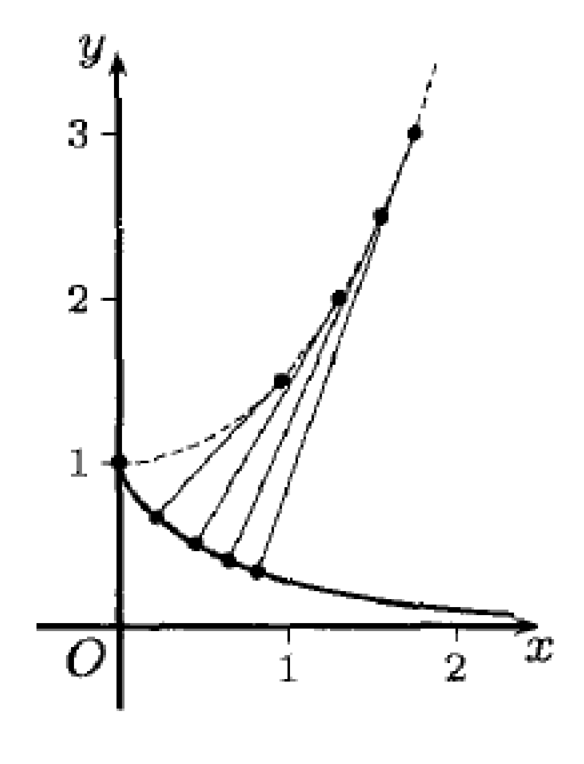
然后又有

$$e^{-\frac{\xi}{a}} = \frac{y}{a+\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

将两式相加除 2 就得到

$$\eta = a \cdot \frac{a}{y} = a \cdot \frac{e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}}{2} = a \cosh \frac{\xi}{a}.$$

这表明曳物线的渐屈线是悬链线, 它在附图中用虚线表出 (附图中取 $a = 1$). □



习题 1614 的附图

注 在 §2.3 的习题 1080 中已见过曳物线, 只是那里以参数方程的形式出现, 其中 $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 对应的一支与本题相同, 而 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 的一支则可以与本题类似地写为

$$x = a \ln \frac{a-\sqrt{a^2-y^2}}{y} + \sqrt{a^2-y^2}.$$

习题 1616 证明, 摆线

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t)$$

的渐屈线也是摆线, 只是位置与已知摆线不同.

解 按照参数方程求导法则得到

① 若根据双曲余弦函数 $y = \cosh x$ 的定义求出其反函数为 $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2-1})$, 则就可直接看出 $\frac{a}{y} = \cosh \frac{\xi}{a}$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \cot\frac{t}{2},$$

$$y''_x = \frac{[y'_x]'_t}{x'_t} = \frac{-\csc^2\dfrac{t}{2}}{2a(1-\cos t)} = -\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}},$$

然后计算曲率中心

$$\xi = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x + 4a\sin^4\frac{t}{2}\cdot\cot\frac{t}{2}\csc^2\frac{t}{2}$$

$$= x + 2a\sin t = a(t+\sin t),$$

$$\eta = y + \frac{1+y'^2}{y''} = y - 4a\sin^2\frac{t}{2}$$

$$= y - 2a(1-\cos t) = -a(1-\cos t).$$

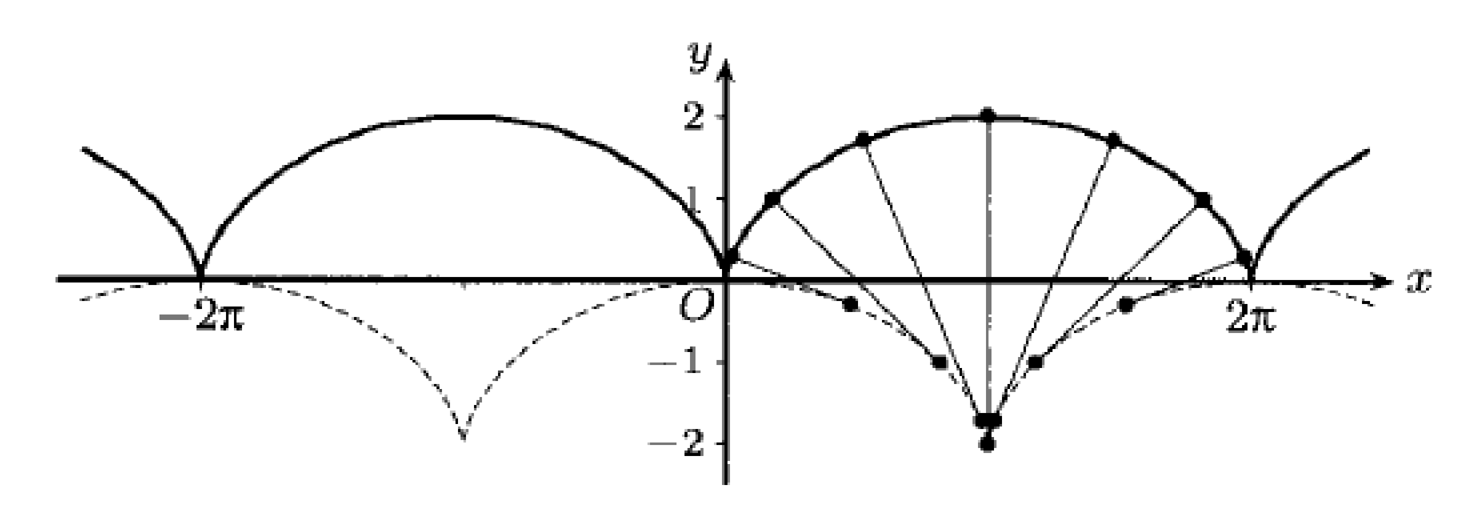
令 $t=\tau-\pi$, 则得到

$$\xi = a(\tau-\pi-\sin\tau) = -a\pi + a(\tau-\sin\tau),$$

$$\eta = -a(1+\cos\tau) = -2a + a(1-\cos\tau),$$

可见渐屈线仍然是摆线, 它可以从原来的摆线左移 $a\pi$ 再下移 $2a$ 得到.

在附图中作出了 $a=1$ 的摆线及其渐屈线 (后者用虚线表出). 关于摆线的解释见 §2.3 的习题 1079. □



习题 1616 的附图

§2.15 方程的近似解 (习题 1617–1627)

内容简介 用比例法和牛顿法求方程 $f(x)=0$ 的实根的近似值.

比例法也称为弦线法, 牛顿法也称为切线法.

这里对方程 $f(x)=0$ 总假定函数 f 二阶可微. 第一步是分析实根的个数及其大致位置. 然后对于每一个实根确定一个区间 $[a,b]$, 使得 $f(a)f(b)<0$. 这样就保证在 (a,b) 中有根. 又假设该区间已充分小, 使得 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在区间内保号, 这不但保证了根的唯一性, 而且还能够保证用本节的两个方法迭代求解所得到的逐次近似值是严格单调数列.

弦线法就是用连接点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 得到的弦线与 x 轴的交点的横坐标值作为方程 $f(x)=0$ 的根的近似值; 切线法就是用曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$ (或 $(b,f(b))$) 处的切线与 x 轴的交点的横坐标值作为方程 $f(x)=0$ 的根的近似值.

《习题集》中关于这两种的方法的叙述及其误差估计都是以 [6] 的 §4.5 中的内容为依据的.

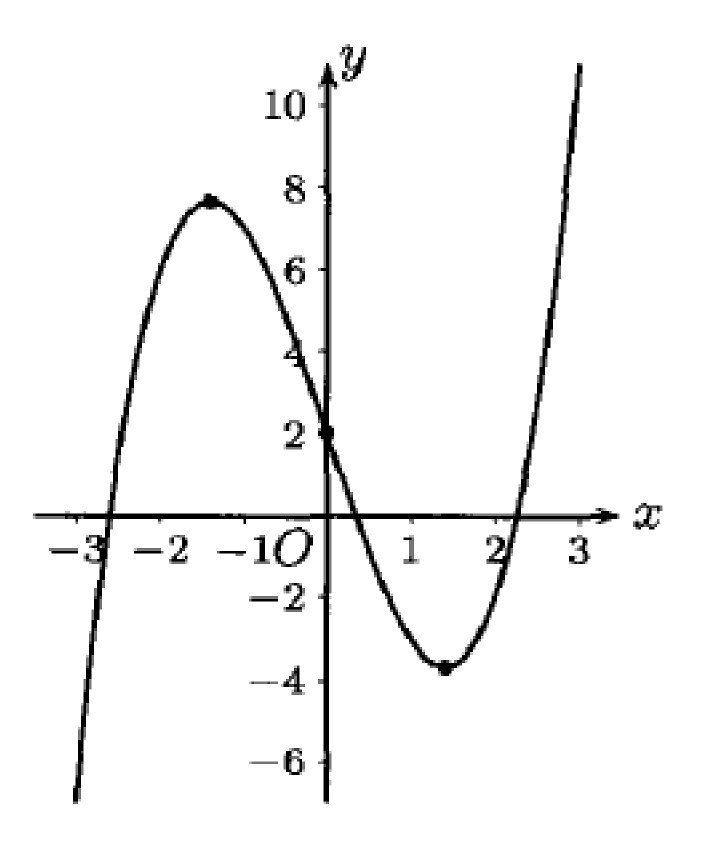
由于弦线法的收敛速度很慢, 不是求解 $f(x)=0$ 的有效方法, 下面只对第一个例子计算它的一个根.

习题 1617 利用比例法求方程 $x^3-6x+2=0$ 的根, 精确到 0.001.

解 首先求出函数 x^3-6x+2 的一阶和二阶导数:

$$f'(x)=3x^2-6,\quad f''(x)=6x.$$

可见 $\xi_1=\sqrt{2}$ 是极小值点, 极小值 $f(\xi_1)<0$, $\xi_2=-\sqrt{2}$ 是极大值点, 极大值 $f(\xi_2)>0$, 因此可肯定三次代数方程 $f(x)=0$ 有三个实根①.



习题 1617 的附图

利用 $f(0)=2$ 和 f 在若干整数点上的值, 就可以作出附图所示的草图, 其中点 $(0,2)$ 是拐点. 这样就可以确定在区间 $[-3,-2]$, $[0,1]$ 和 $[2,3]$ 内分别有一个实根.

下面只给出区间 $[0,1]$ 内的根的近似计算.

如《习题集》在本节的前言所指出, 可以先从一阶导函数 $f'(x)=3x^2-6$ 求出

$$m=\inf_{0<x<1}|f'(x)|=6,$$

为误差估计

$$|x_n-\xi|\leqslant\left|\frac{f(x_n)}{m}\right| \tag{2.21}$$

做好准备. (其中 ξ 是区间内的根, x_n 是用弦线法的第 n 次近似值.)

利用 $a=0$, $b=1$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, 用弦线法的公式得到

① 这里也可以利用 §2.11 的习题 1470 的答案提供的判据, 即 (2.19) 的 $q^2+\dfrac{4p^3}{27}<0$ 是三次方程 $x^3+px+q=0$ 有三个实根的充分必要条件. 本题的 $p=-6$, $q=2$, 此不等式明显成立.

$$x_1 = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)} = 0 - \frac{2 \cdot (1-0)}{-3-2} = 0.4,$$

然后计算出 $f(0.4) = -0.336$. 由 (2.21) 可见还远远没有达到精度 0.001 的要求.

在区间 $[0, x_1]$ 上再用弦线法得到

$$x_2 = 0 - 2 \cdot \frac{x_1 - 0}{f(x_1) - f(0)} \approx 0.342\,466.$$

然后计算出 $f(x_2) \approx -0.014\,629$. 同样由 (2.21) 可见还要再做下去.

在区间 $[0, x_2]$ 上再用弦线法得到

$$x_3 = 0 - 2 \cdot \frac{x_2 - 0}{f(x_2) - f(0)} \approx 0.339\,979.$$

然后计算出 $f(x_3) \approx -0.577 \times 10^{-3}$. 由 (2.21) 可见误差已小于 0.001.

于是求得方程 $x^3 - 6x + 2 = 0$ 在 $[0, 1]$ 的一个实根的近似值为 0.340.

对于方程的其他两个实根也可用弦线法求得达到精度要求的近似值, 从略. □

注 以上计算虽然简单, 但对于理解有关的几个要点还是有益的.

(1) 在近似计算中必须有很强的误差估计意识. 在弦线法中一开始确定 m 对后面的计算有很大的好处. 当然这里一阶导函数 $f'(x)$ 的保号性是 $m > 0$ 的前提.

(2) 迭代过程中区间的左端点 $a = 0$ 始终不变. 这是由于二阶导函数 $f''(x)$ 在开始的区间 $[0, 1]$ 上大于 0, 因此 f 在该区间上为严格凸函数, 从而连接曲线上两点的弦线始终在曲线的上方. 这就保证了弦线与 x 轴的交点处 f 始终小于 0. 由此不但使区间左端点不变, 还保证了迭代得到的近似值数列 $\{x_n\}$ 为严格单调递减.

(3) 在近似计算中的每一步需要多保留一些小数位, 以免由于舍入误差的积累而影响计算的精度. 这方面可以参考本书在 §1.2.3 对习题 72 (数 e 的近似计算) 的分析.

下面考虑牛顿法 (切线法).

与弦线法相同处是通过作函数草图等手段确定方程 $f(x) = 0$ 的实根个数及其大致位置. 然后对于要计算的每一个实根确定包含该根在内部的一个充分小的区间 $[a, b]$, 满足 $f(a)f(b) < 0$, 且使得 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上都是保号的.

在弦线法的情况, 上述条件不仅保证方程 $f(x) = 0$ 在 (a, b) 内存在唯一的实根, 同时还保证弦线与 x 轴的交点一定在 (a, b) 内. 然而对于切线法来说, 在曲线的两个端点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 中选择哪一个点作切线却是个首要问题. 如果选择不当, 切线与 x 轴的交点有可能越出 $[a, b]$. 这样的例子是容易作出的.

为此我们介绍 [6] 中提出的选取端点的原则, 即切线端点处的函数值 (即 $f(a)$ 或 $f(b)$) 的符号应当与 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上的符号相同.

可以证明上述原则不仅保证第一次使用牛顿法时能够成功, 而且在此后只要用所得的近似值对应的曲线上的点作切线就可以继续下去而不发生问题.

此外, 如何估计切线法的近似值的误差也是重要的. 在 [6] 中给出了如下的迭代误差估计公式 (其中 ξ 是方程的根):

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{M}{2m} |x_n - \xi|, \tag{2.22}$$

其中 $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$, m 则与弦线法中相同.

由此公式可见, 每迭代一次, 近似值的准确的小数位的长度几乎增加一倍, 即收敛速度很快. 这样的算法在计算数学中称为二阶算法. 这里可参见在 §1.2.8 的习题 149 后的注 2, 其中指出该题和 §1.5.7 的习题 639.2 的开平方根算法都是牛顿法的具体实现.

在 [6] 中提出了同时使用弦线法和切线法的所谓联合法. 它的优点是两种方法所得的近似值恰好从两侧逼近方程的根. 但单独使用牛顿法也是可以的. 这是因为在上述假设条件下, 牛顿法所得到的逐次近似值是单调的, 因此在利用误差估计公式 (2.22) 时已经可以确定根的范围. 另一个方法是利用上面所说的二阶收敛, 从前后两次迭代的数值比较就可能估计出当前多少位数字已经是准确的, 同时可以确定误差范围.

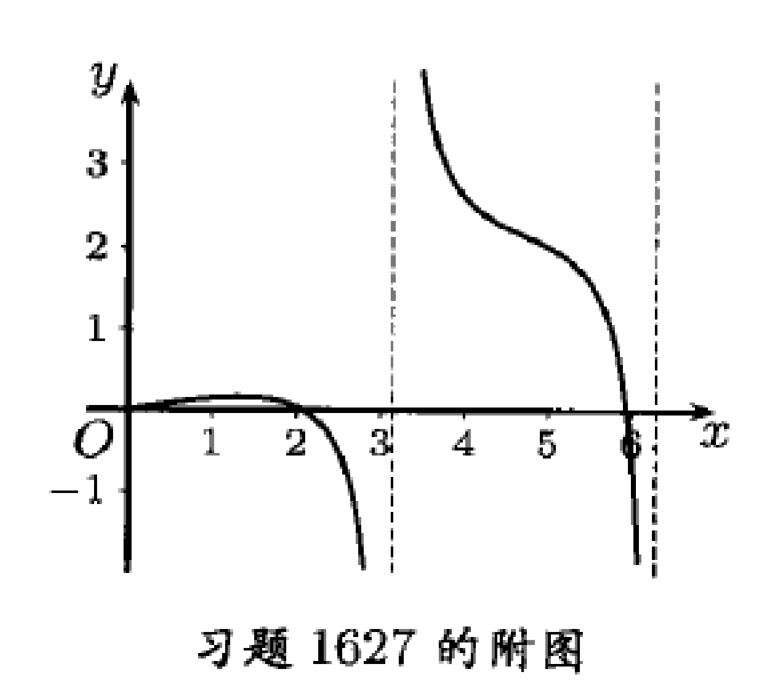
下面只讲本节的最后一个例子.

习题 1627 求方程 $\cot x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{2}$ 的两个正根, 精确到 10^{-3}.

解　设 $f(x) = \cot x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}$, 则当 $x \to +0$ 时, $\cot x \sim \dfrac{1}{x}$, 且可求出

$$\lim_{x \to +0}\left(\cot x - \frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) = 0,$$

因此在 $x = 0$ 右侧的 $f(x)$ 的性态不容易用作草图的方法看清楚. 在右边的附图中的 $(0, 2\pi]$ 上的图像是用作图软件 PSTricks 得到的, 下面用微分学方法来确定最小的两个正根的位置并用牛顿法求其近似值.



习题 1627 的附图

将 $f(x)$ 乘以 $x \sin x$, 就得到函数

$$F(x) = x\cos x + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\sin x,$$

显然 $F(x) = 0$ 和 $f(x) = 0$ 具有相同的正根. (在 x 为 π 的正整数倍处 $f(x)$ 没有定义, 而 $F(x)$ 也不等于 0.) 于是下面只需要求 $F(x) = 0$ 的两个最小正根的近似值.

将 F 对 x 求导得到

$$F'(x) = \frac{x^2}{2}\cos x, \quad F''(x) = x\cos x - \frac{x^2}{2}\sin x,$$

则在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上有 $F(0) = 0$, 又除了两个端点之外有 $F'(x) > 0$, 因此 $F(x)$ 在这个区间上严格单调递增, 在其中没有正根.

在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上有 $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{8} - 1 > 0$, $F(\pi) = -\pi < 0$, 又从 $F'(x)$ 的表达式可见它在这个区间上始终小于 0, 因此存在唯一的实根. 从 $F''(x)$ 的表达式可见它在这个区间上也始终小于 0, 因此应当从右端点 π 用切线法求根的近似值.

从 $F'(x)$ 的表达式可见在上述第一个正根的右侧直到 $\frac{3}{2}\pi$ 为止它都是小于 0 的, 因此 $F(x) = 0$ 不会有根. 在区间 $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ 的两端则有 $F(\frac{3}{2}\pi) < 0$, $F(2\pi) > 0$, 且除了左端点之外都有 $F'(x) > 0$, 因此在这个区间内存在唯一正根. 又可从 $F''(x)$ 的表达式看出它在这个区间内大于 0, 因此应当用 2π 作为初始值来用切线法求根的近似值.

以下是对这两个根的具体计算.

(1) 从点 π 开始有

$$x_1 = \pi - \frac{F(\pi)}{F'(\pi)} \approx 2.504\,973.$$

接下来的几次迭代结果是

$$x_2 \approx 2.210\,225,\ x_3 \approx 2.099\,512,\ x_4 \approx 2.082\,002,\ x_5 \approx 2.081\,576.$$

从最后两个值与二阶收敛特征可见对于第一个正根取近似值 2.081 已经达到误差小于 0.001 的要求. (作为验证我们再求出 x_6, 发现 x_5 的 7 位数字都不再改变.)

(2) 从点 2π 开始有

$$x_1 = 2\pi - \frac{F(2\pi)}{F'(2\pi)} \approx 5.964\,875,$$

接下来的几次迭代结果是

$$x_2 \approx 5.940\,571,\ x_3 \approx 5.940\,370.$$

从最后两个值与二阶收敛特征可见对于第二个正根取近似值 5.940 已经达到误差小于 0.001 的要求. (作为验证我们再求出 x_4, 发现 x_3 的 7 位数字都不再改变.)

结论: 两个最小的正根的近似值分别为 2.081 和 5.940. □

最后为读者方便起见, 在下面的命题中对本节提到的切线法的重要内容给出证明.

命题 2.13 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上二阶可微, 且满足以下条件:

(1) $f(a)f(b) < 0$,

(2) $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上均保号,

那么就有

(a) 方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内存在唯一的实根 ξ;

(b) 若在端点 a, b 中选取其函数值与 f'' 同号的端点为 x_0, 则用迭代公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

得到的数列 $\{x_n\}$ 严格单调收敛于根 ξ;

(c) $\{x_n\}$ 满足误差估计公式 (2.22).

证 (a) 由连续函数的零点存在定理知道方程 $f(x) = 0$ 在 (a,b) 内有实根. 由于 $f'(x)$ 保号, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调, 因此只有唯一的实根.

(b) 不妨只讨论在 $[a,b]$ 上 $f''(x) > 0$ 和 $f(b) > 0$ 的情况. 从 $f(a) < 0$ 可见在区间 $[a,b]$ 上 $f'(x) > 0$ 成立. 现在用数学归纳法证明迭代数列 $\{x_n\}$ 完全落在区间 (a,b) 中, 且为严格单调递减, 即有 $a < \xi < \cdots < x_{n+1} < x_n < \cdots < x_1 < b$.

从 $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $x_0 = b$, $f(b) > 0$ 和 $f'(b) > 0$ 可见 $x_1 < x_0$.

利用 $f(\xi) = 0$ 并在区间 $[\xi, b]$ 上用拉格朗日中值定理, 即可得到

$$x_1 = b - \frac{f(b) - f(\xi)}{f'(b)} = b - \frac{f'(\xi + \theta(b - \xi))(b - \xi)}{f'(b)},$$

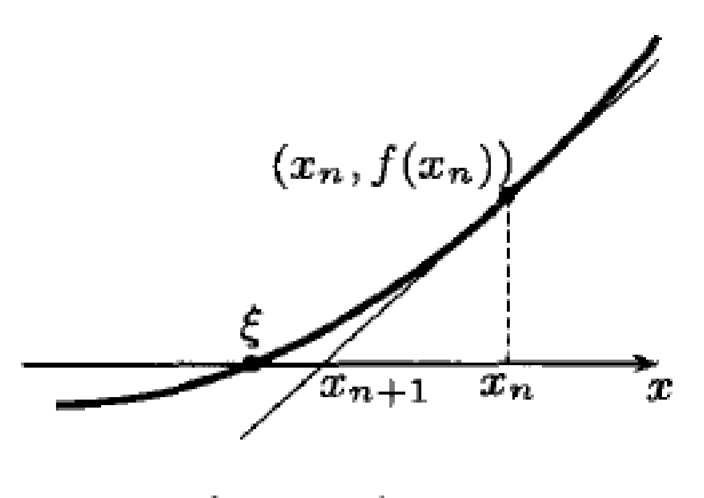
其中 $0<\theta<1$. 由于 $f''>0$ 保证了 f' 严格单调递增, 因此有

$$0<f'(\xi+\theta(b-\xi))<f'(b),$$

从而得到

$$x_1>b-(b-\xi)=\xi,$$

即有 $a<\xi<x_1<b$. 由于 f 严格单调递增, 可见有 $f(x_1)>0$.



牛顿法的附图

现假设对于 $n=k$ 有 $a<\xi<x_k\leqslant b$, 则从 $f'>0$ 可知 $f(x_k)>0$. 于是从迭代公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

和 $f'(x_k)>0$ 可得到 $x_{k+1}<x_k$.

利用 $f(\xi)=0$ 并在 $[\xi,x_k]$ 上用拉格朗日中值定理, 即可与 $k=0$ 的情况一样得到

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)-f(\xi)}{f'(x_k)}=x_k-\frac{f'(\xi+\theta(x_k-\xi))(x_k-\xi)}{f'(x_k)}>\xi,$$

即有 $a<\xi<x_{k+1}<x_k\leqslant b$.

由于 $\{x_n\}$ 严格单调递减且以 ξ 为下界, 因此存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 将它记为 η. 在迭代公式的两边令 $n\to\infty$ 就得到

$$\eta=\eta-\frac{f(\eta)}{f'(\eta)},$$

即有 $f(\eta)=0$. 由于 $\eta\in[\xi,b]$ 而 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中只有一个实根 ξ, 因此只能是 $\eta=\xi$.

(c) 利用泰勒公式对误差作估计如下:

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-\xi|&=\left|x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-\xi\right|\\&=\left|\frac{(x_n-\xi)f'(x_n)-f(x_n)}{f'(x_n)}\right|\\&=\left|\frac{f''(\theta_n)(x_n-\xi)^2}{2f'(x_n)}\right|\\&\leqslant\frac{M}{2m}(x_n-\xi)^2,\end{aligned}$$

其中 $\theta_n\in(\xi,x_n)$. □

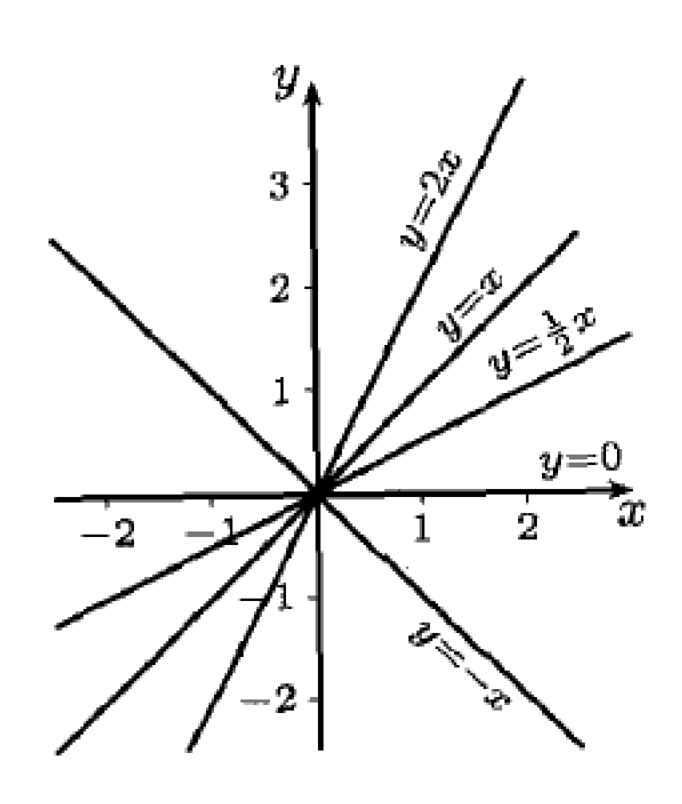
注 若假设 $f''(x)$ 连续, 则在最后一步推导中还可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\xi|}{(x_n-\xi)^2}=\left|\frac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}\right|,$$

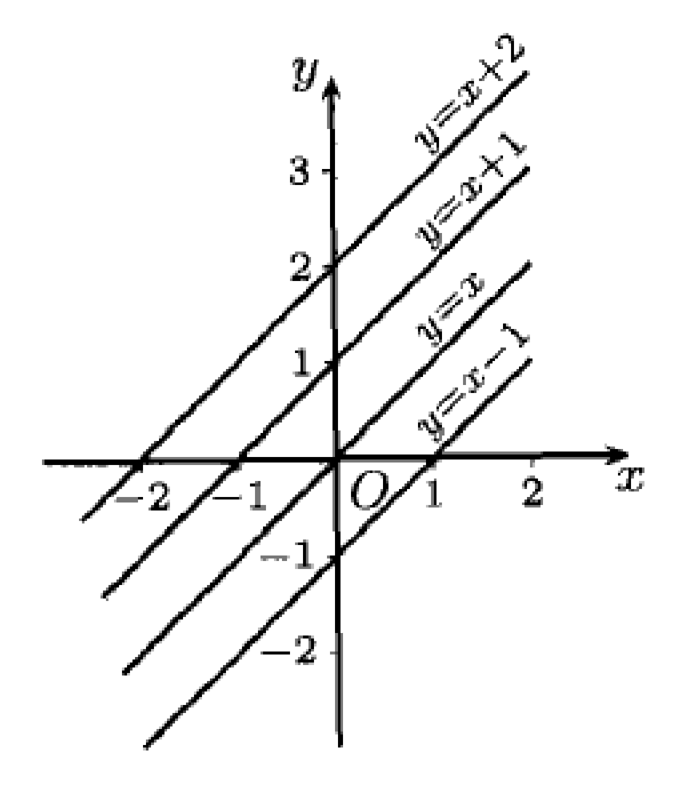
因此最终的收敛速度是由右边这个数所确定的.

附录一　§1.4 的图像参考答案

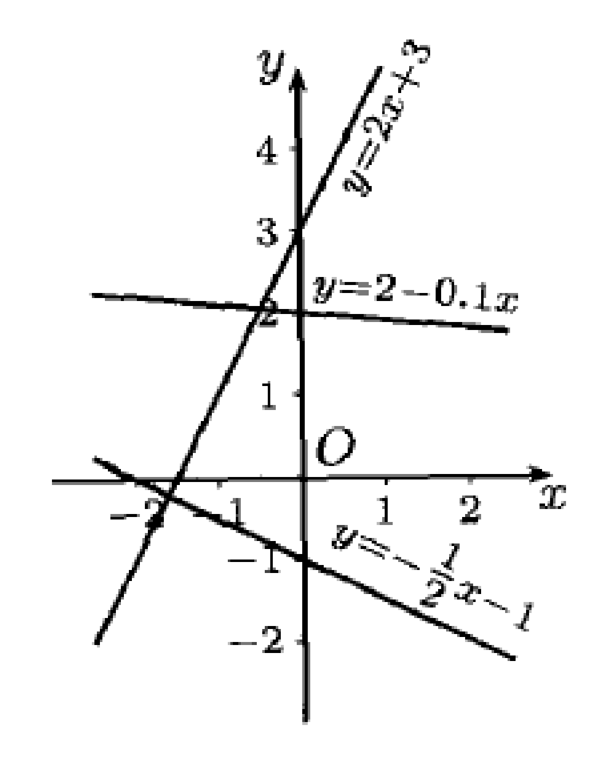
这个附录对 §1.4 “函数的图像表示”中的作图题提供图像的参考答案.



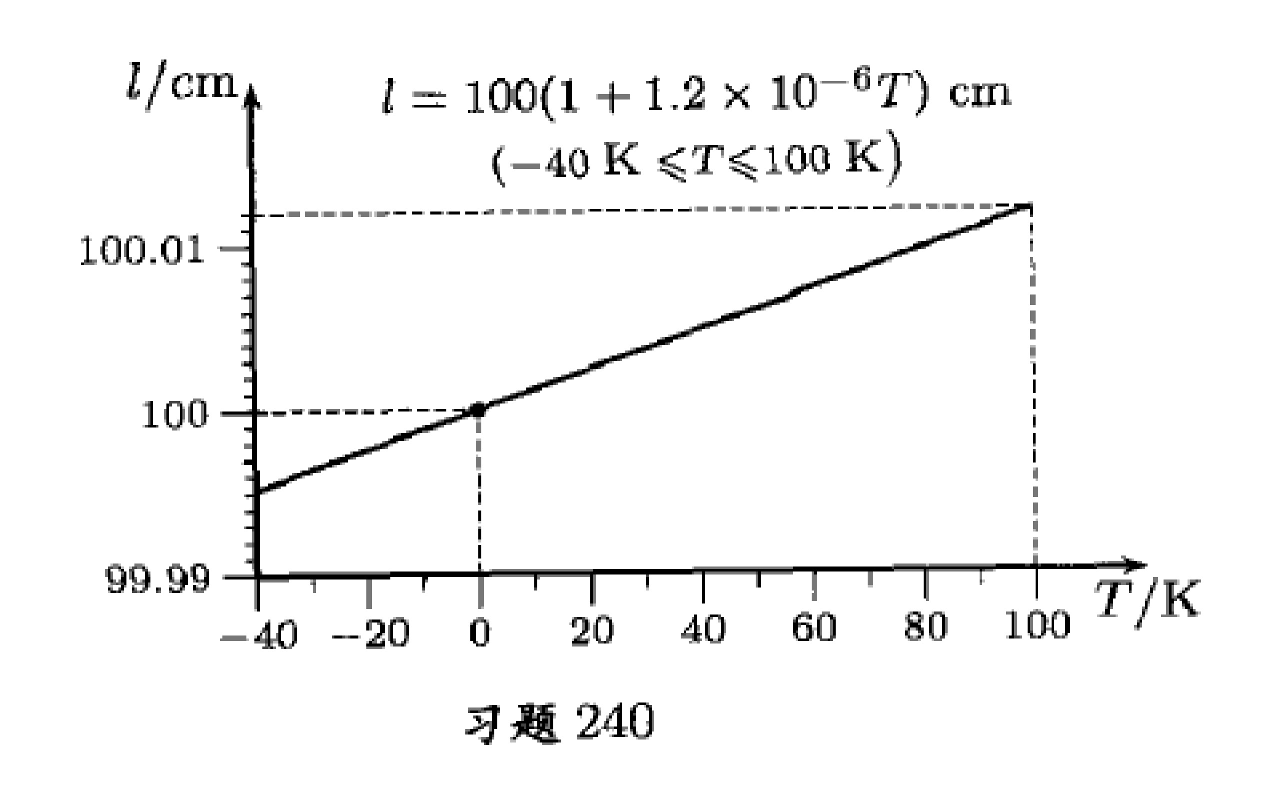
习题 237 : $y = ax$,
$a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$



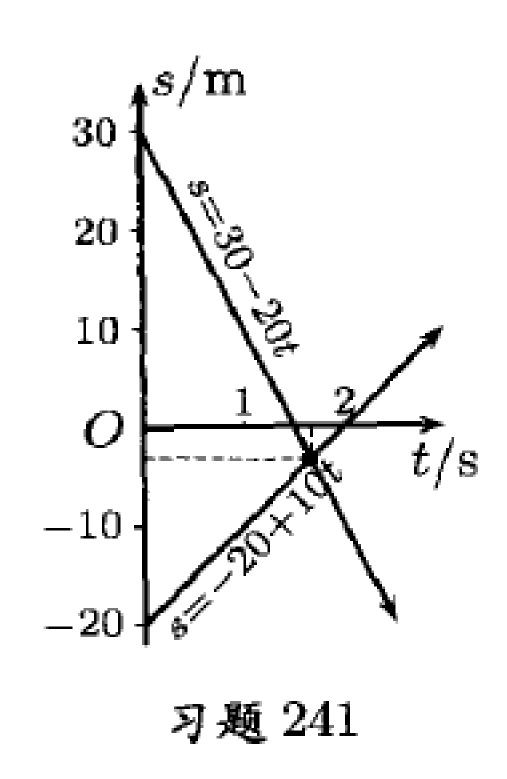
习题 238 : $y = x + b$,
$b = 0, 1, 2, -1$



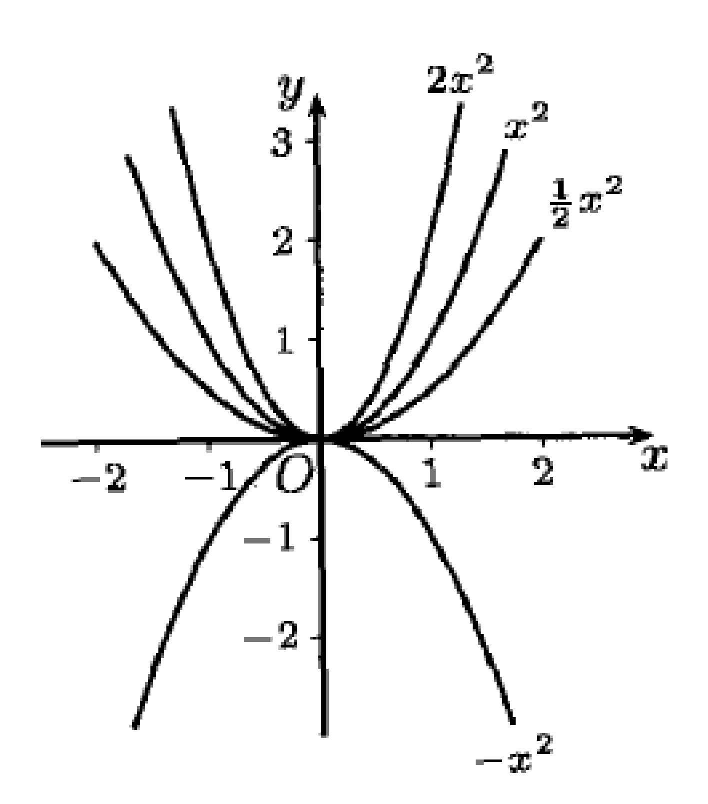
习题 239 : $y = 2x + 3$,
$y = 2 - 0.1x$, $y = -\frac{1}{2}x - 1$



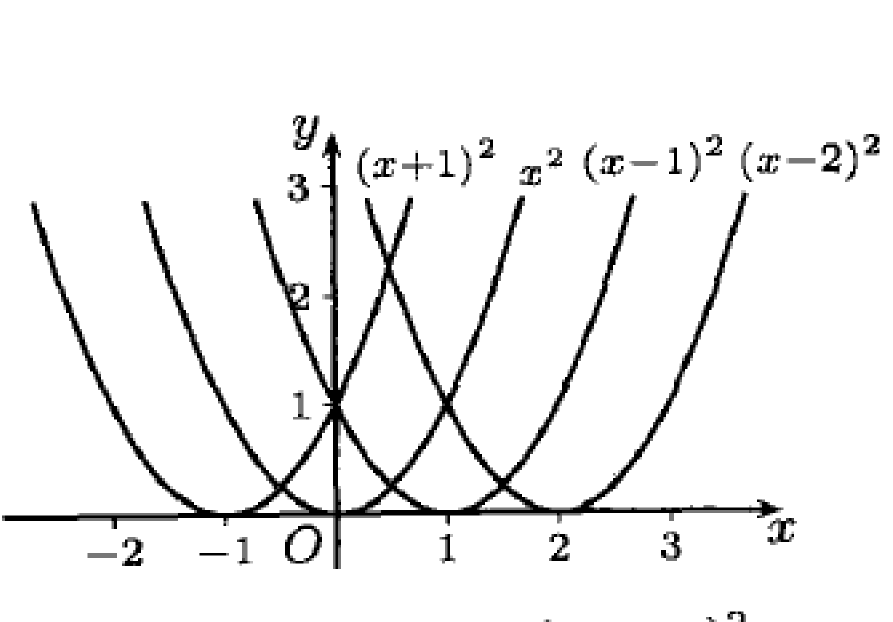
习题 240



习题 241

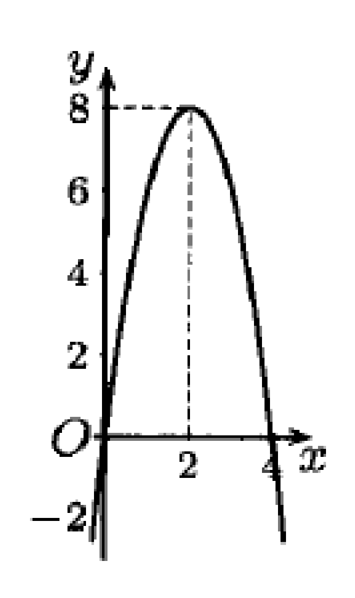


习题 242(a) : $y = ax^2$,
$a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$

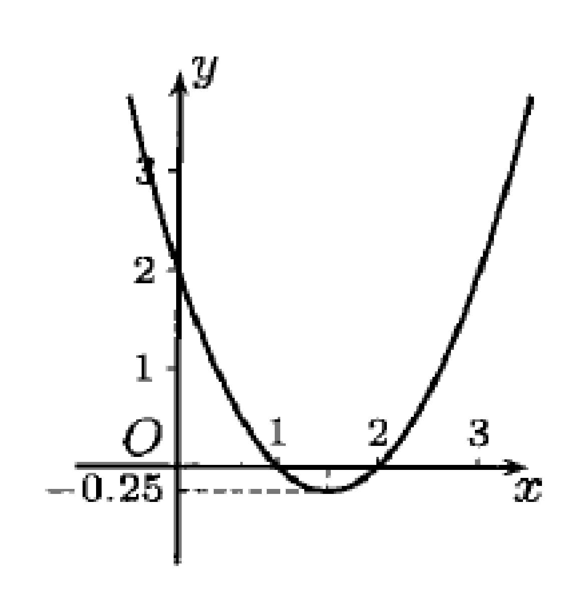


习题 242(b) : $y = (x - x_0)^2$,
$x_0 = 0, 1, 2, -1$

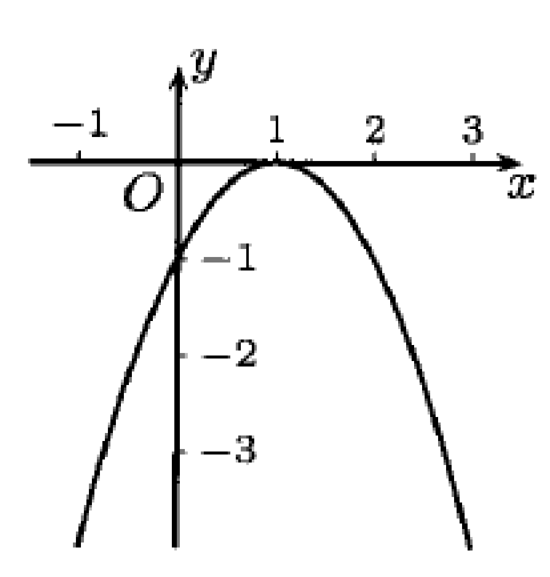
习题 242(c) : $y = x^2 + c$,
$c = 0, 1, 2, -1$



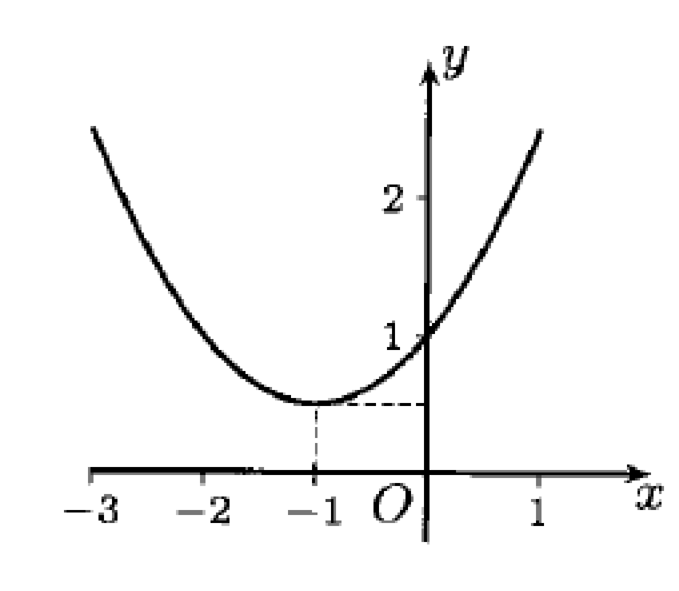
习题 243(a)：
$y = 8x - 2x^2$



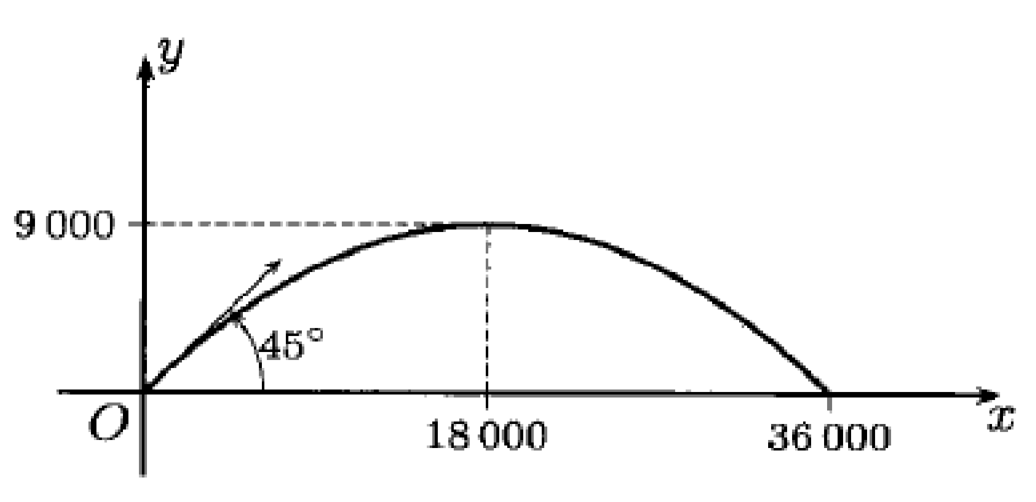
习题 243(b)：
$y = x^2 - 3x + 2$

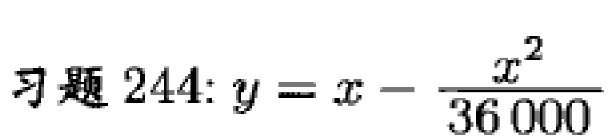


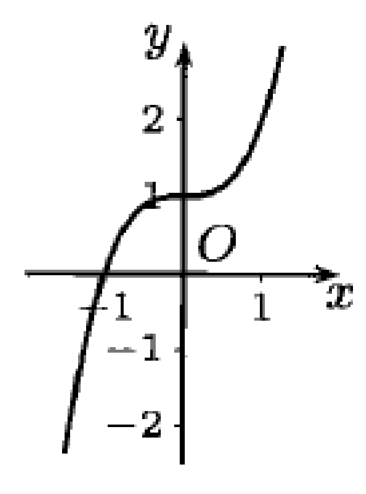
习题 243(c)：
$y = -x^2 + 2x - 1$

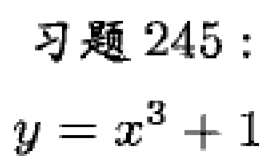


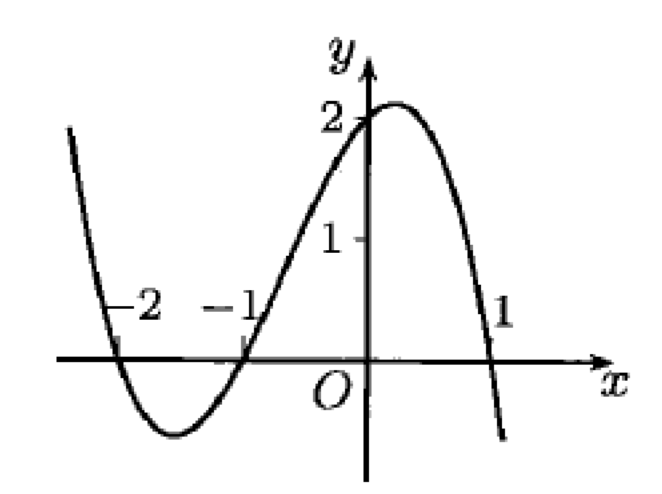
习题 243(d)：
$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$



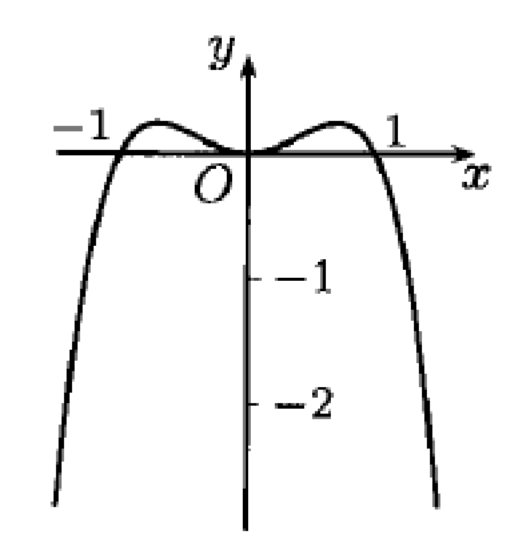

习题 244: $y = x - \frac{x^2}{36\,000}$



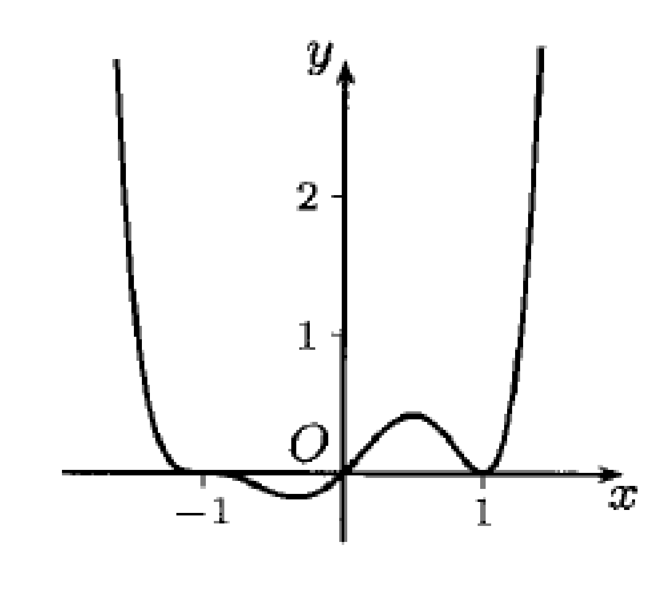

习题 245：
$y = x^3 + 1$



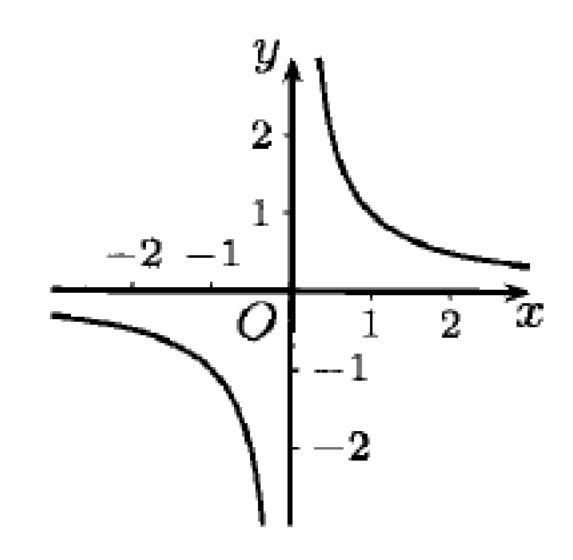
习题 246：
$y = (1 - x^2)(2 + x)$



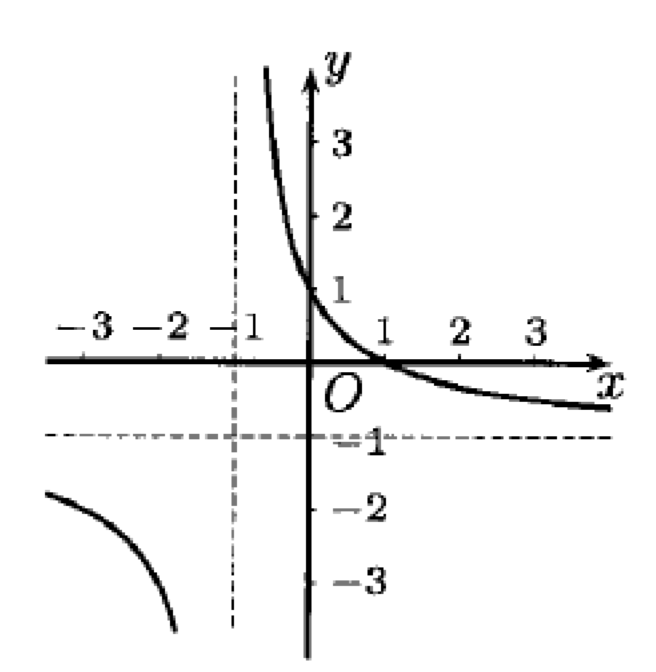
习题 247：
$y = x^2 - x^4$



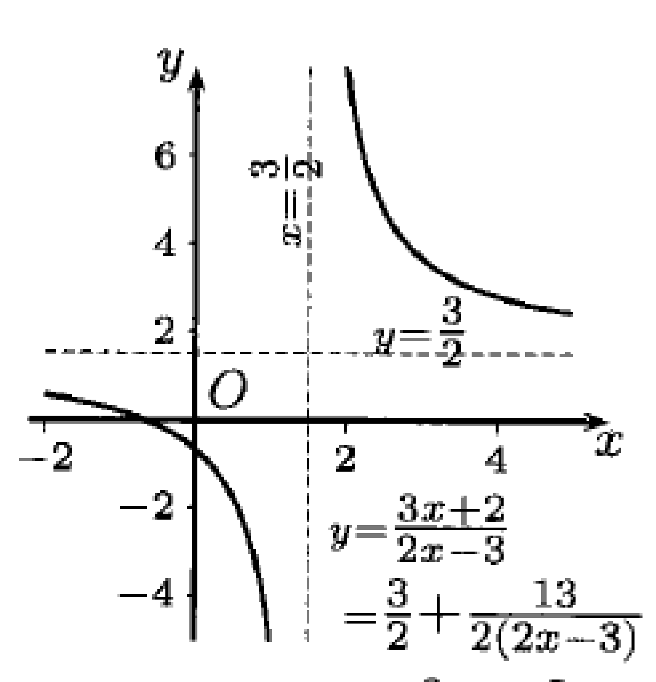
习题 248：
$y = x(1 - x)^2(1 + x)^3$



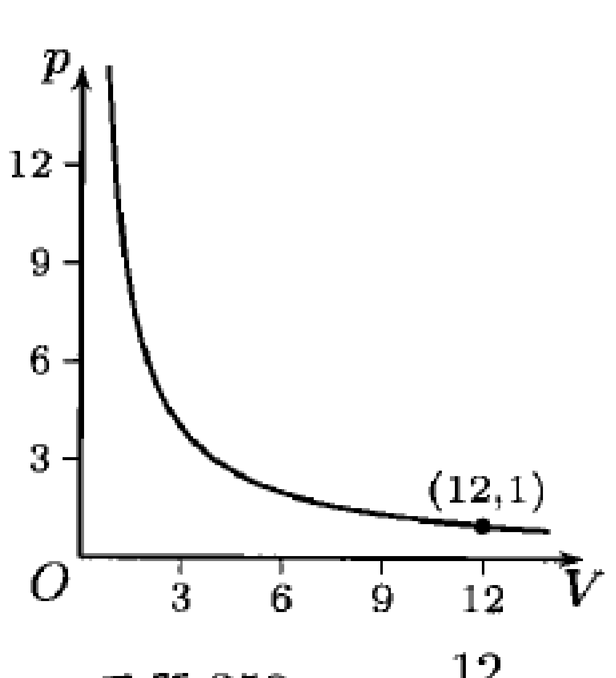
习题 249：
$y = \frac{1}{x}$



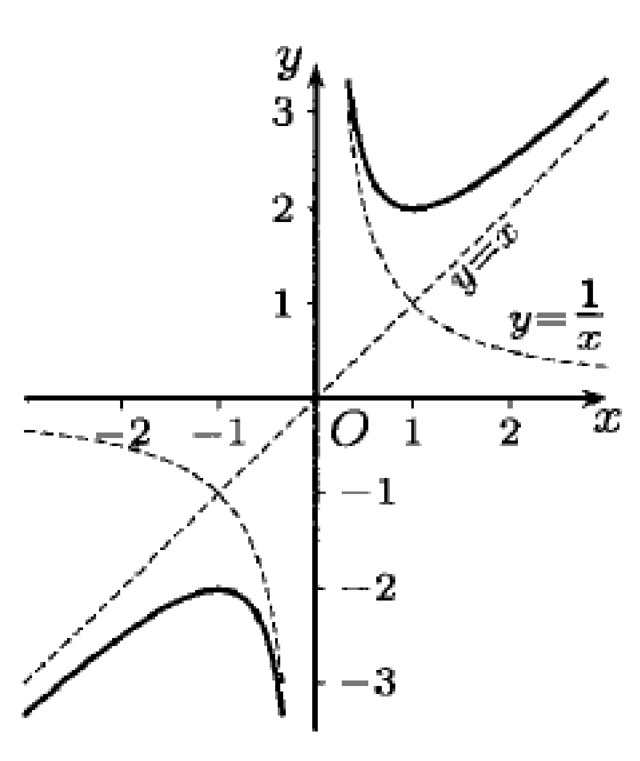
习题 250 : $y = \frac{1 - x}{1 + x}$

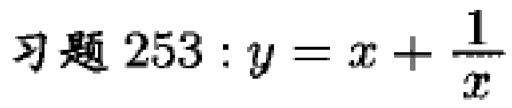


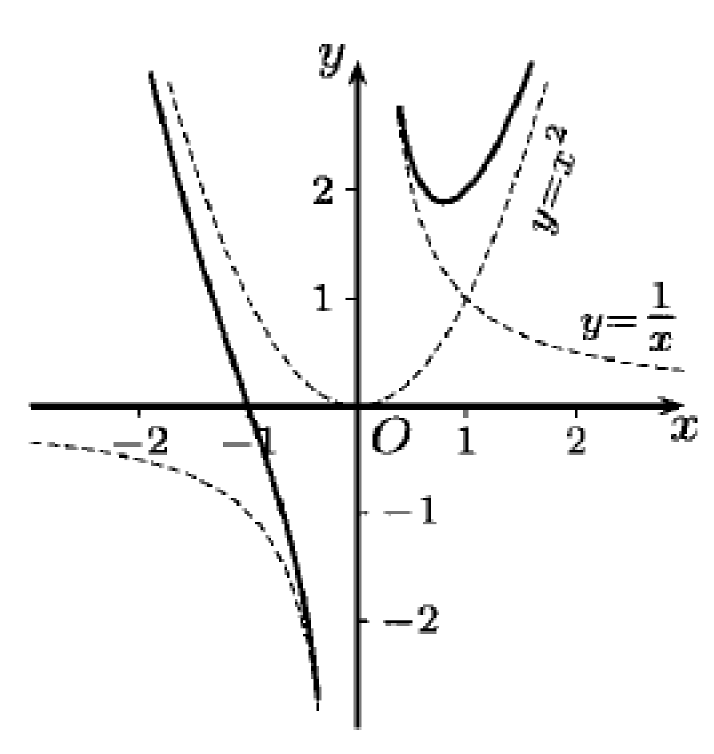
习题 251 : $y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$



习题 252 : $p = \frac{12}{V}$

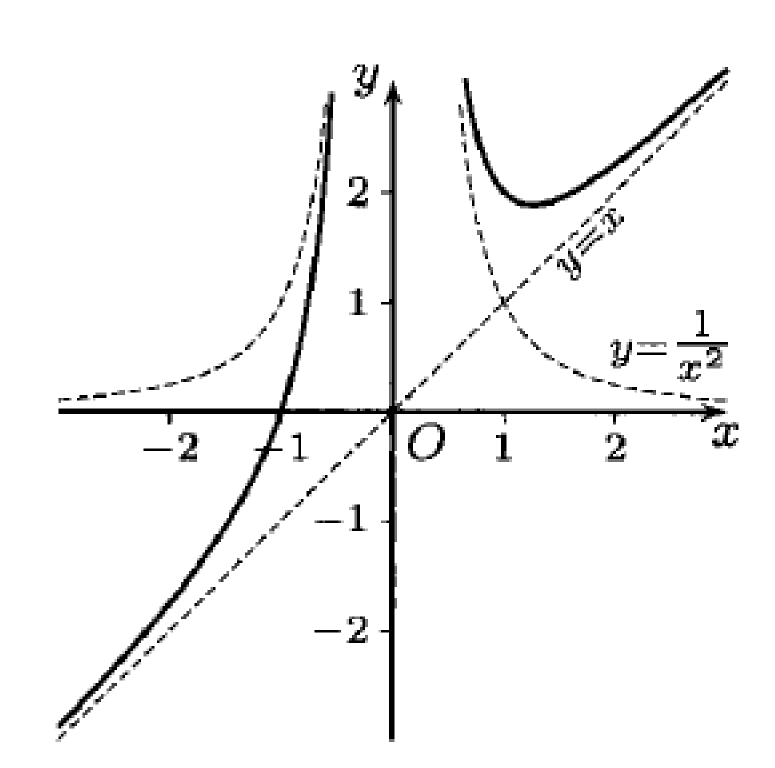



习题 253 : $y = x + \frac{1}{x}$

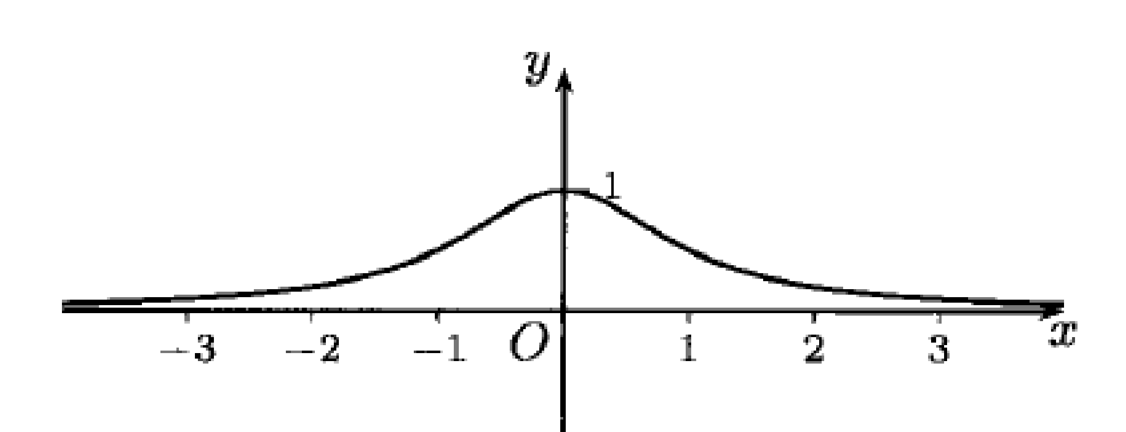


习题 254 : $y = x^2 + \frac{1}{x}$

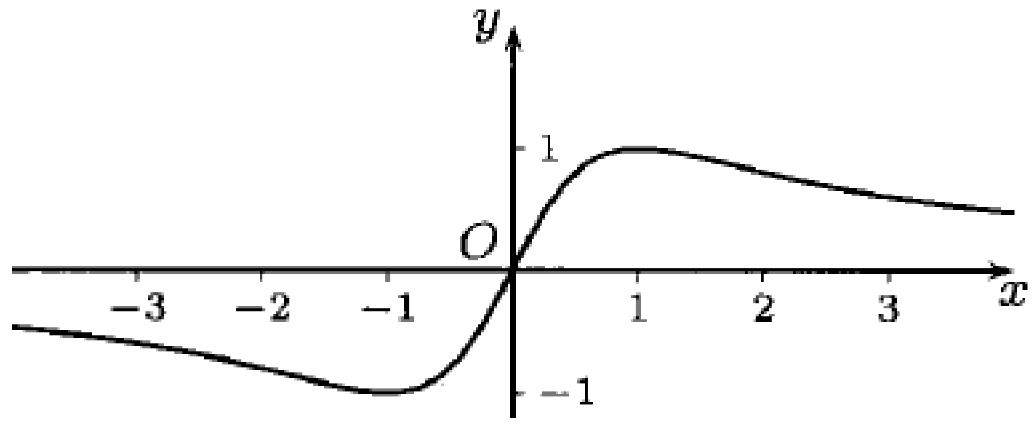
(牛顿三叉线)



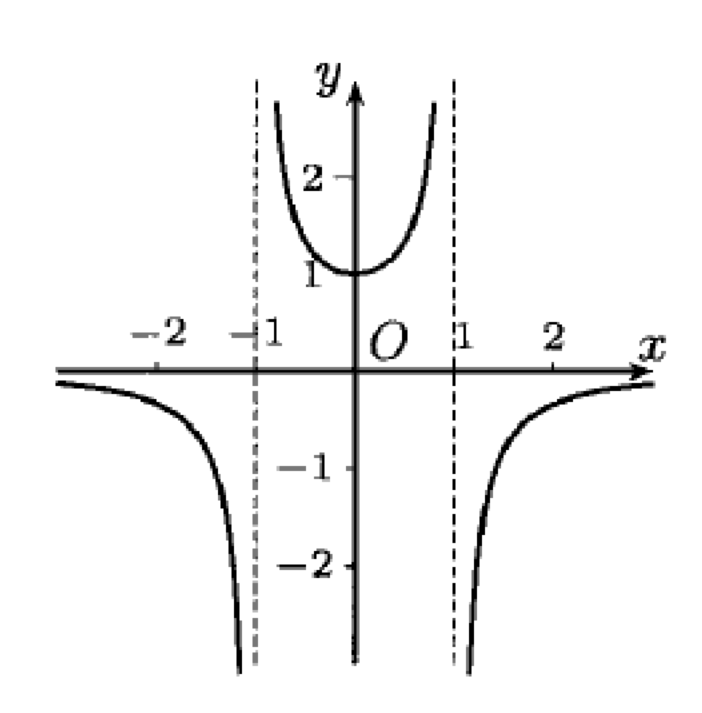
习题 255 : $y = x + \frac{1}{x^2}$



习题 256 : $y = \frac{1}{1 + x^2}$ (阿涅西箕舌线)

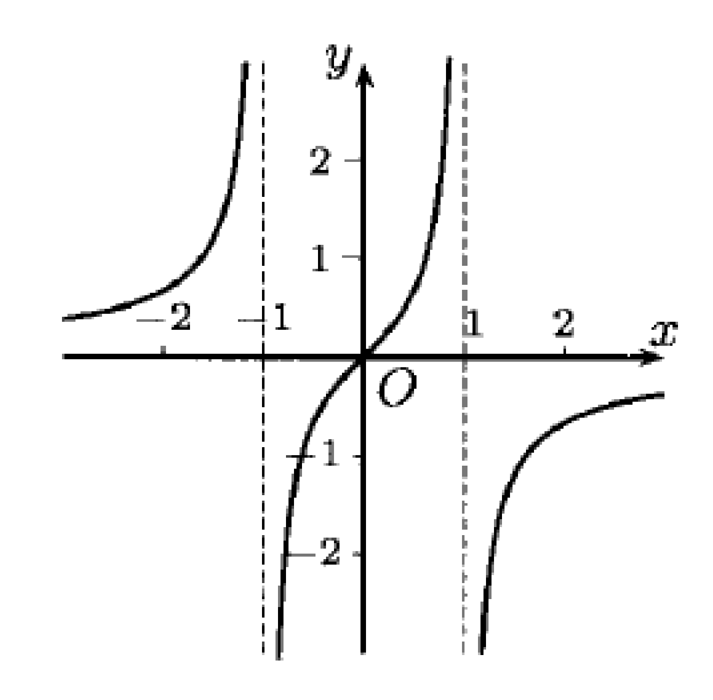


习题 257 : $y = \frac{2x}{1 + x^2}$ (牛顿蛇形线)



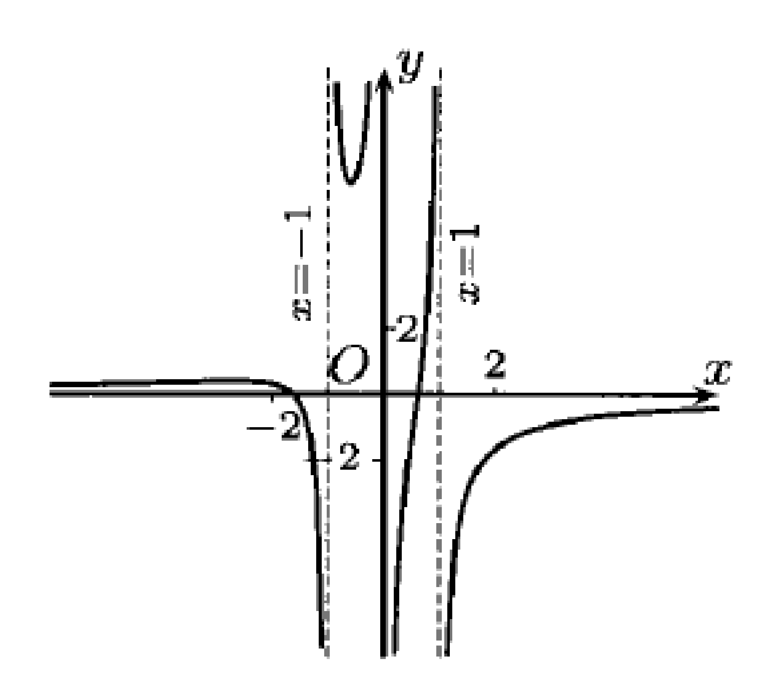
习题 258 :

$y = \frac{1}{1 - x^2}$



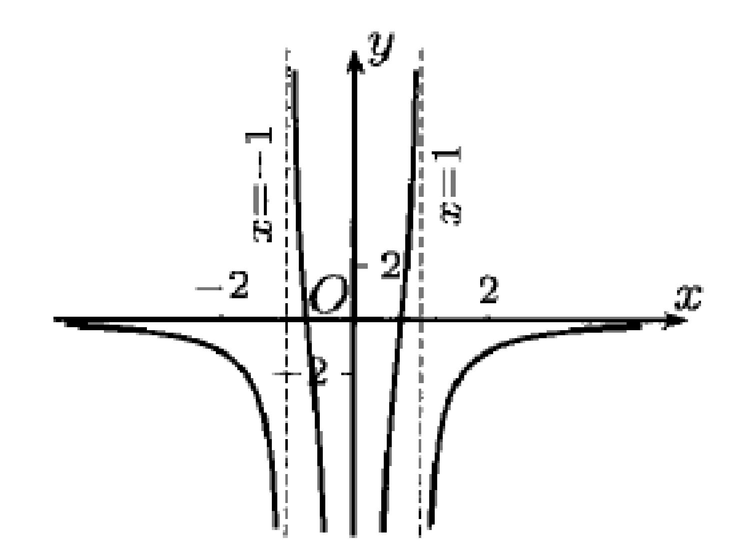
习题 259 :

$y = \frac{x}{1 - x^2}$



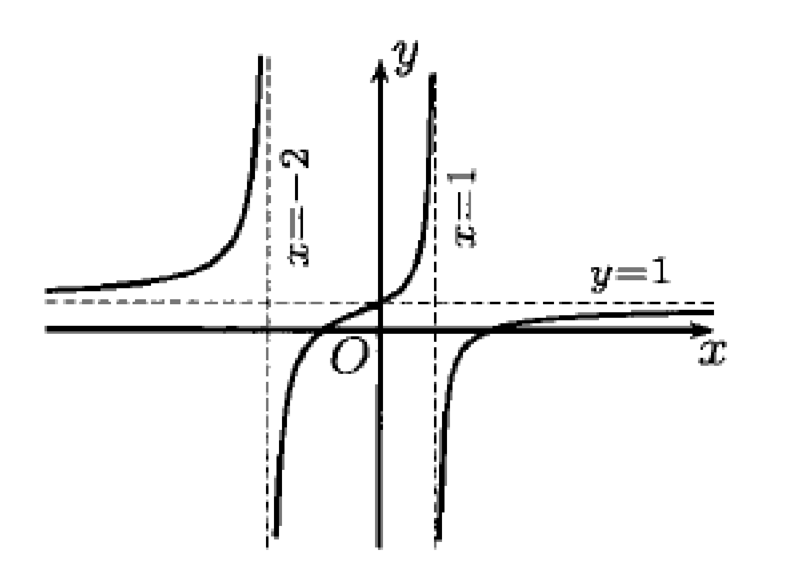
习题 260 :

$y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1 - x}$



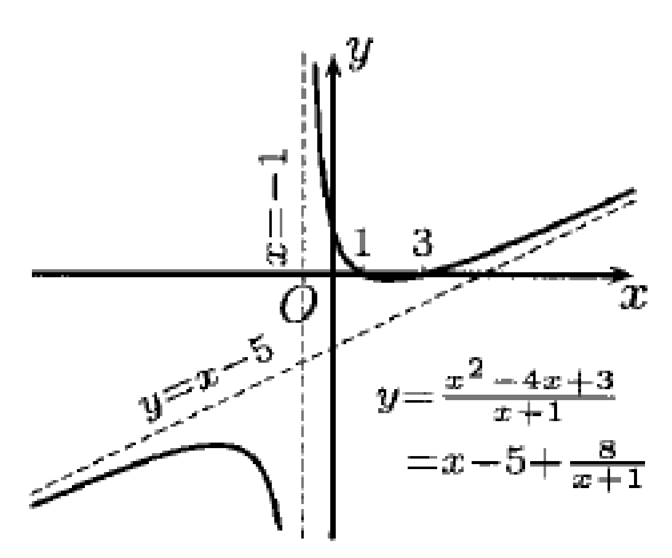
习题 261 :

$y = \frac{1}{1 + x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1 - x}$



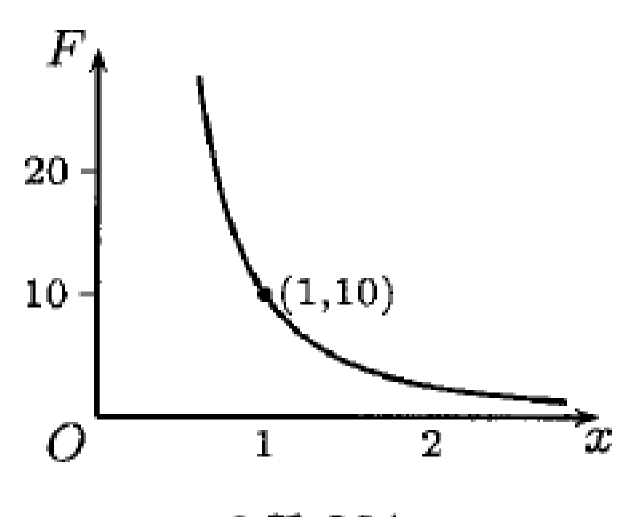
习题 262 :

$y = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 1)(x + 2)}$



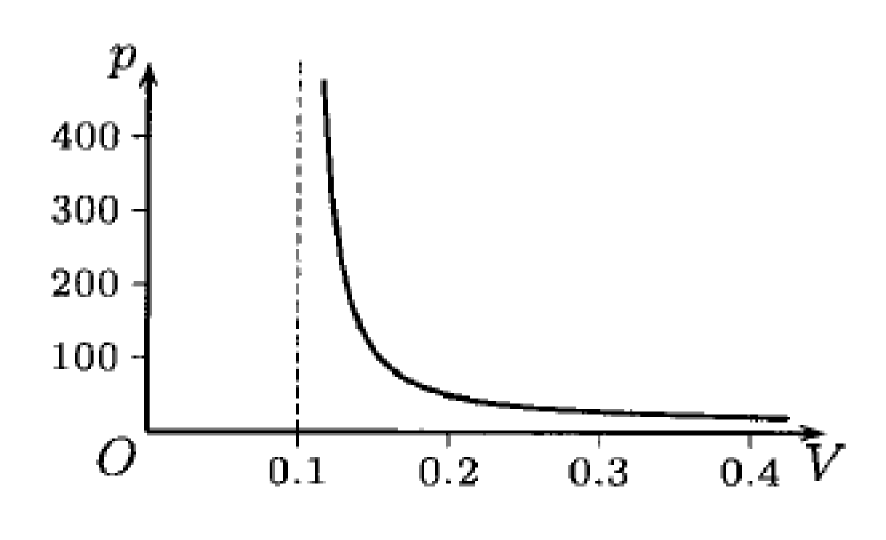
习题 263 :

$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$



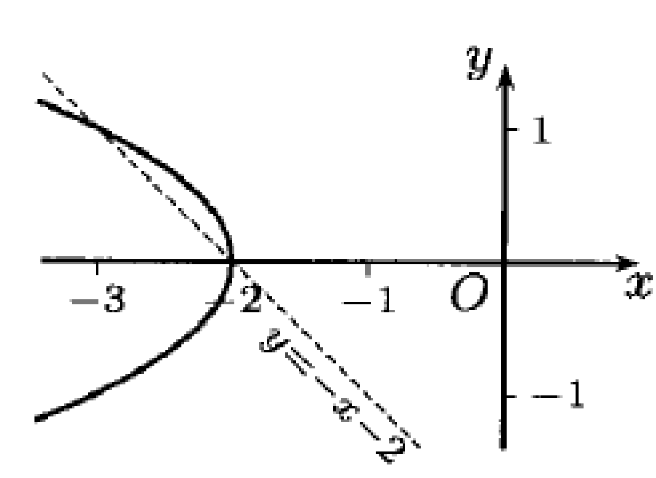
习题 264：

$$F=\frac{10}{x^2}$$



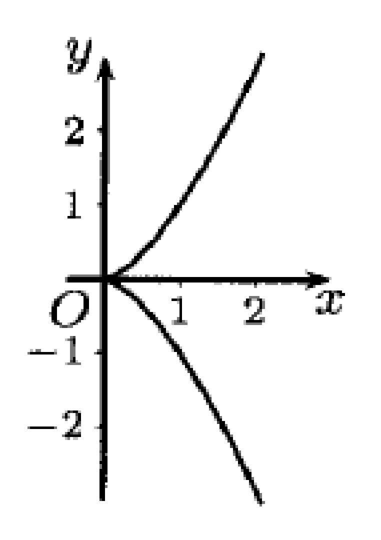
习题 265：

$$\left(p+\frac{2}{V^2}\right)(V-0.1)=10$$



习题 266：

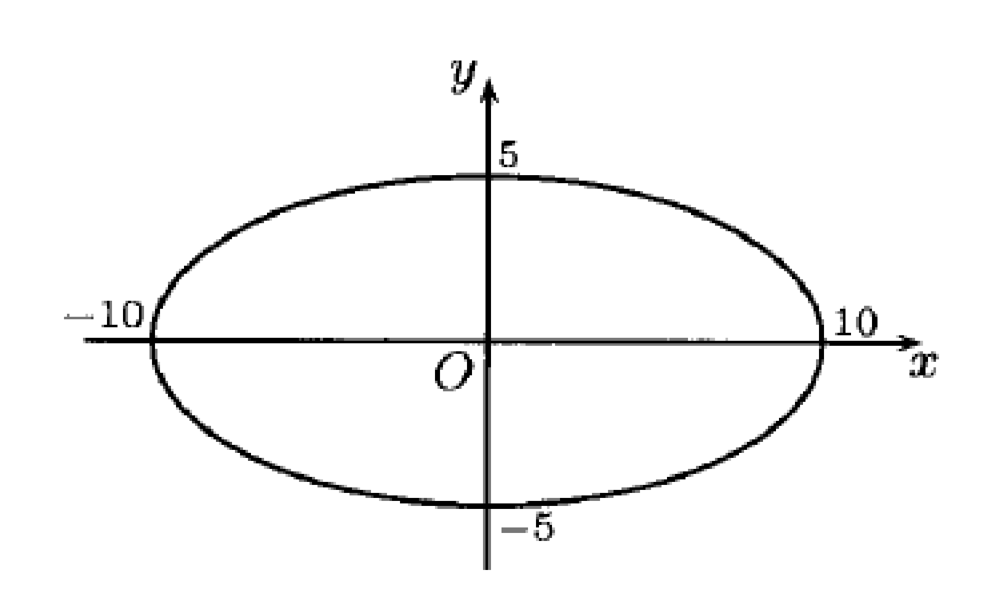
$y=\pm\sqrt{-x-2}$ (抛物线)



习题 267：

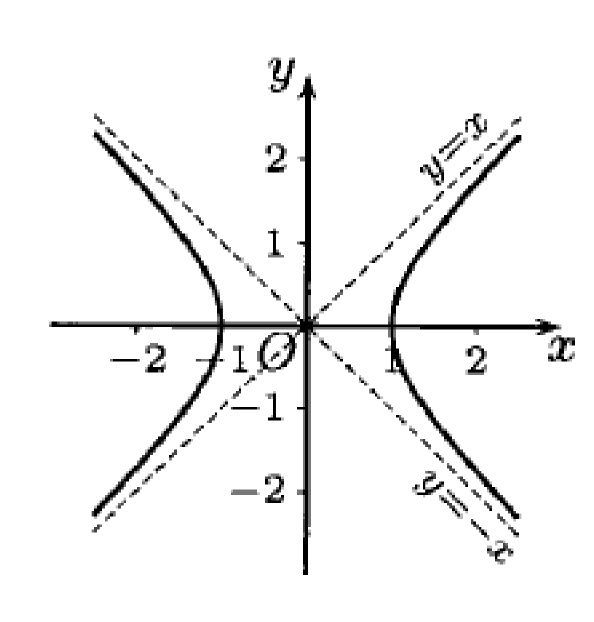
$y=\pm x\sqrt{x}$

(尼尔抛物线)



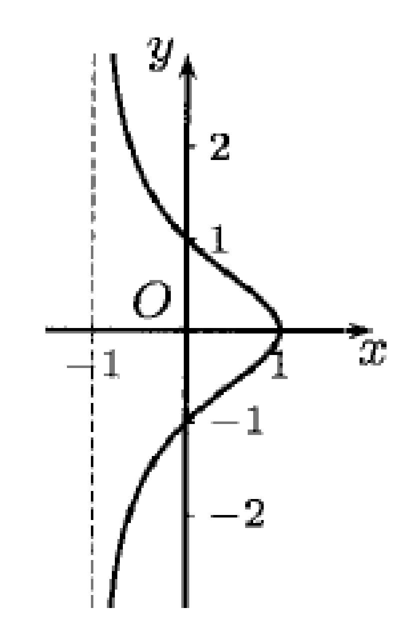
习题 268：

$y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (椭圆)



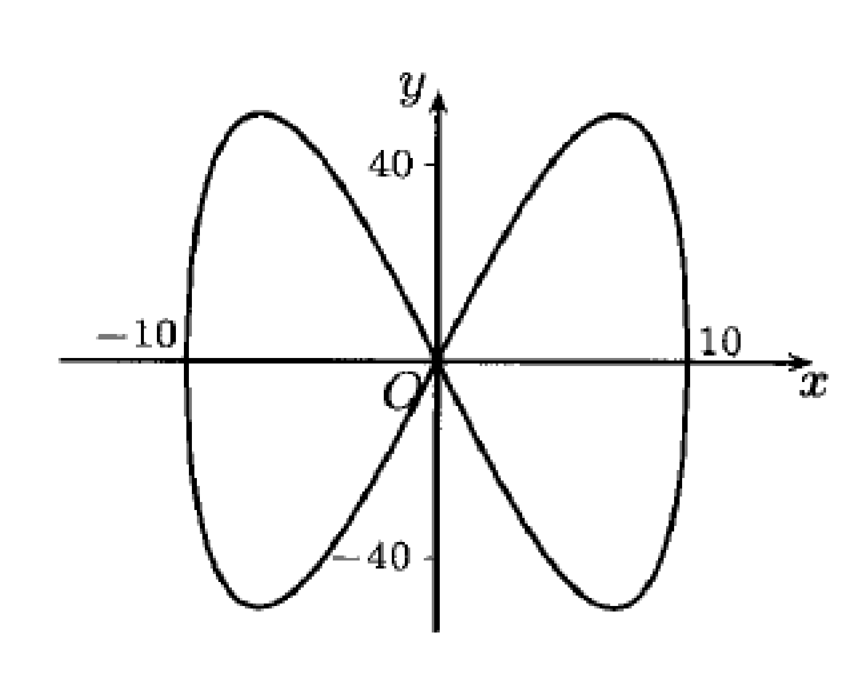
习题 269：

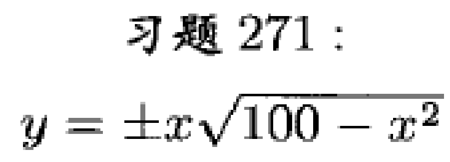
$y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (双曲线)



习题 270：

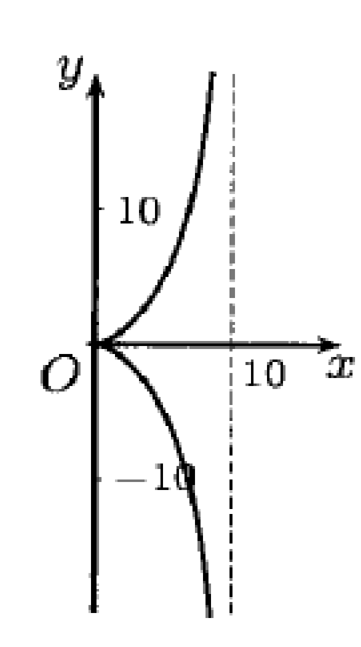
$$y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$





习题 271：

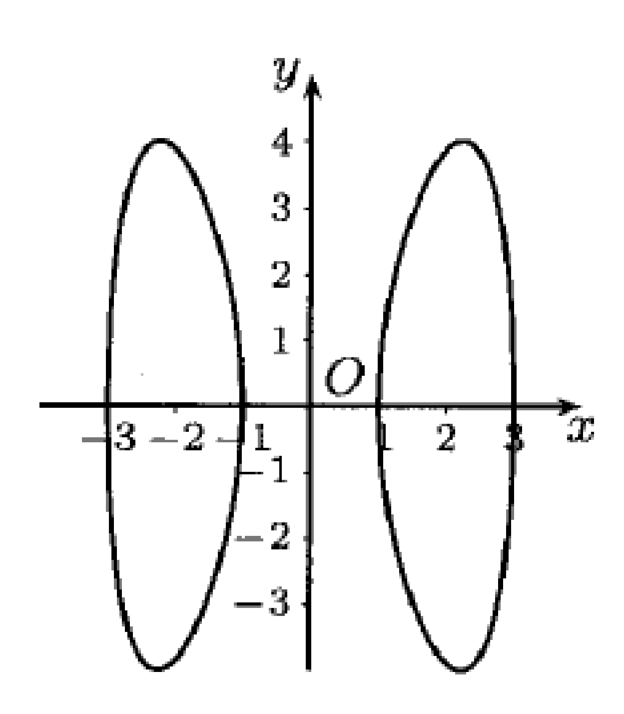
$y=\pm x\sqrt{100-x^2}$



习题 272：

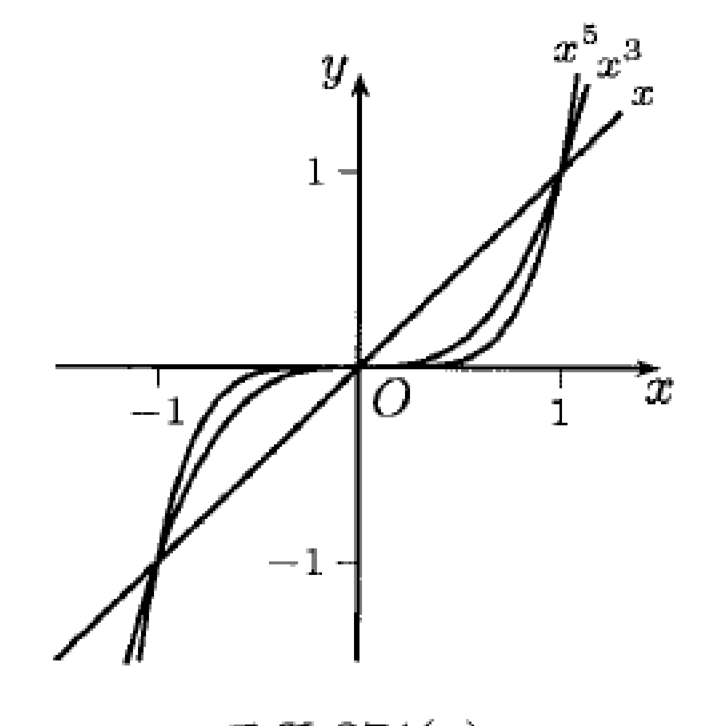
$$y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$$

(蔓叶线)



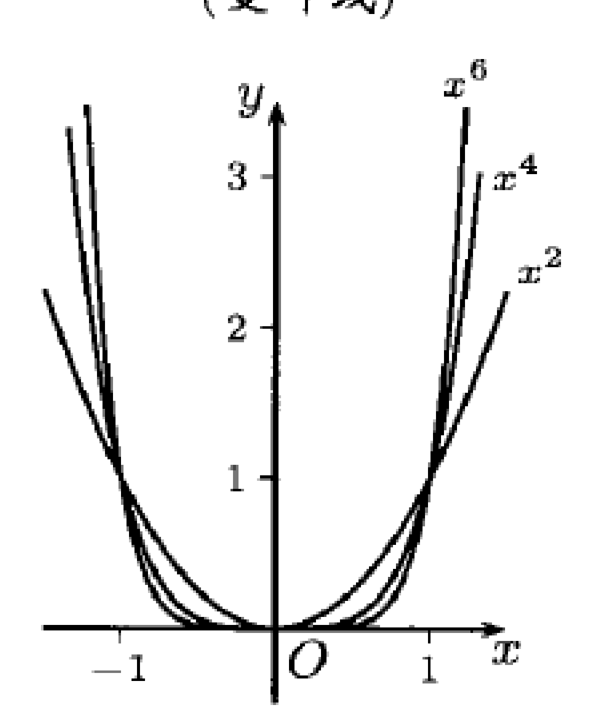
习题 273：

$y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$



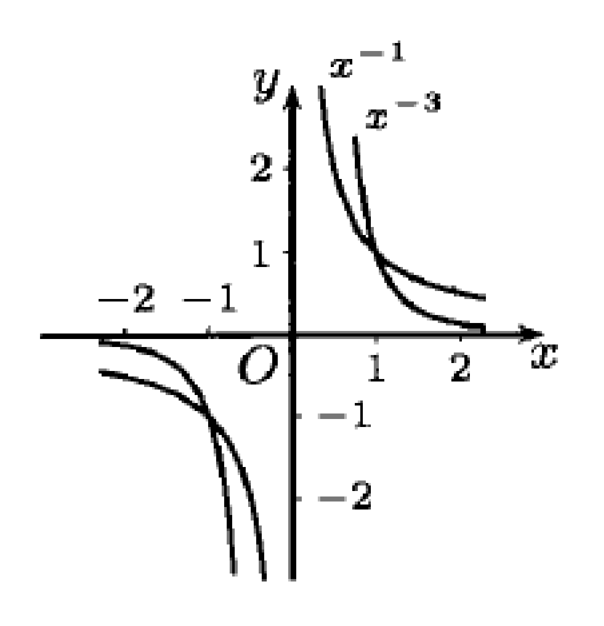
习题 274(a)：

$y=x^n,\ n=1,3,5$



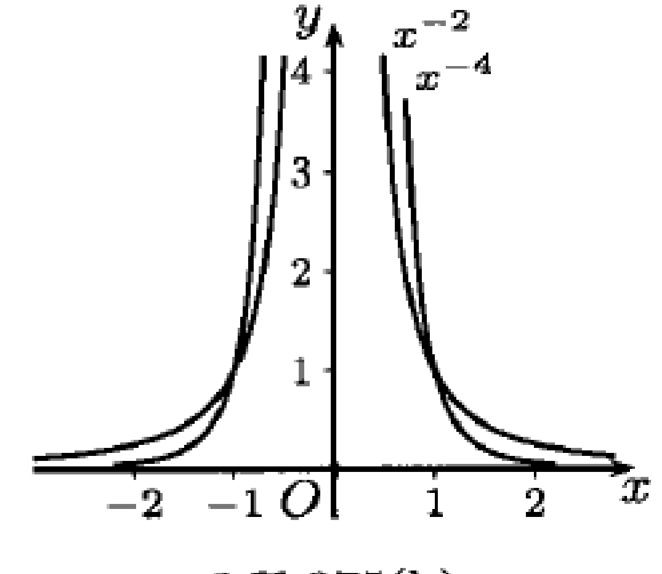
习题 274(b)：

$y=x^n,\ n=2,4,6$



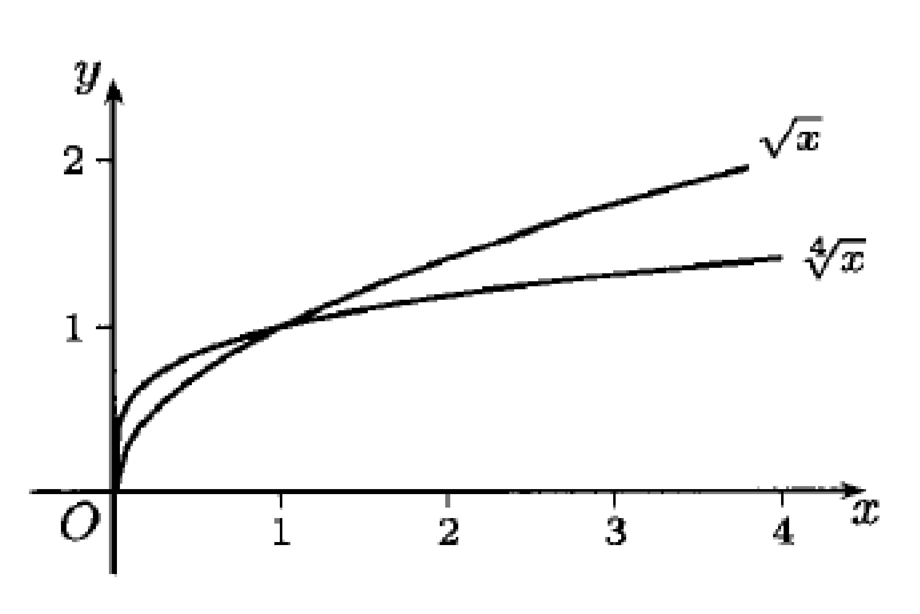
习题 275(a) :

$y = x^n,\ n = -1, -3$



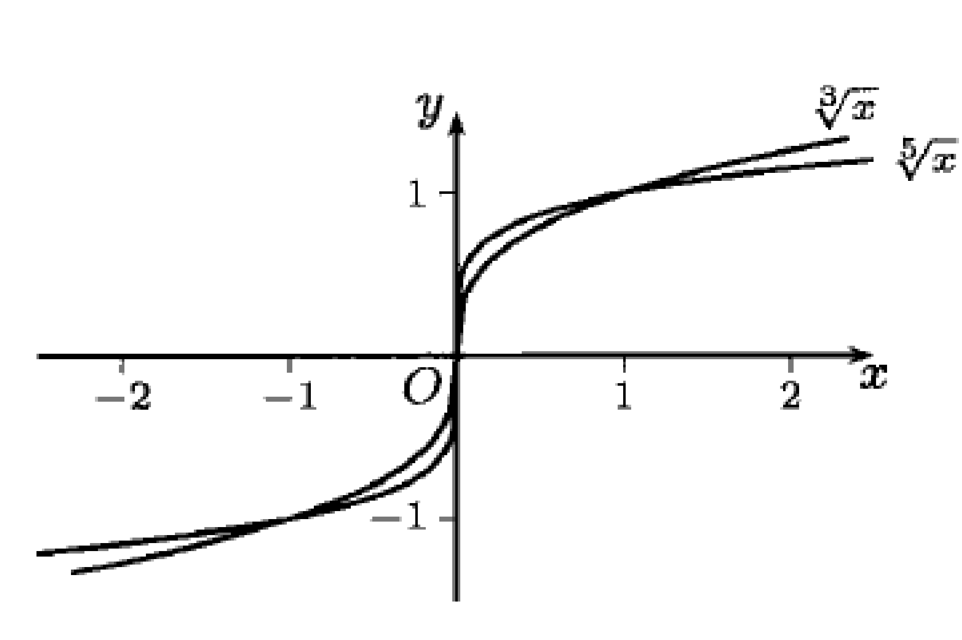
习题 275(b) :

$y = x^n,\ n = -2, -4$



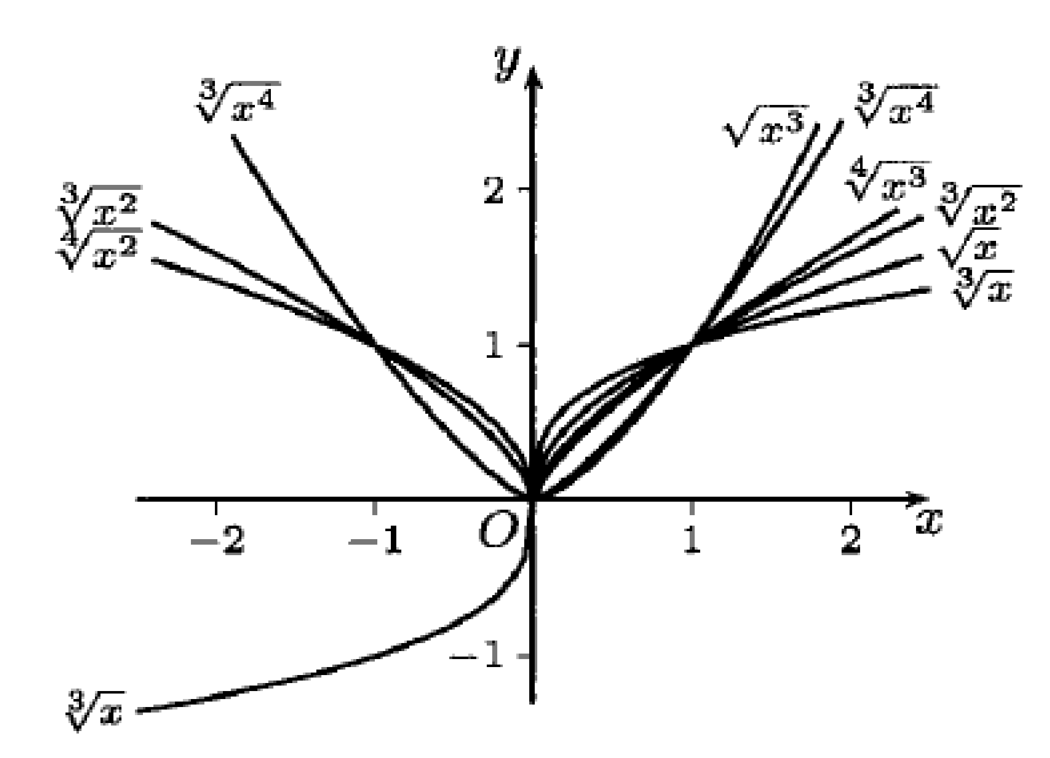
习题 276(a) :

$y = \sqrt[m]{x},\ m = 2, 4$



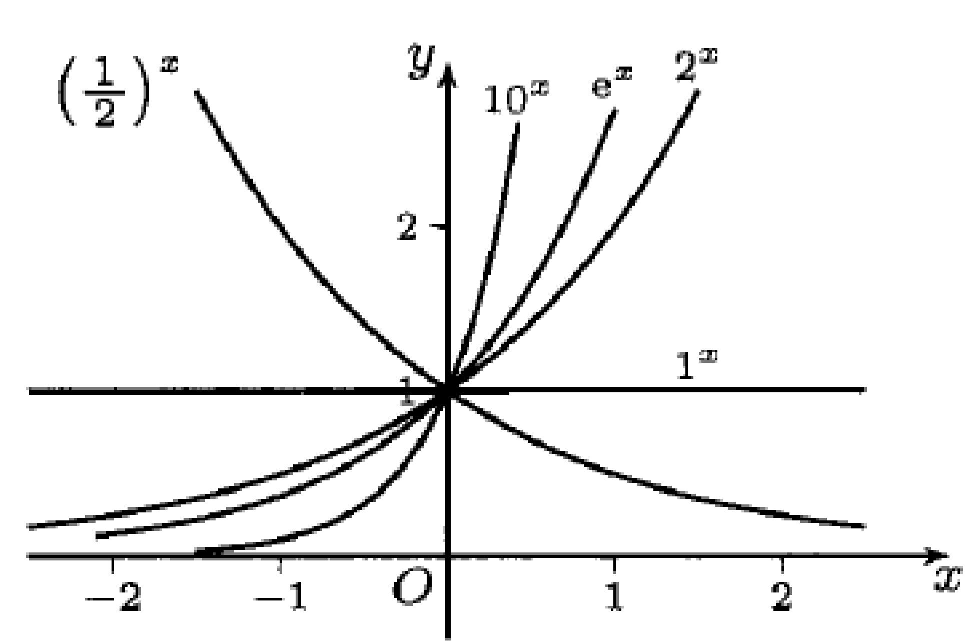
习题 276(b) :

$y = \sqrt[m]{x},\ m = 3, 5$

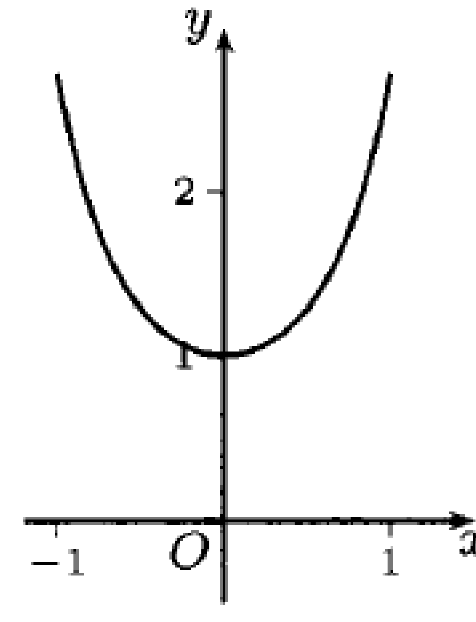


习题 277 : $y = \sqrt[m]{x^k},\ (m, k) =$

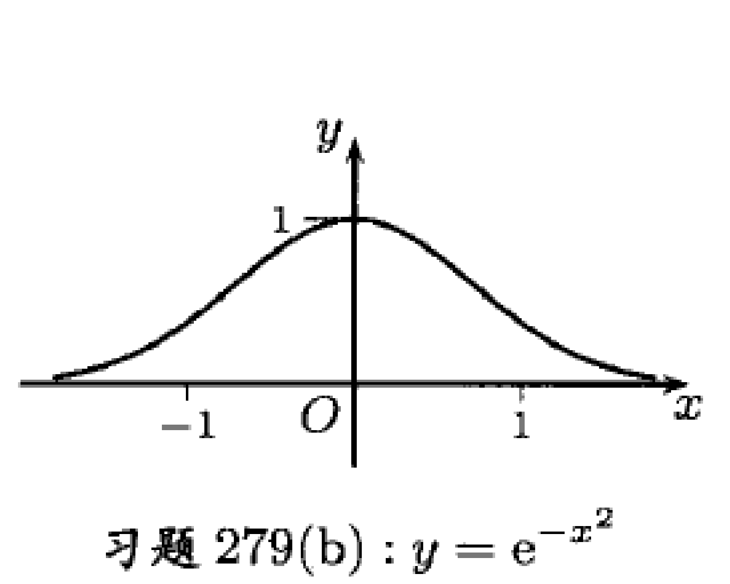
$(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 3)$



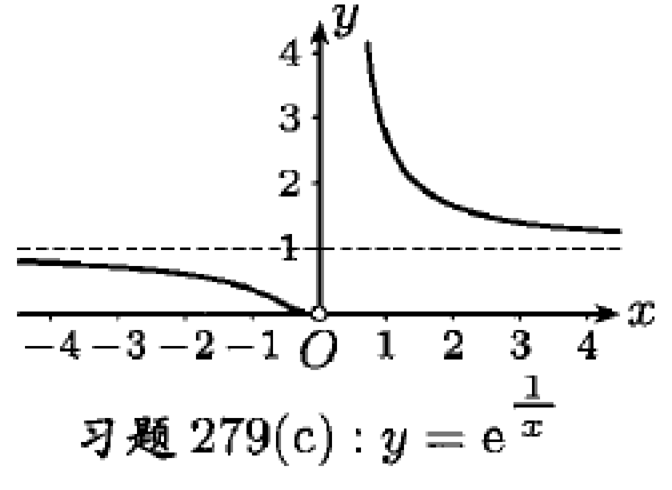
习题 278 : $y = a^x,\ a = \dfrac{1}{2}, 1, 2, \mathrm{e}, 10$

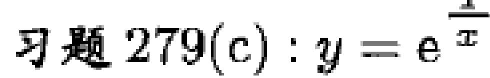


习题 279(a) : $y = \mathrm{e}^{x^2}$

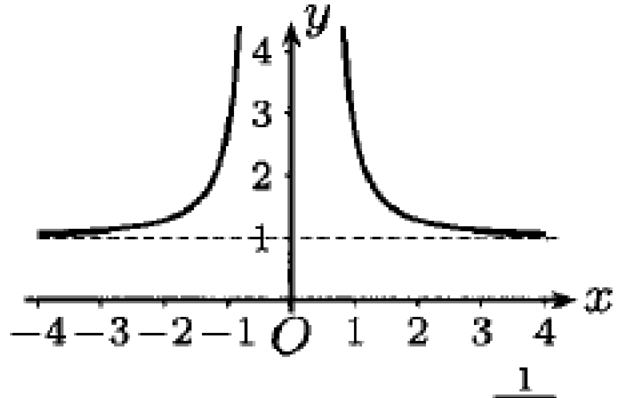


习题 279(b) : $y = \mathrm{e}^{-x^2}$

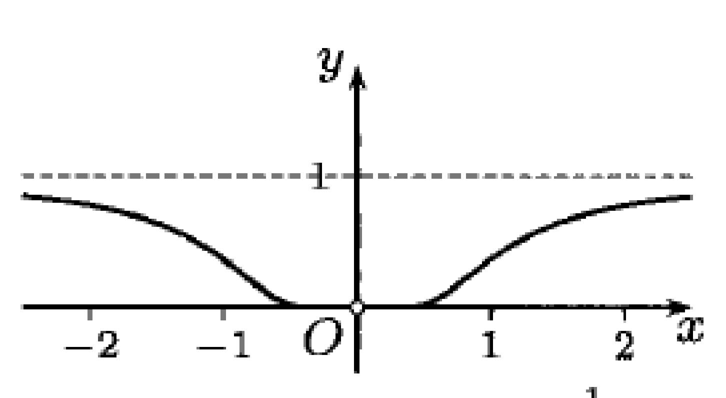




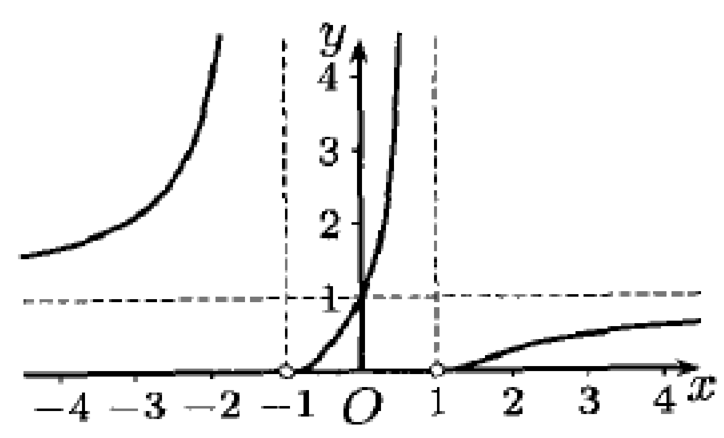
习题 279(c) : $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$



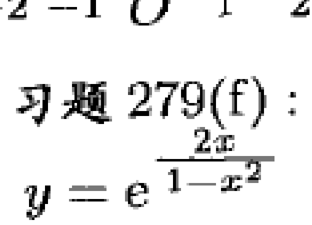
习题 279(d) : $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$



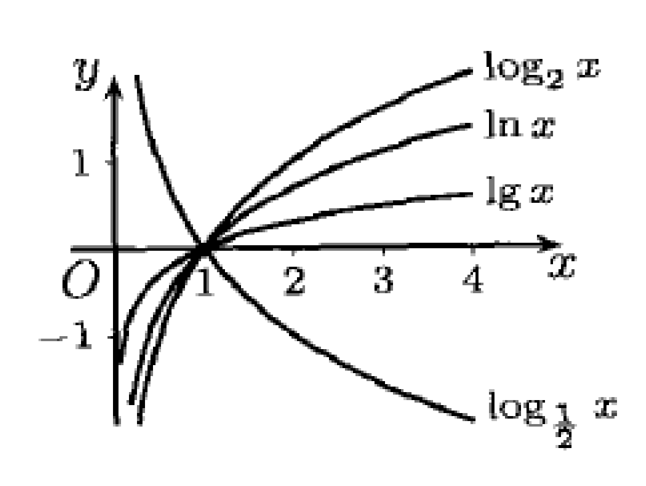
习题 279(e) : $y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$



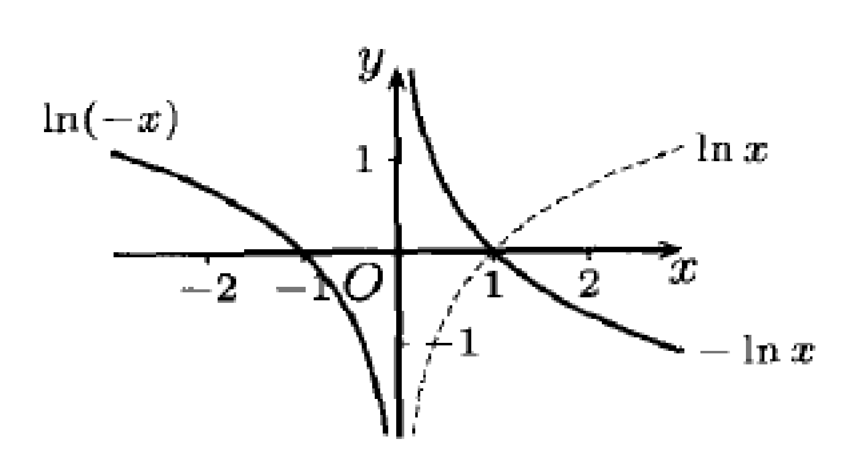
习题 279(f)：



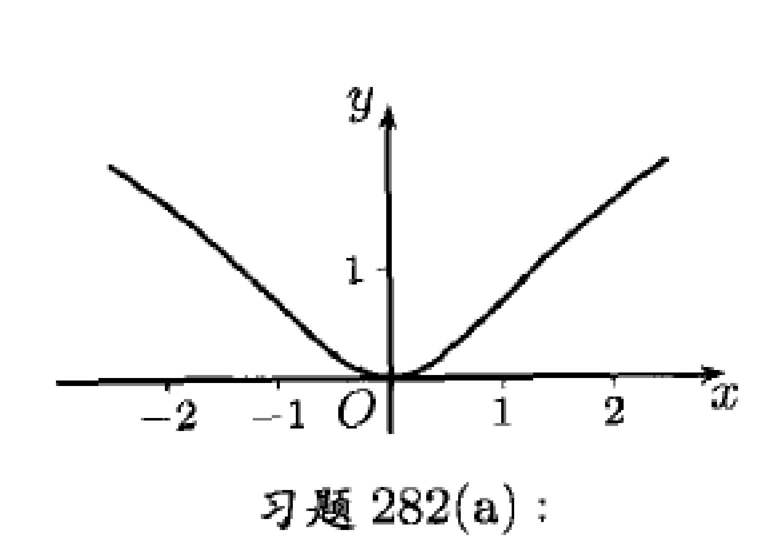
$y = \mathrm{e}^{\frac{2x}{1-x^2}}$



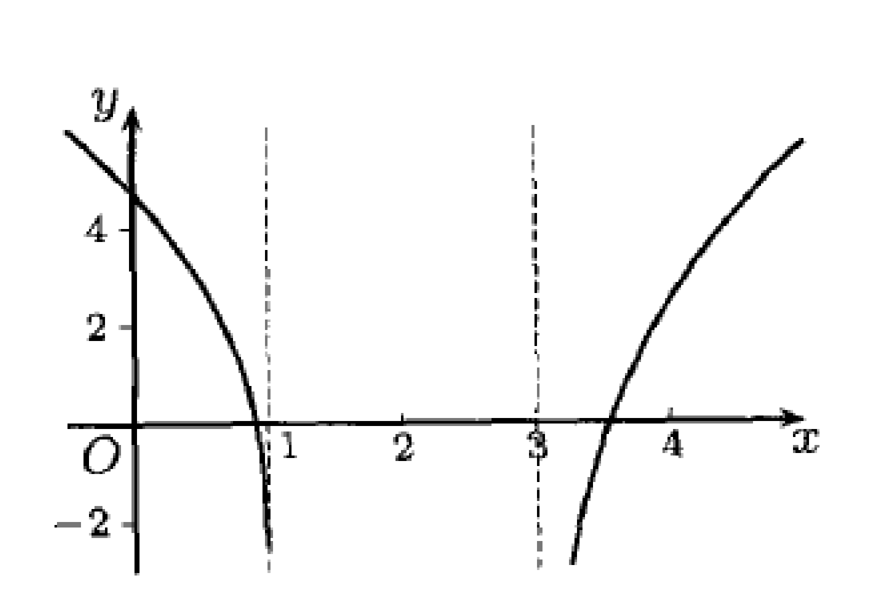
习题 280：$y = \log_a x$，
$a = \frac{1}{2}, 2, \mathrm{e}, 10$



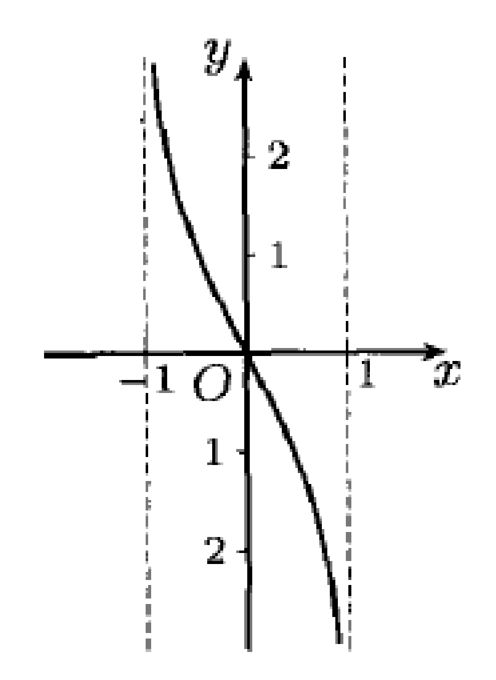
习题 281：(a) $y = \ln(-x)$，
(b) $y = -\ln x$



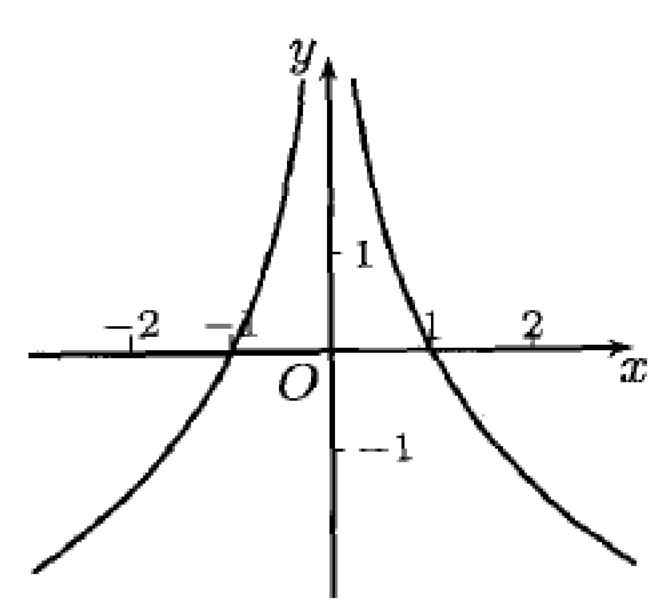
习题 282(a)：
$y = \ln(1 + x^2)$



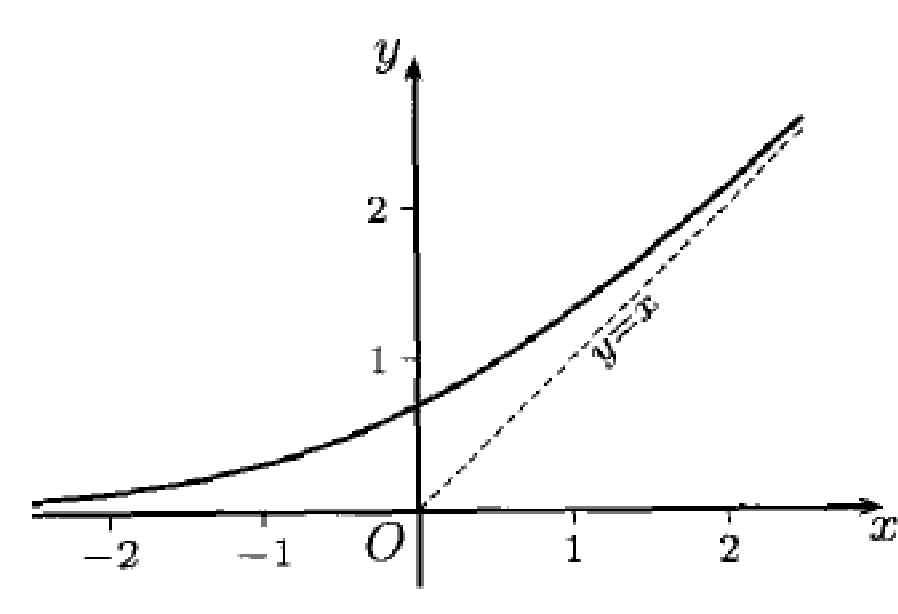
习题 282(b)：
$y = \ln[(x-1)(x-2)^2(x-3)^3]$



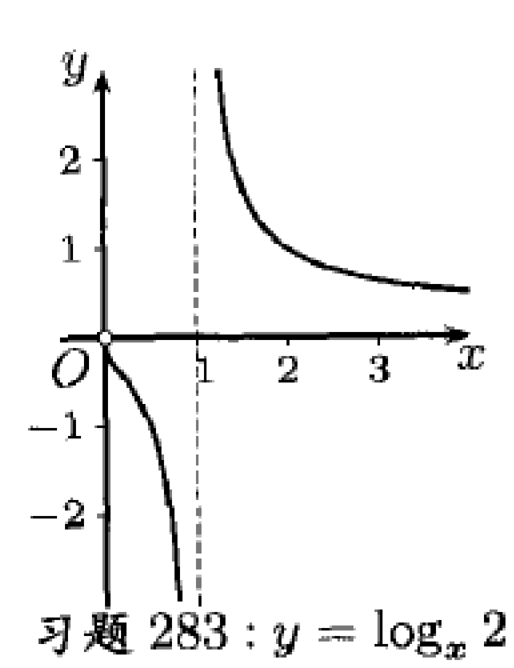
习题 282(c)：
$y = \ln\frac{1-x}{1+x}$



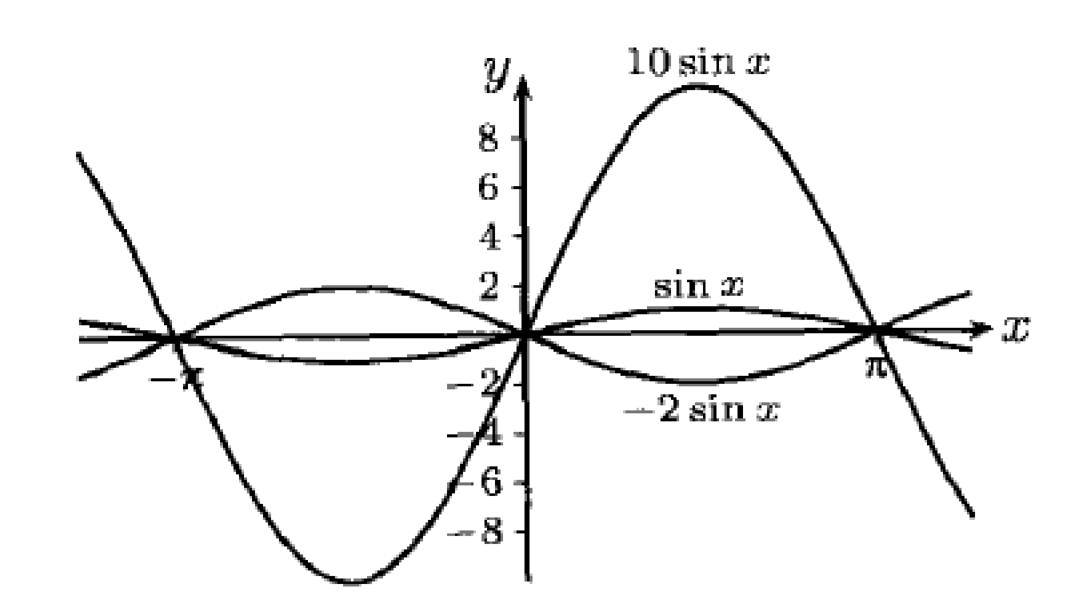
习题 282(d)：$y = \ln\frac{1}{x^2}$



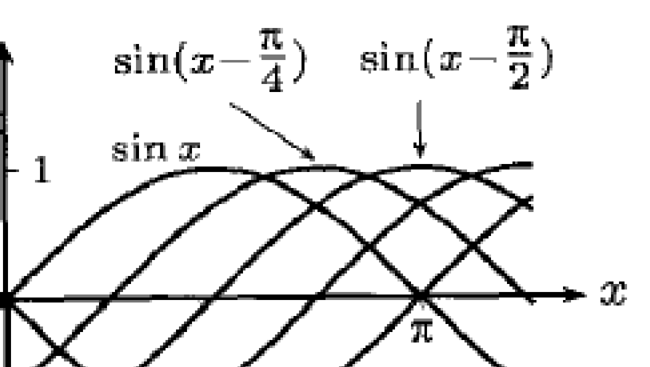
习题 282(e)：$y = \ln(1 + \mathrm{e}^x)$

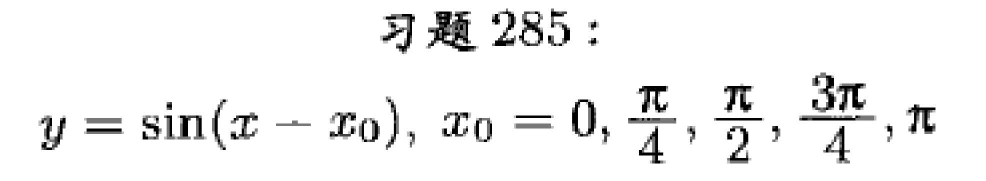


习题 283：$y = \log_x 2$

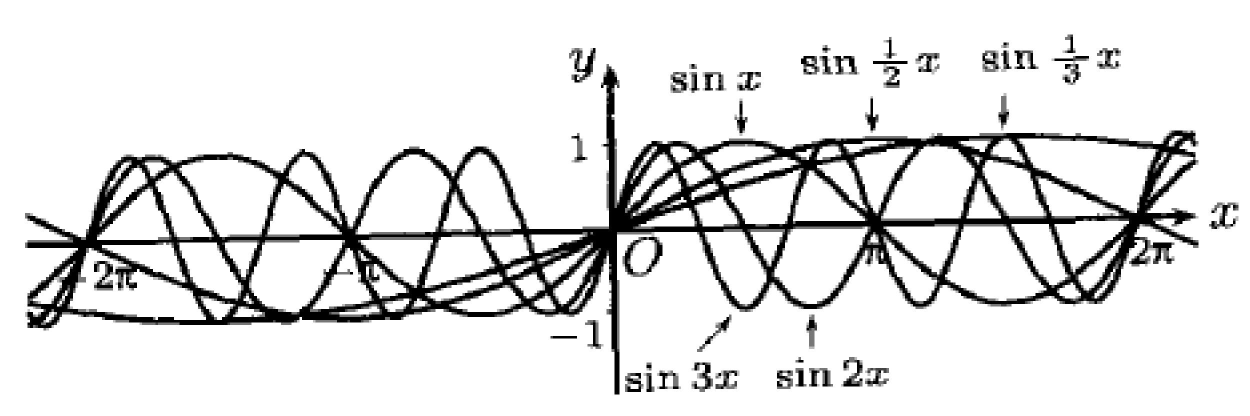


习题 284：
$y = A\sin x,\ A = 1, 10, -2$

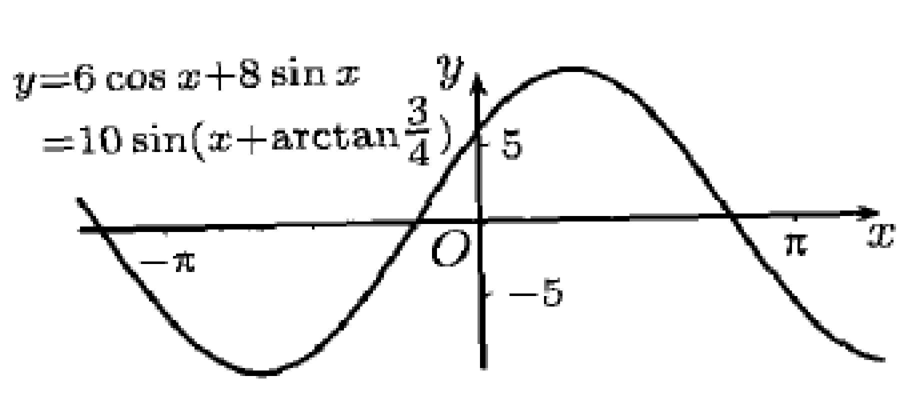




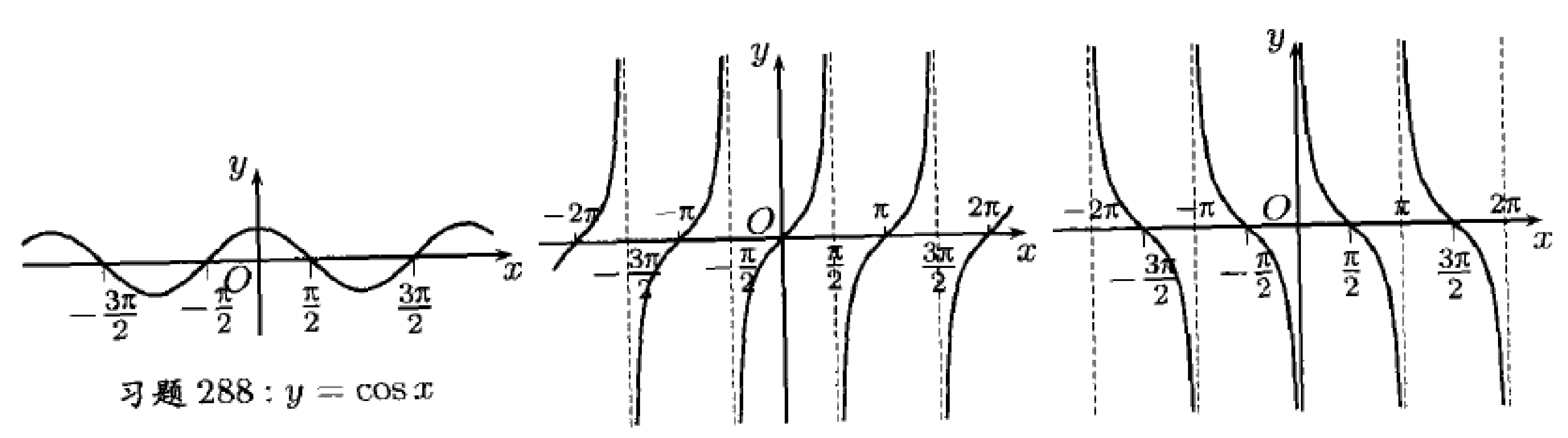
习题 285：
$y = \sin(x - x_0),\ x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$



习题 286 : $y = \sin nx,\ n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$



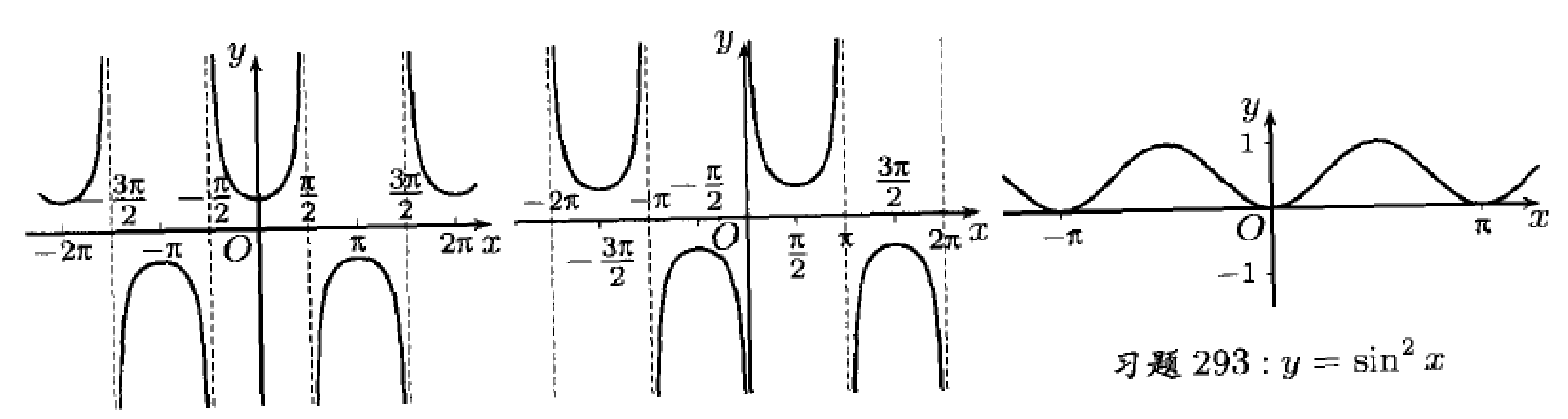
习题 287 : $y = 6\cos x + 8\sin x$



习题 288 : $y = \cos x$

习题 289 : $y = \tan x$

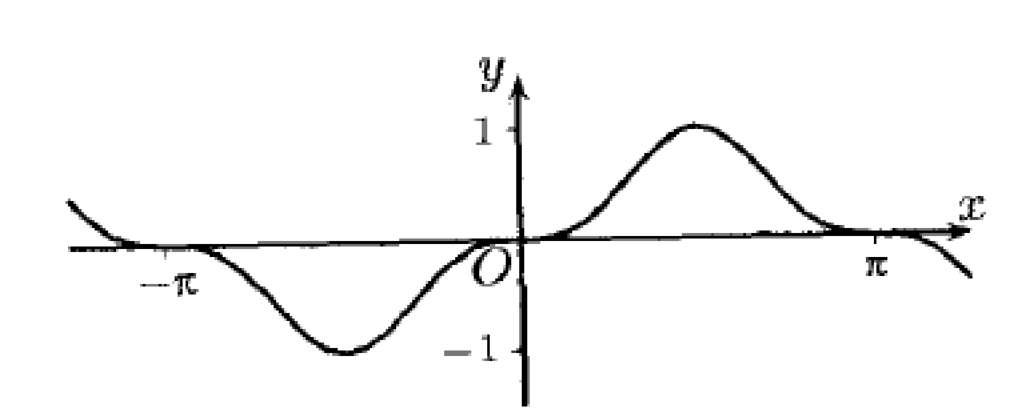
习题 290 : $y = \cot x$



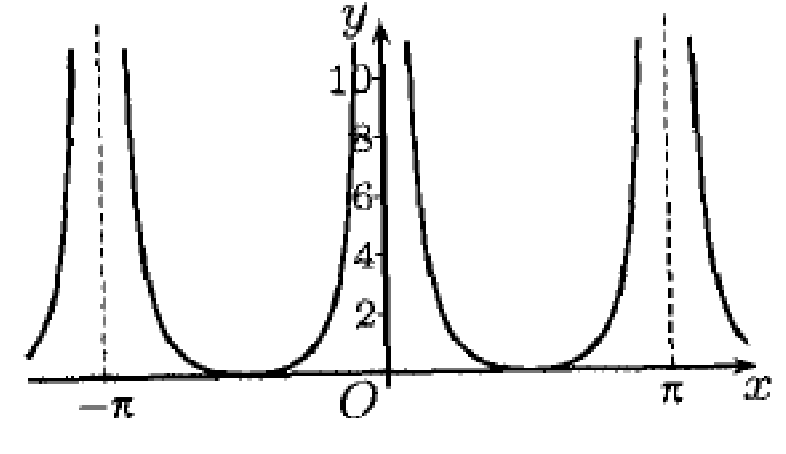
习题 291 : $y = \sec x$

习题 292 : $y = \csc x$

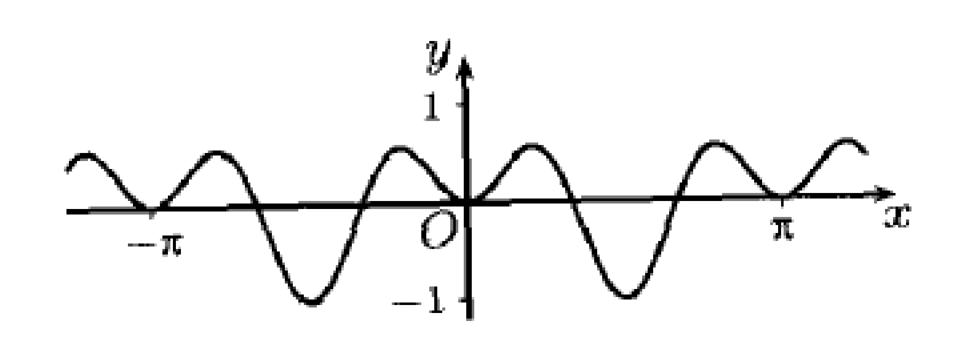
习题 293 : $y = \sin^2 x$



习题 294 : $y = \sin^3 x$

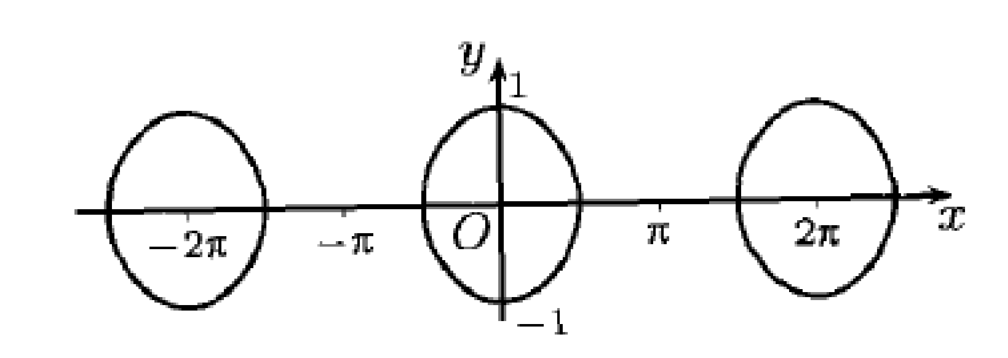


习题 295 : $y = \cot^2 x$



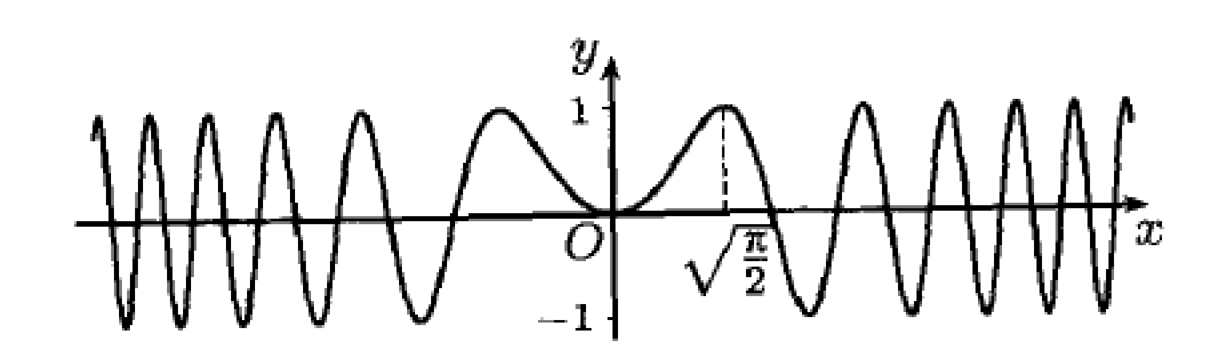
习题 296 :

$y = \sin x \cdot \sin 3x$

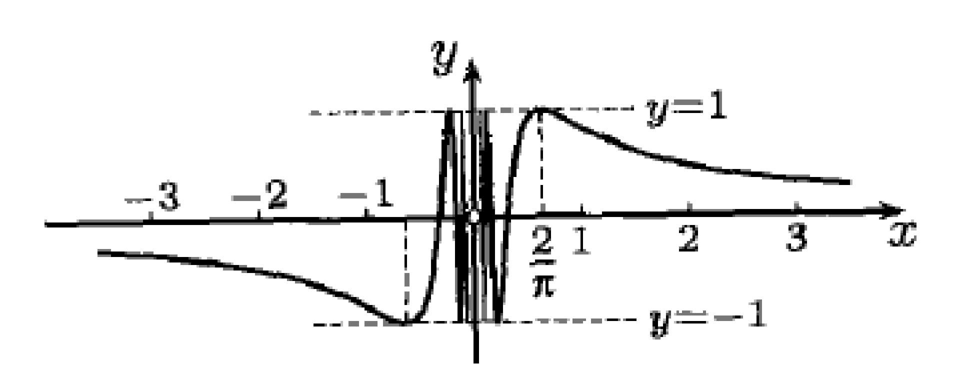


习题 297 :

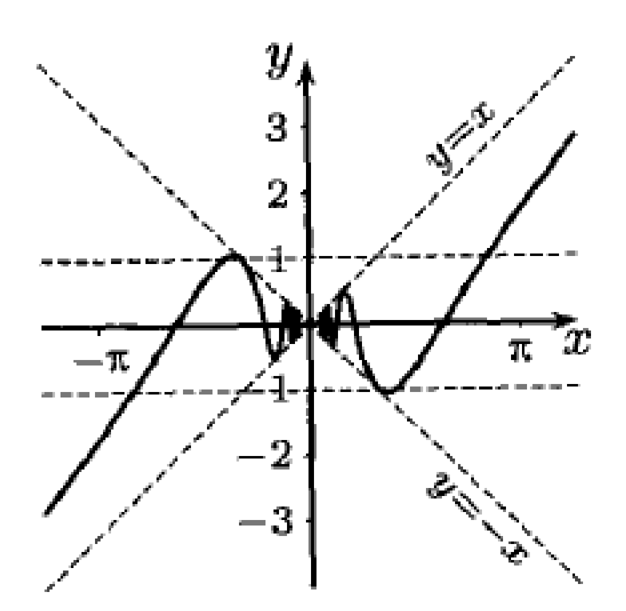
$y = \pm\sqrt{\cos x}$



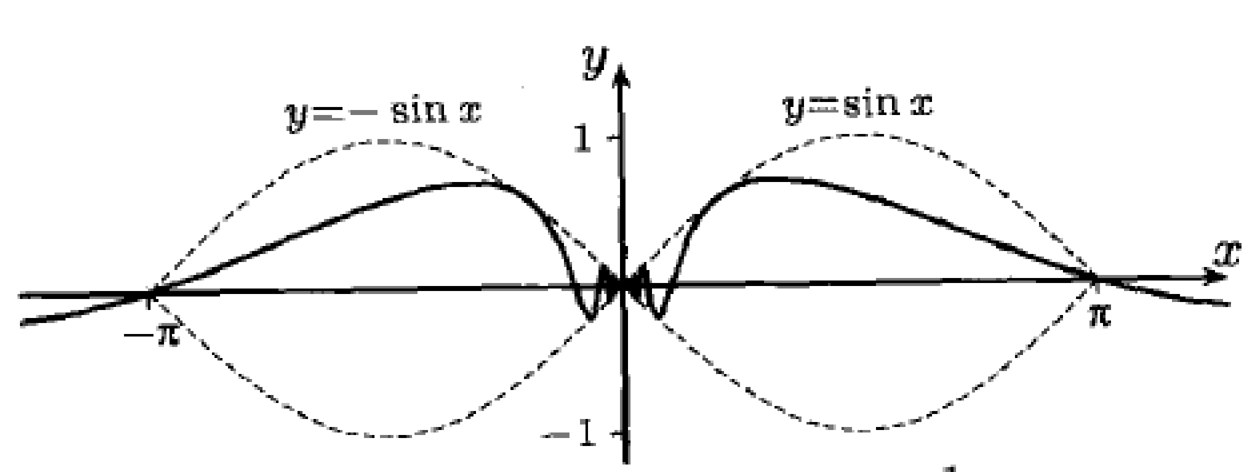
习题 298 : $y = \sin x^2$



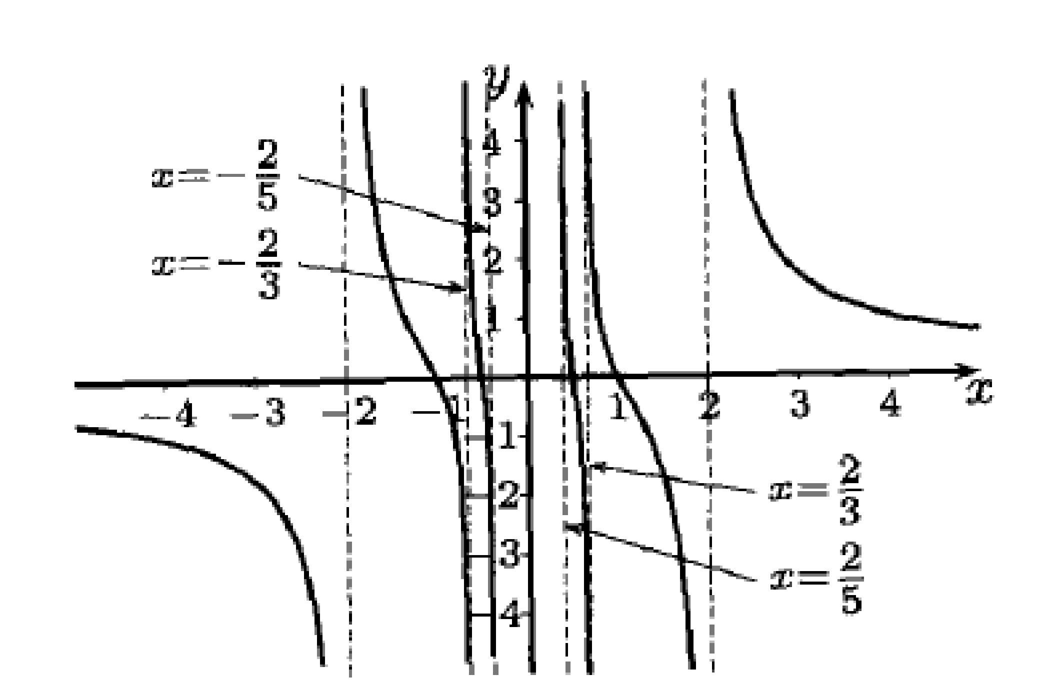
习题 299 : $y = \sin\dfrac{1}{x}$



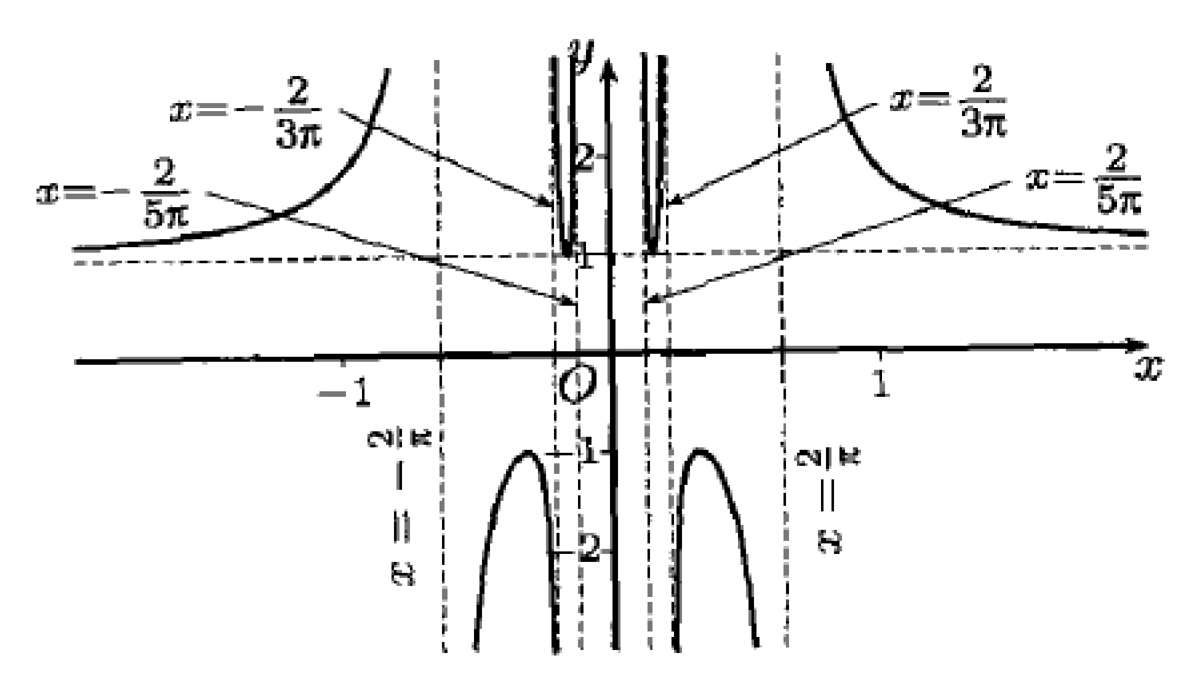
习题 300(a) : $y = x\cos\dfrac{\pi}{x}$



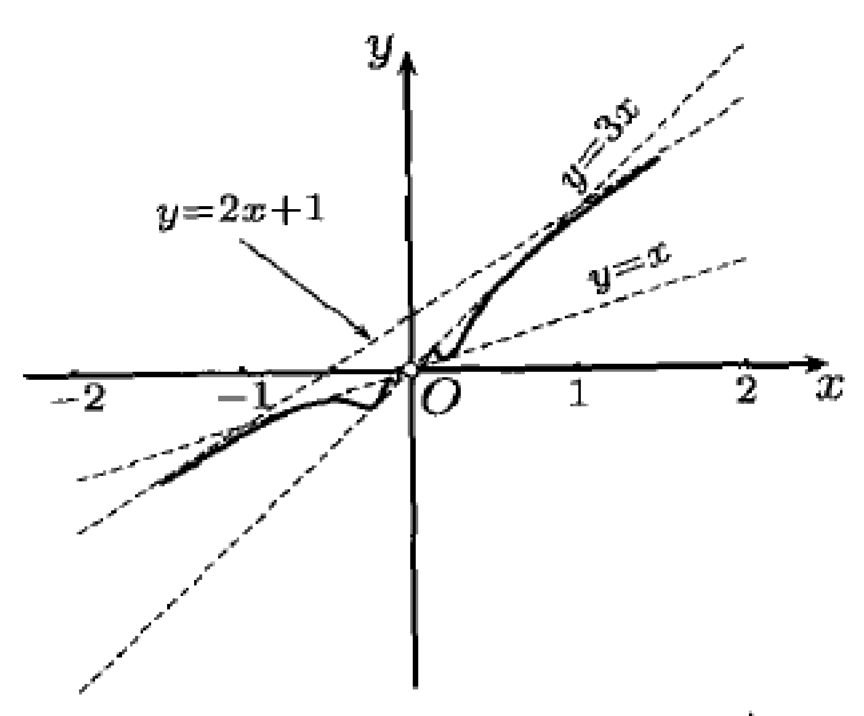
习题 300(b) : $y = \sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$



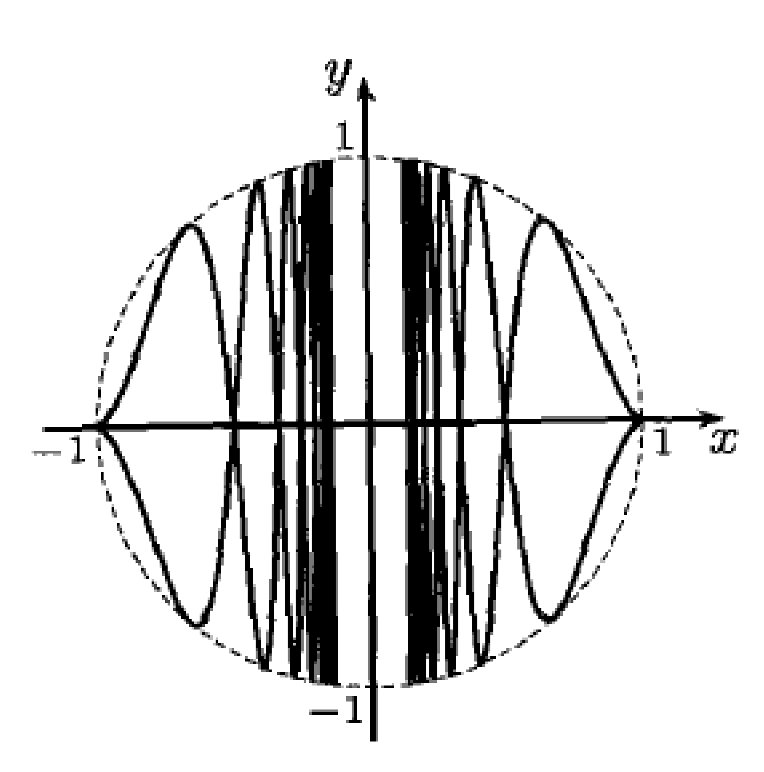
习题 301(a) : $y = \tan\dfrac{\pi}{x}$



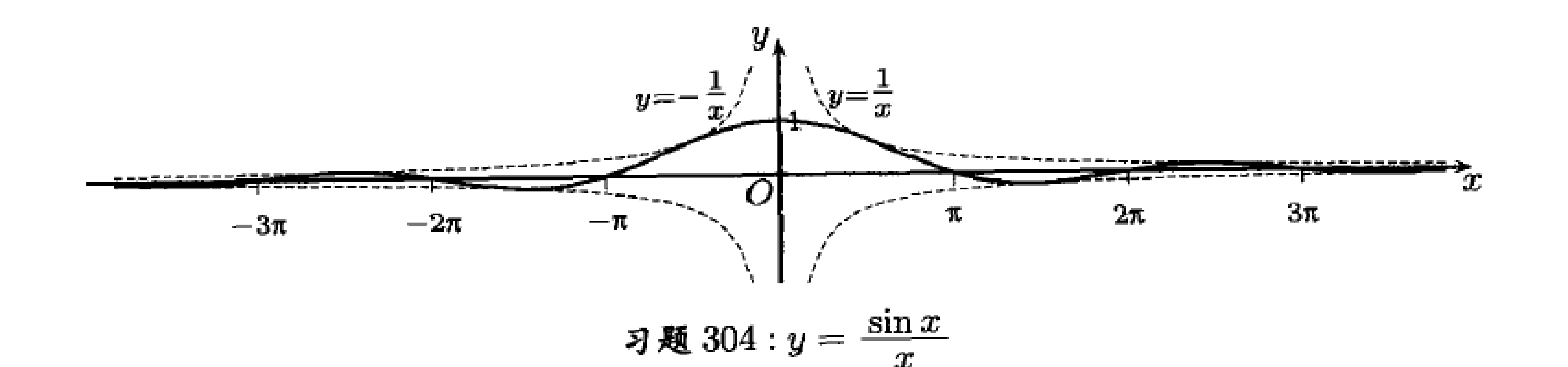
习题 301(b) : $y = \sec\dfrac{1}{x}$



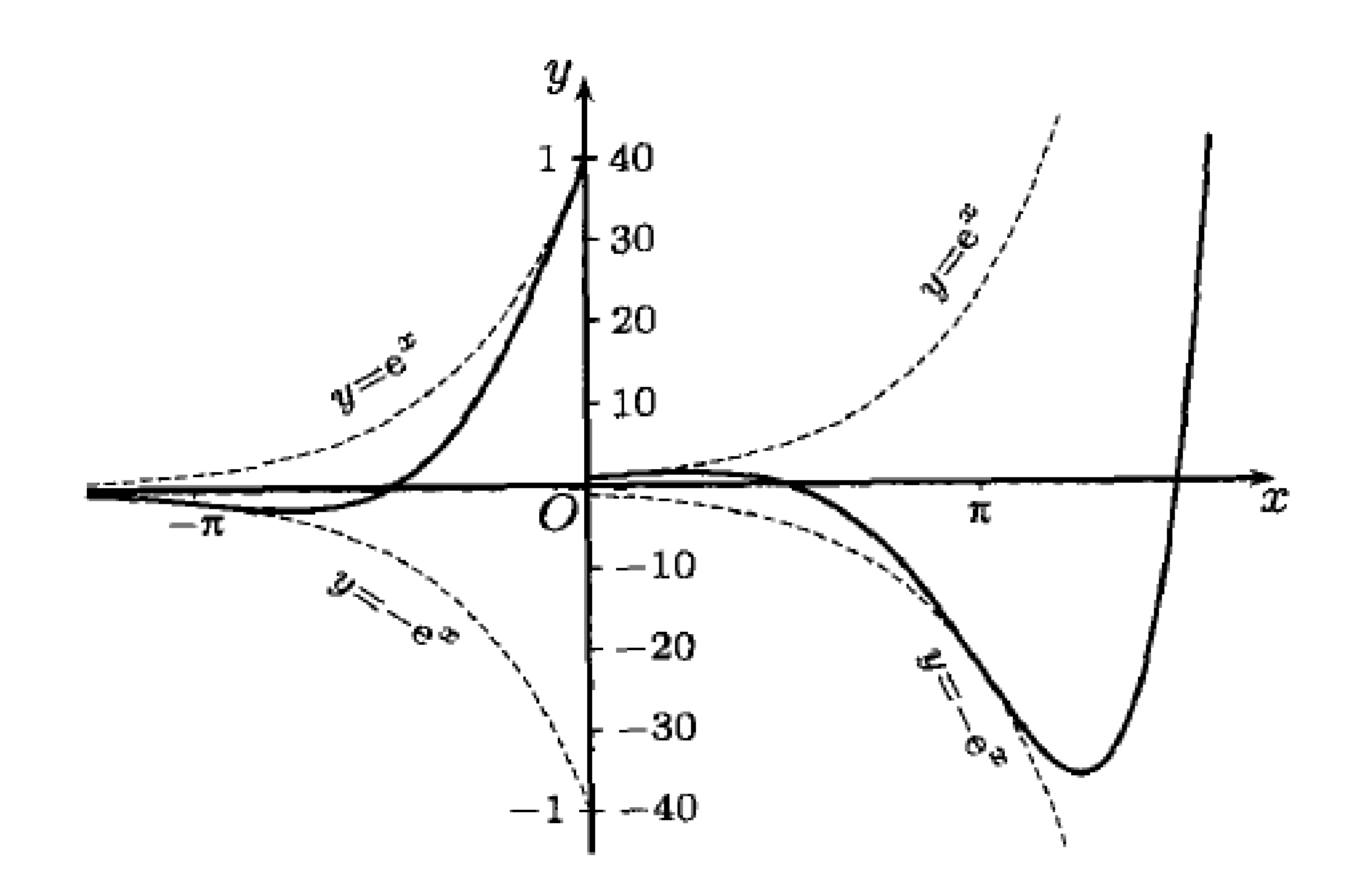
习题 302 : $y = x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$



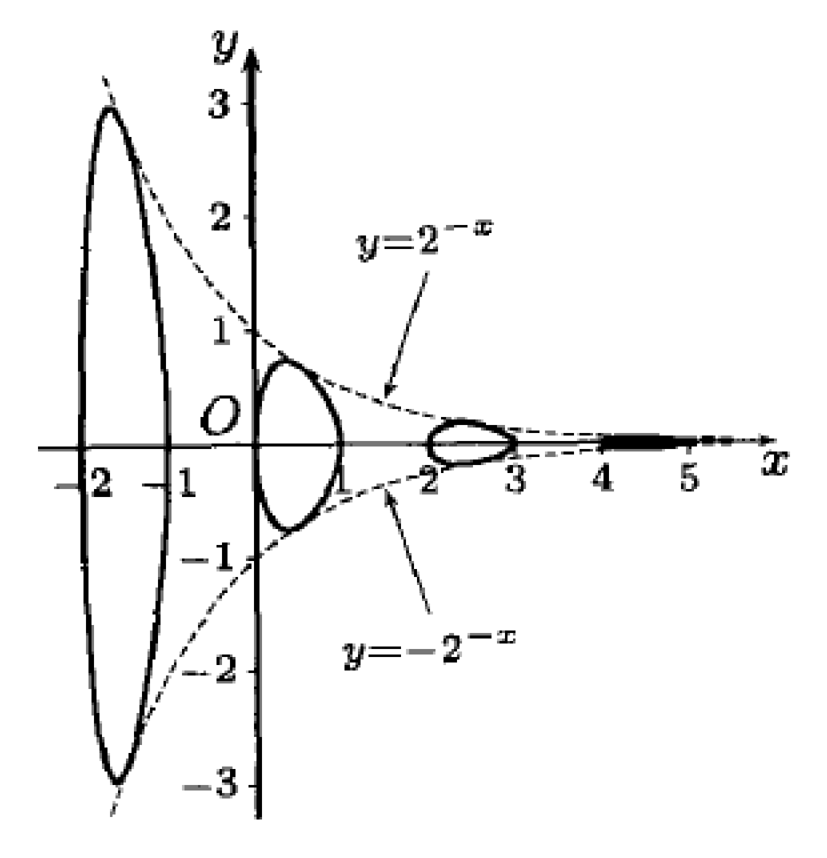
习题 303 : $y = \pm\sqrt{1-x^2}\sin\dfrac{\pi}{x}$

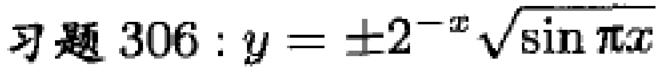


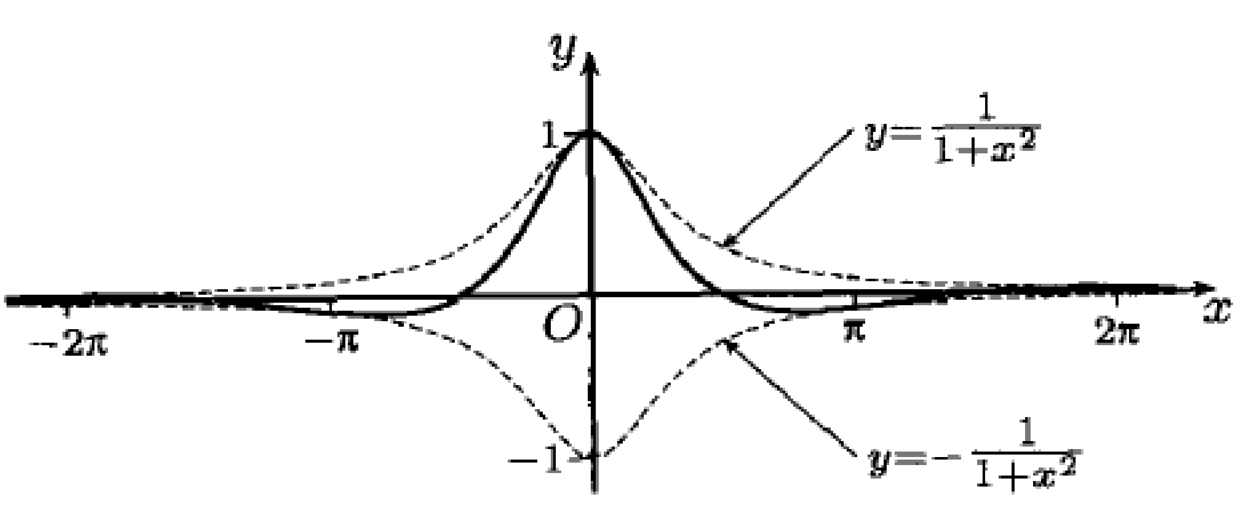
习题 304 : $y=\dfrac{\sin x}{x}$

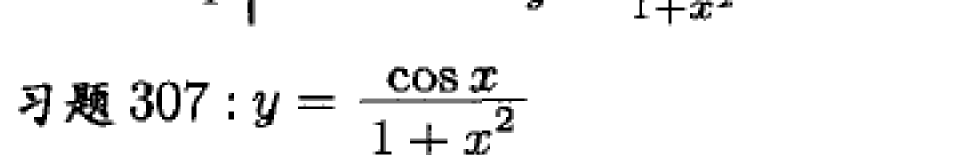


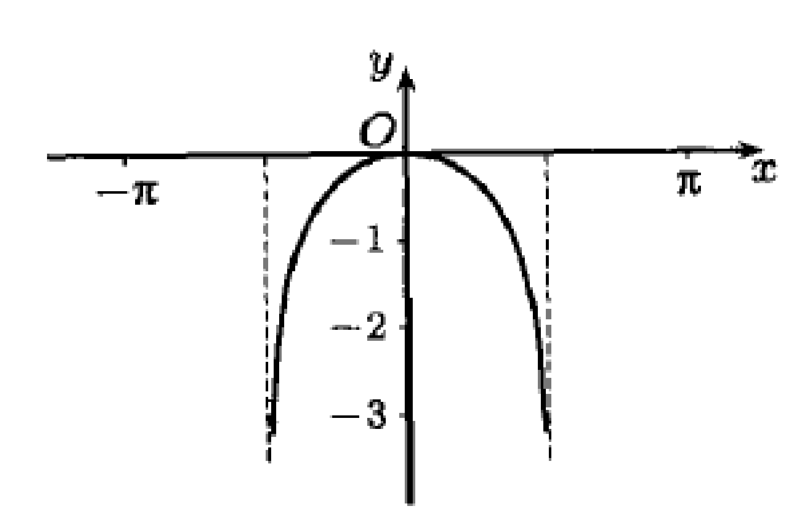
习题 305 : $y=\mathrm{e}^x\cos x$



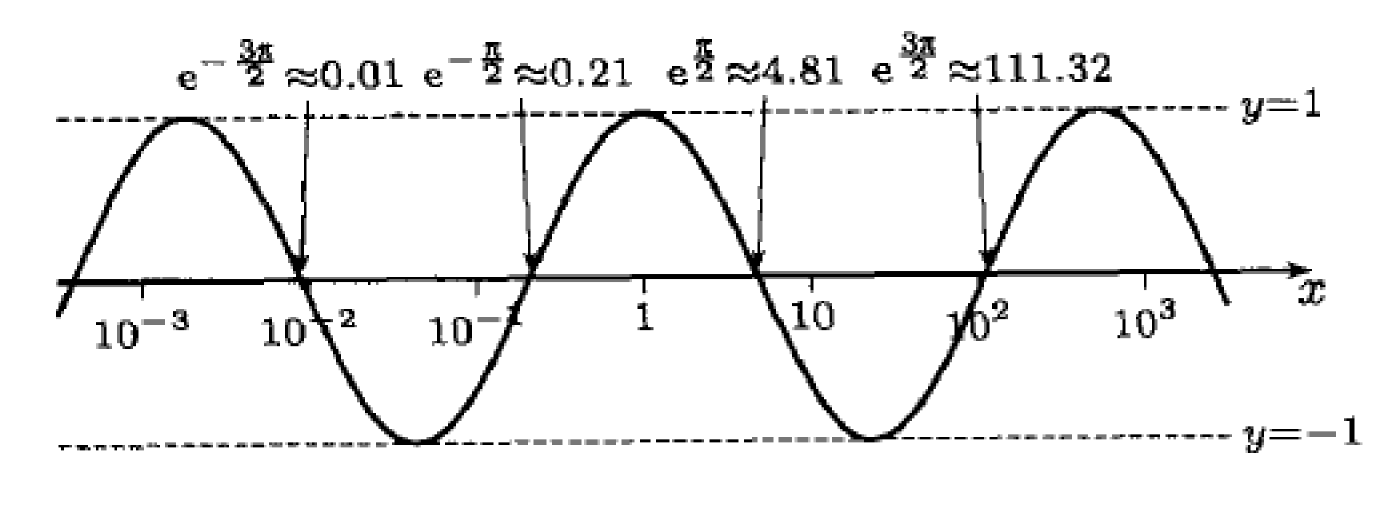

习题 306 : $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin \pi x}$



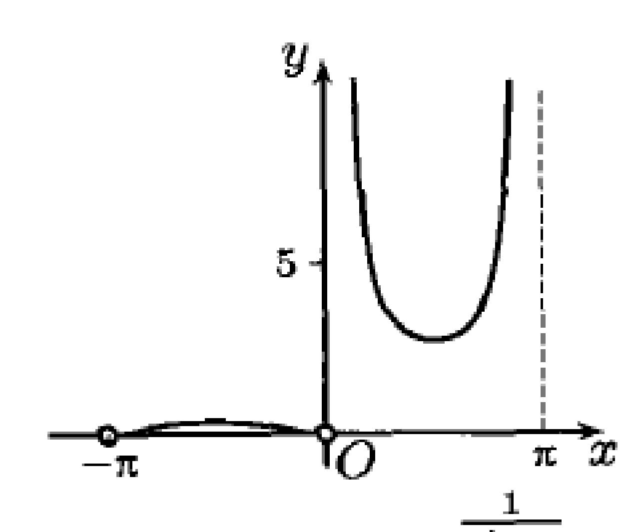

习题 307 : $y=\dfrac{\cos x}{1+x^2}$



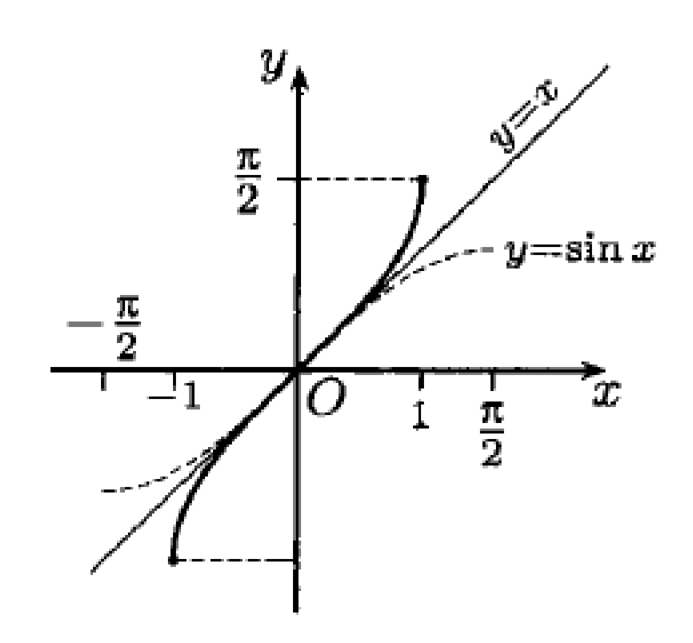
习题 308 : $y=\ln(\cos x)$

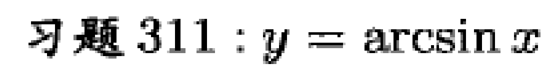


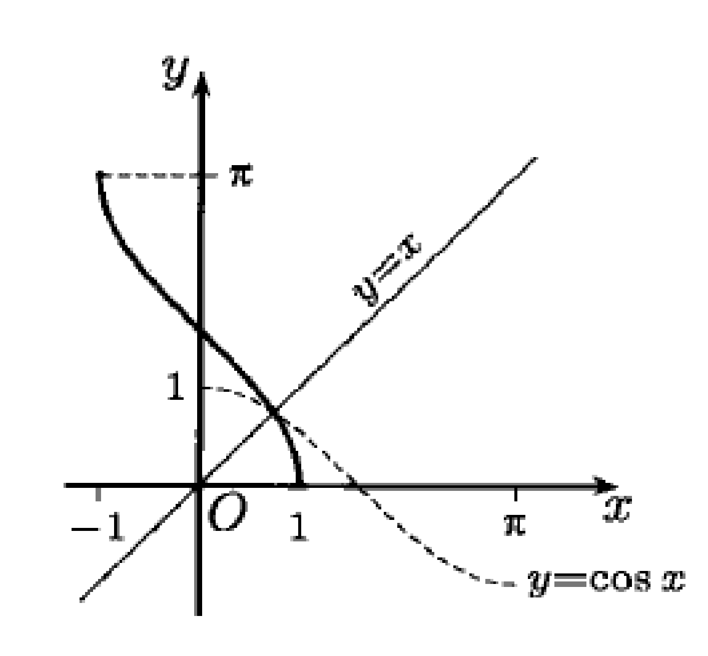
习题 309 : $y=\cos(\ln x)$



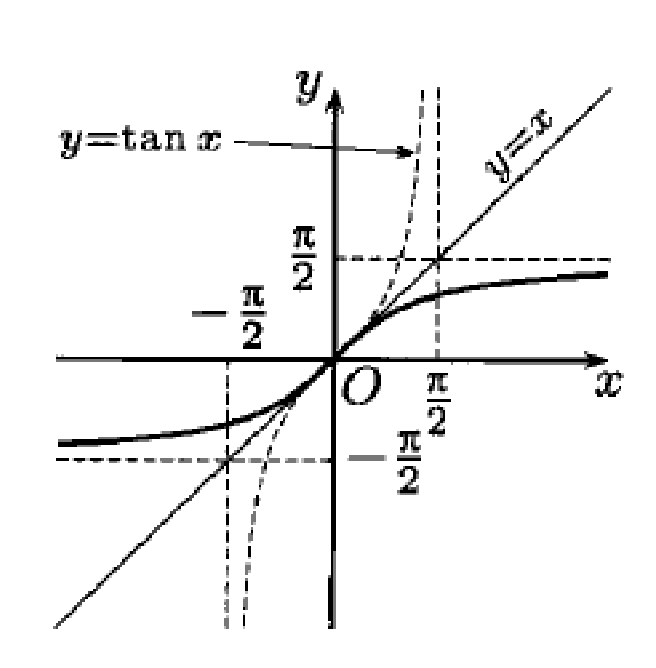
习题 310 : $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{\sin x}}$



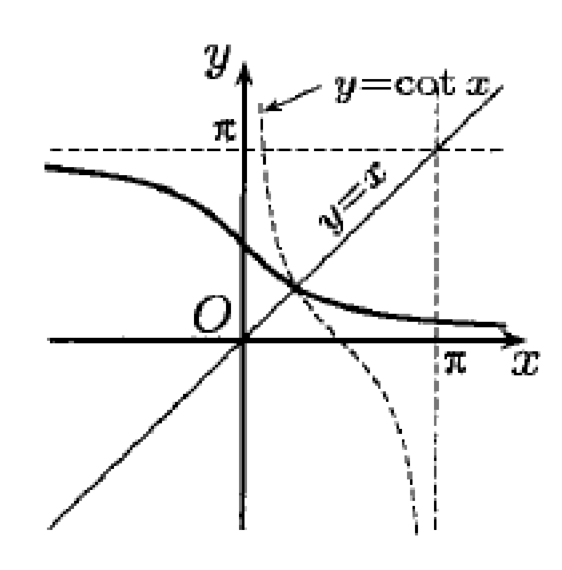

习题 311 : $y = \arcsin x$



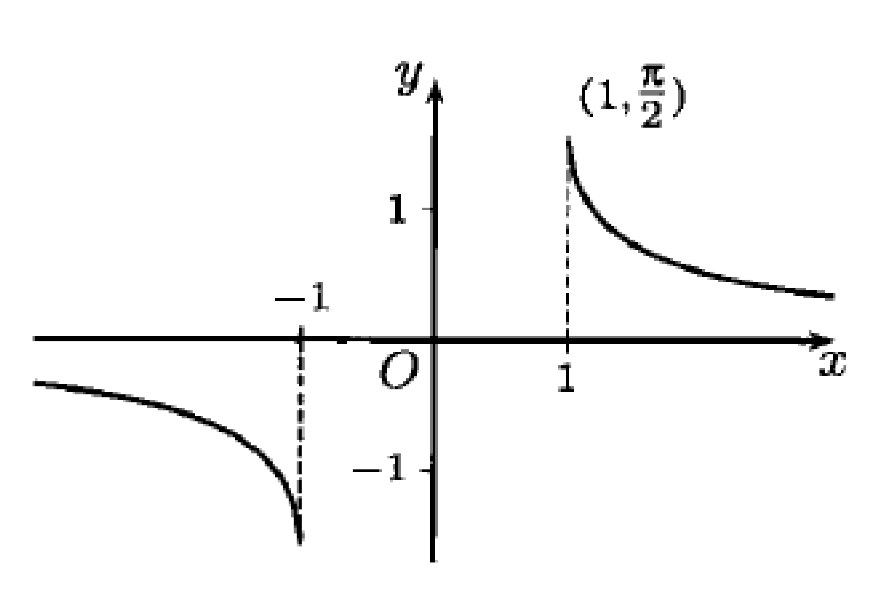
习题 312 : $y = \arccos x$



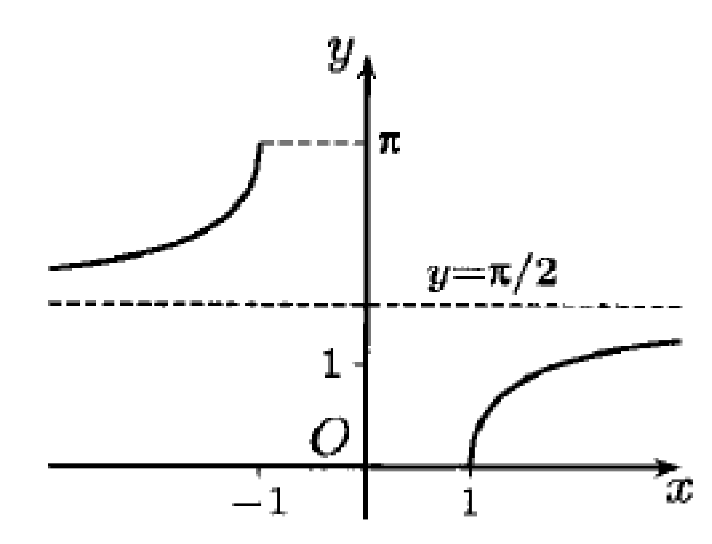
习题 313 : $y = \arctan x$



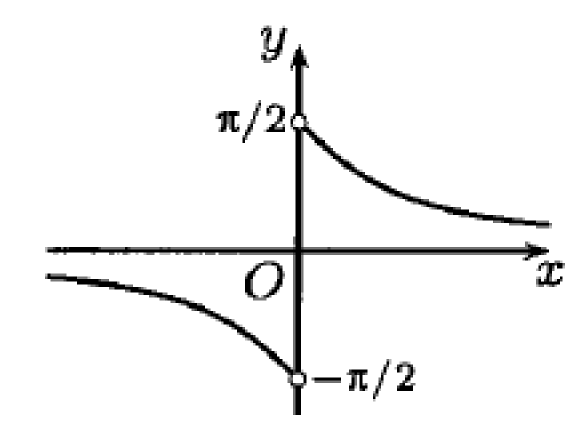
习题 314 : $y = \operatorname{arccot} x$



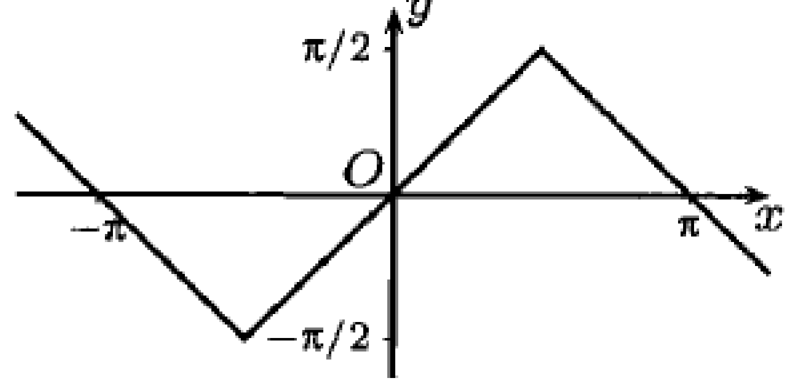
习题 315 : $y = \arcsin \dfrac{1}{x}$



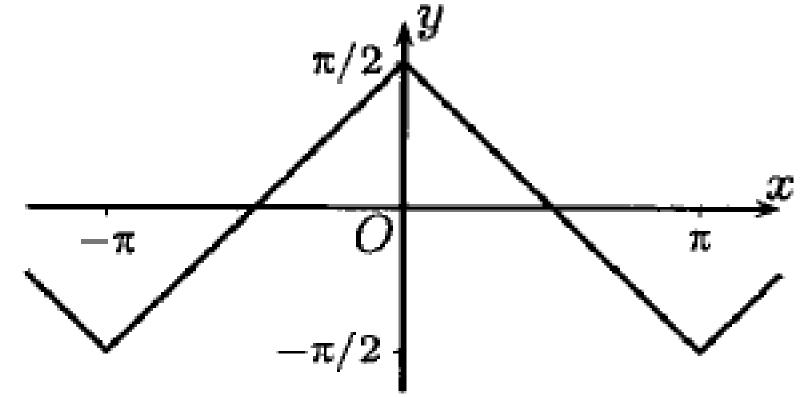
习题 316 : $y = \arccos \dfrac{1}{x}$



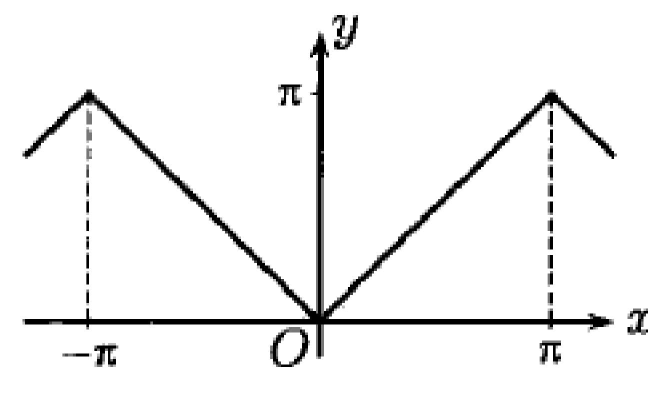
习题 317 : $y = \arctan \dfrac{1}{x}$



习题 318 : $y = \arcsin(\sin x)$

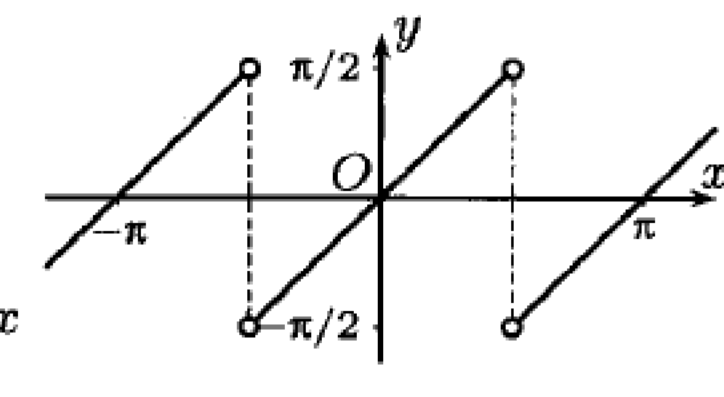


习题 319 : $y = \arcsin(\cos x)$



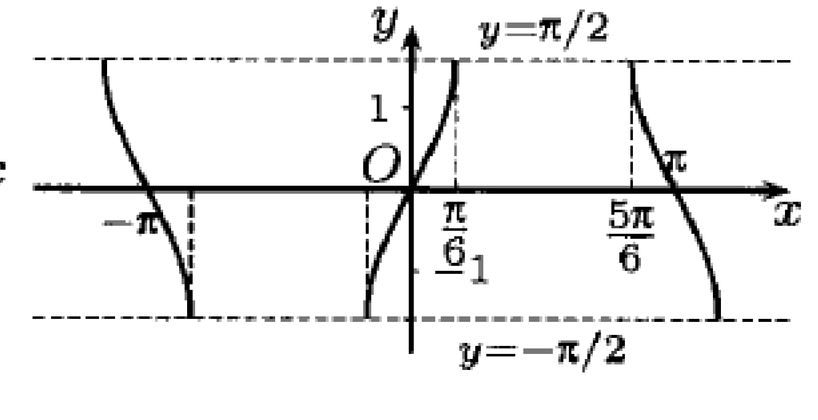
习题 320 :

$y = \arccos(\cos x)$



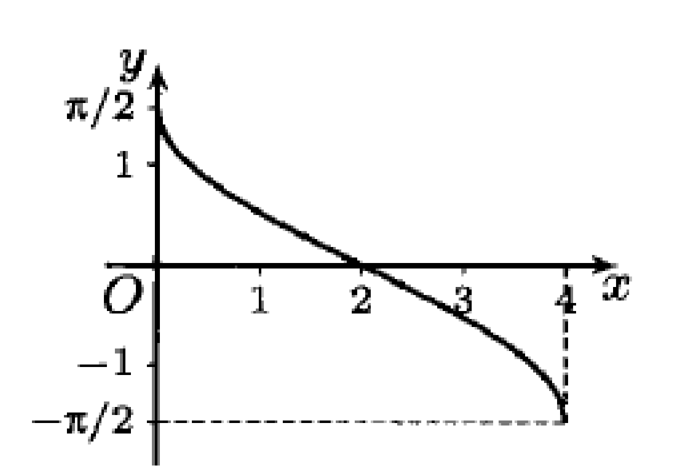
习题 321 :

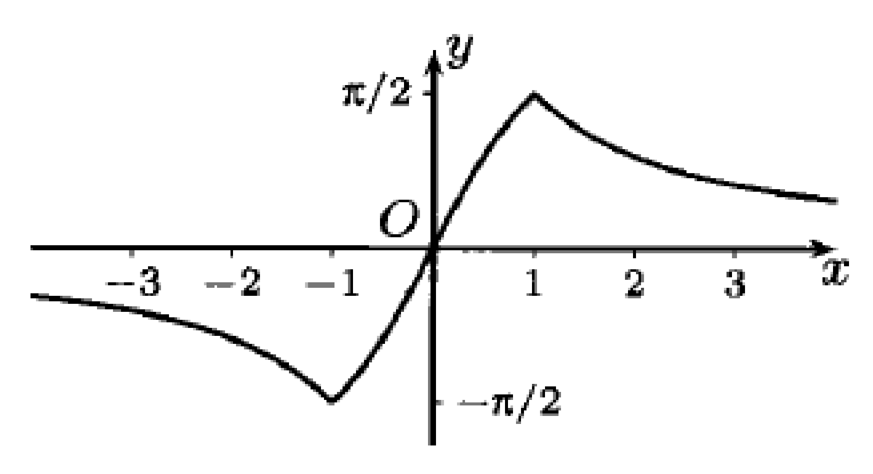
$y = \arctan(\tan x)$

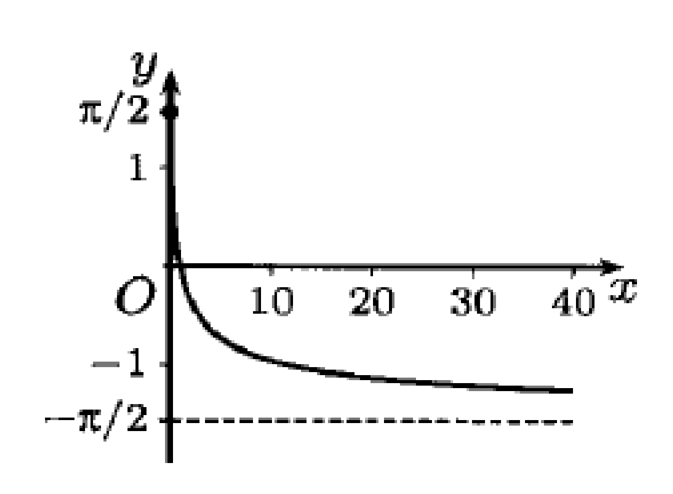


习题 322 :

$y = \arcsin(2 \sin x)$







习题 323(a) :

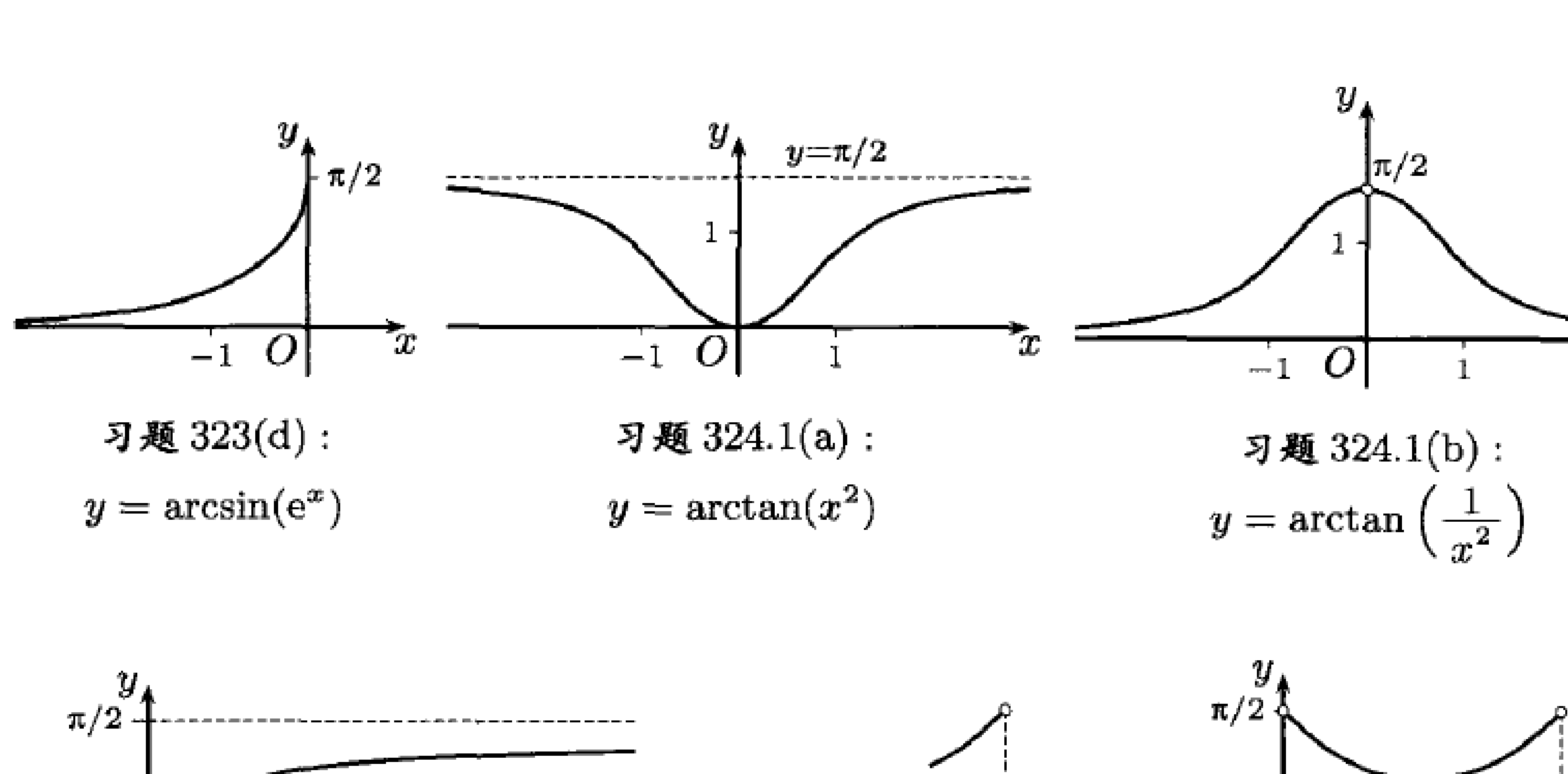
$y = \arcsin\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)$

习题 323(b) :

$y = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

习题 323(c) :

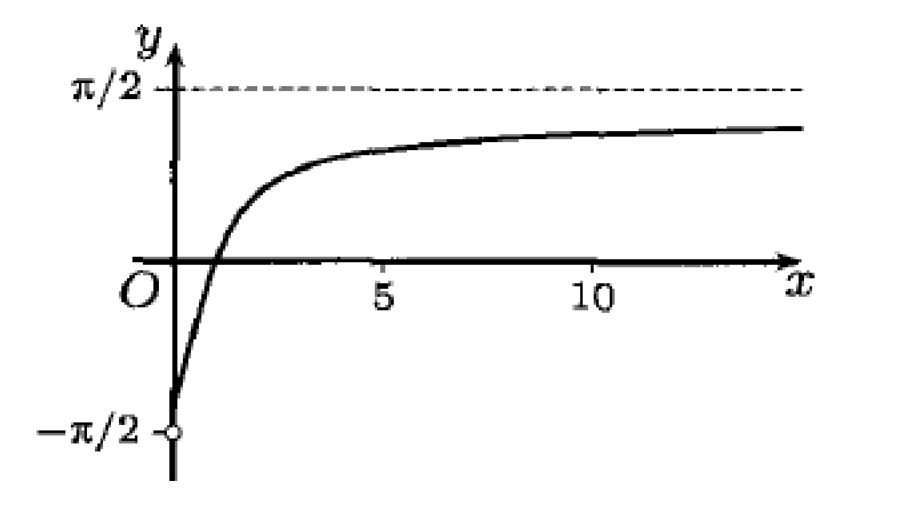
$y = \arcsin\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$



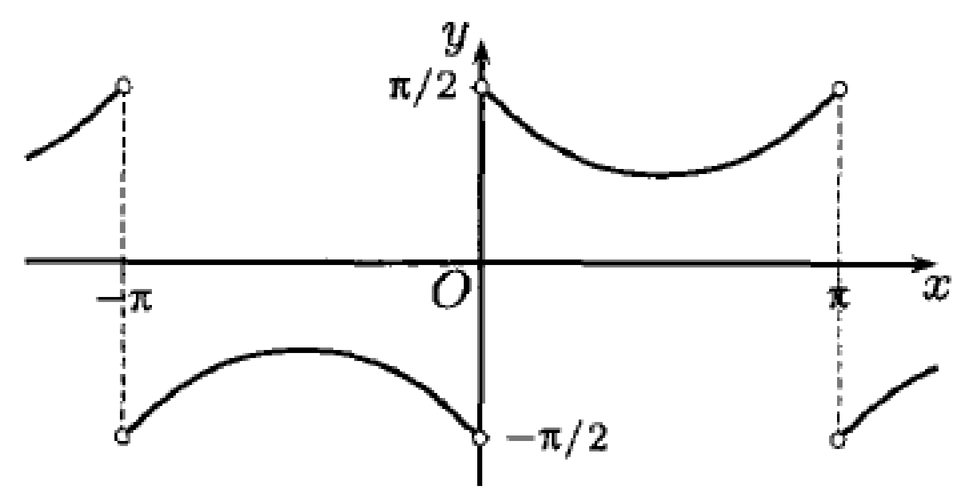
习题 323(d) :
$y = \arcsin(\mathrm{e}^x)$

习题 324.1(a) :
$y = \arctan(x^2)$

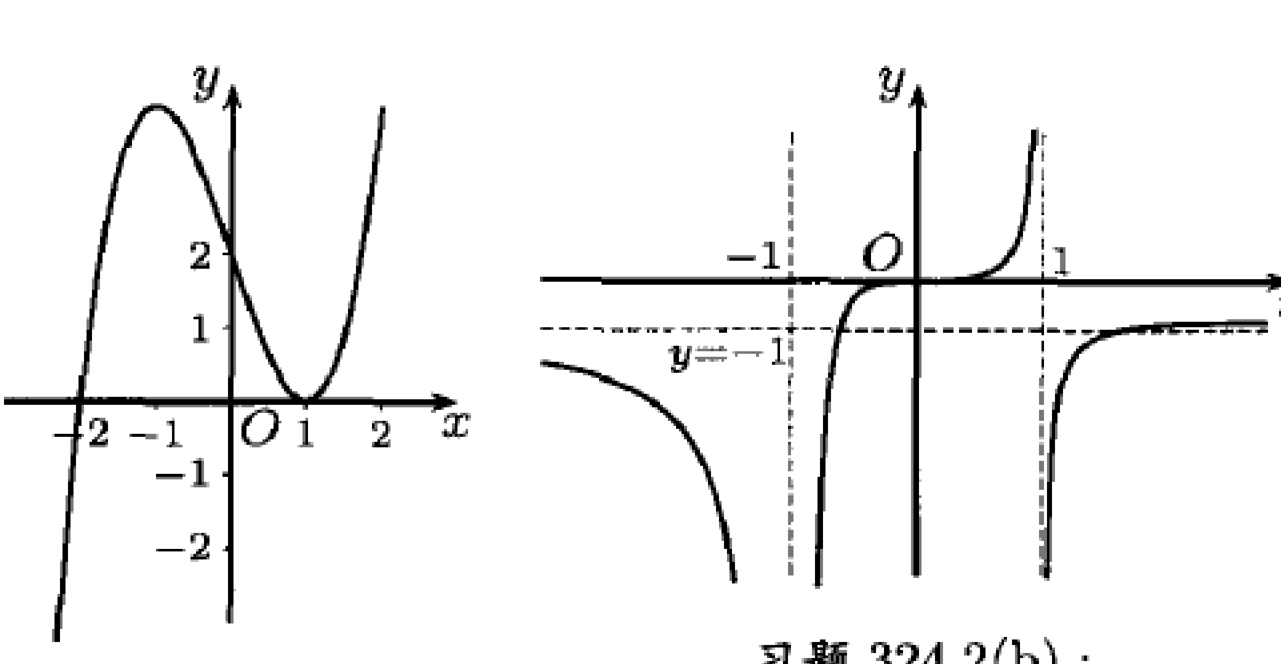
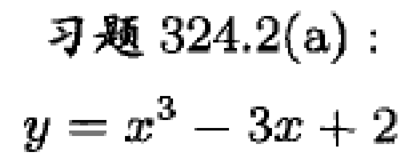
习题 324.1(b) :
$y = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$



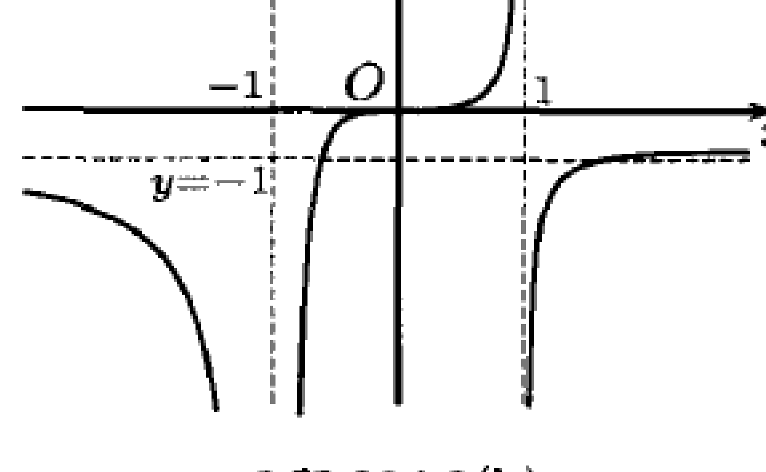

习题 324.1(c) : $y = \arctan(\ln x)$



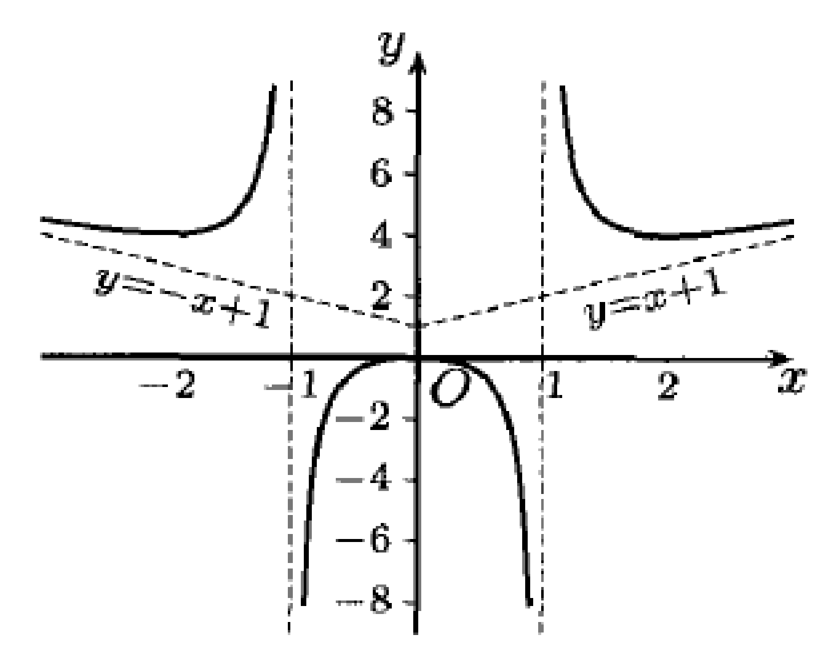
习题 324.1(d) : $y = \arctan\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

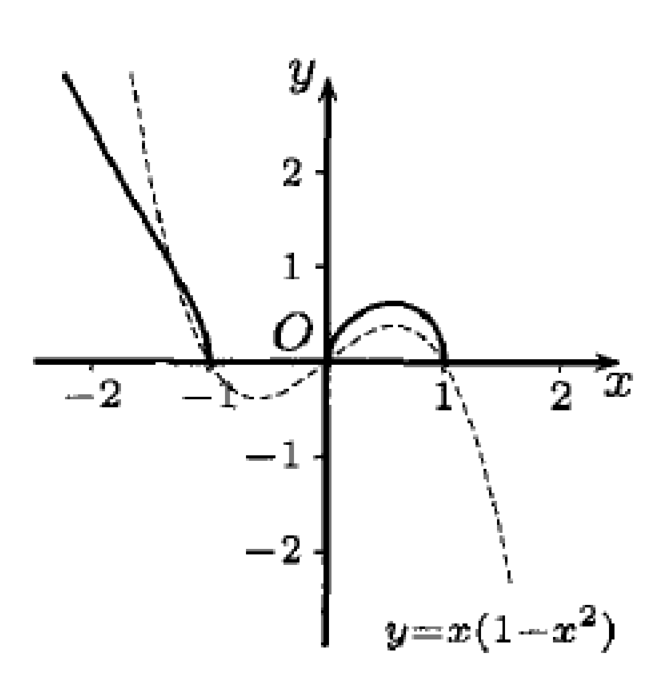
习题 324.2(a) :
$y = x^3 - 3x + 2$



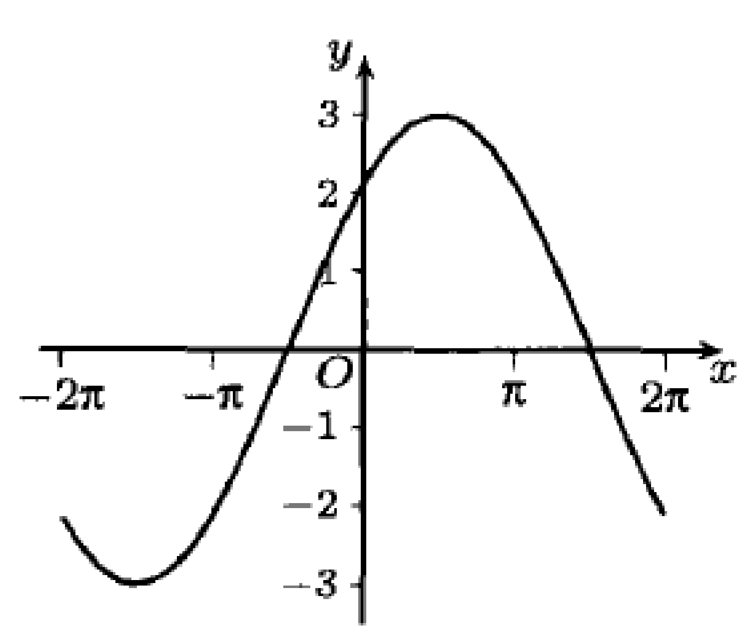
习题 324.2(b) :
$y = \dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$



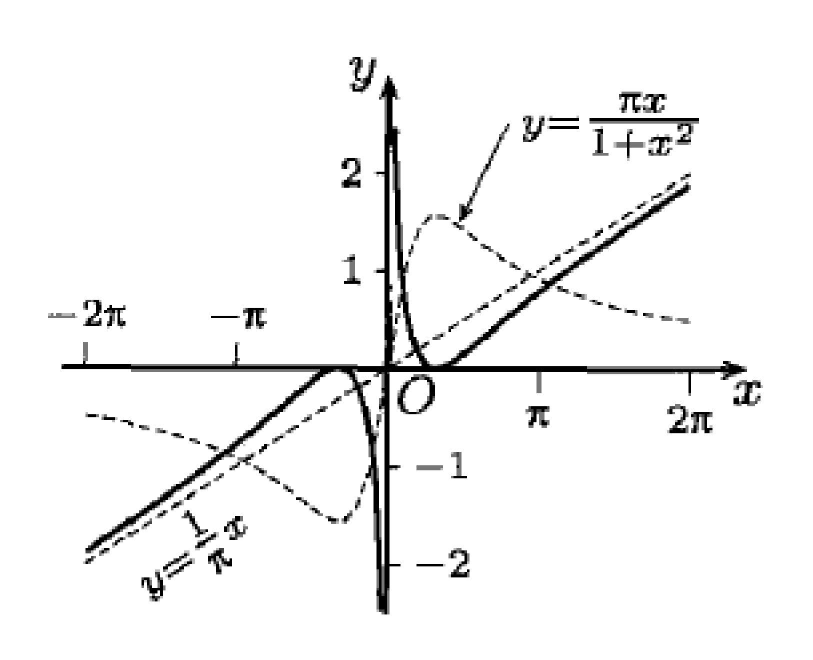
习题 324.2(c) :
$y = \dfrac{x^2}{|x|-1}$



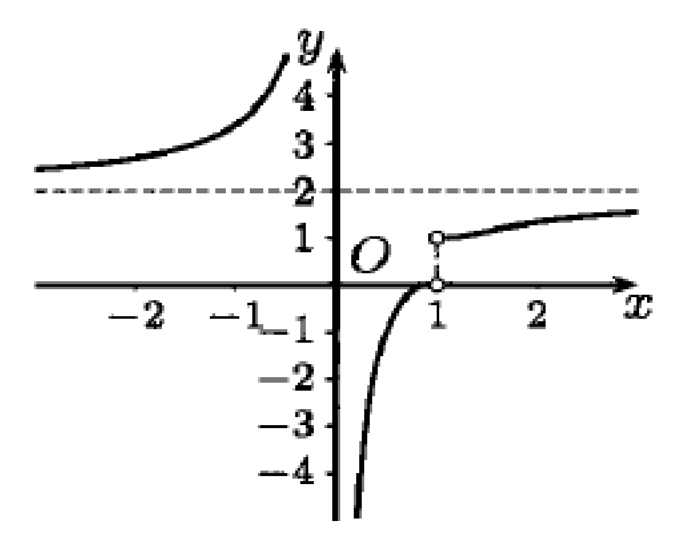
习题 324.2(d) :
$y = \sqrt{x(1-x^2)}$



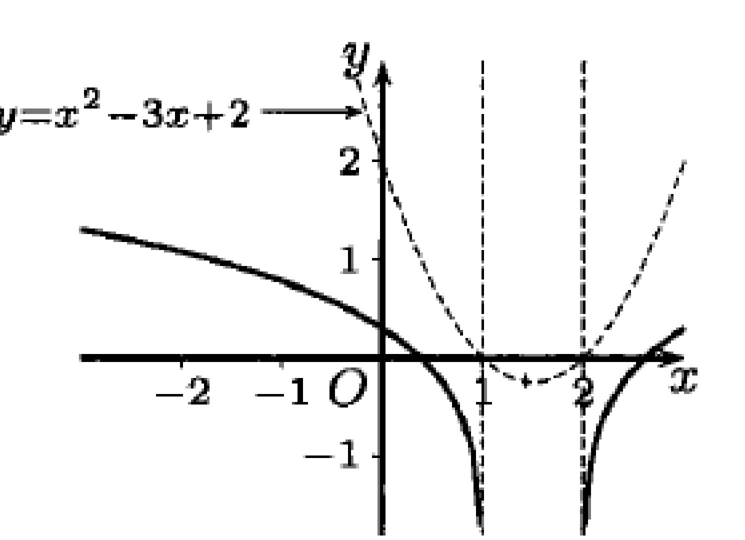
习题 324.2(e) :
$y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$



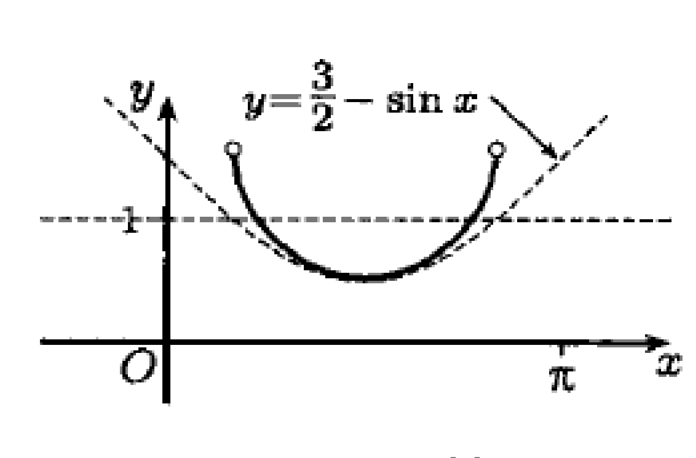
习题 324.2(f) :
$y = \cot\dfrac{\pi x}{1+x^2}$



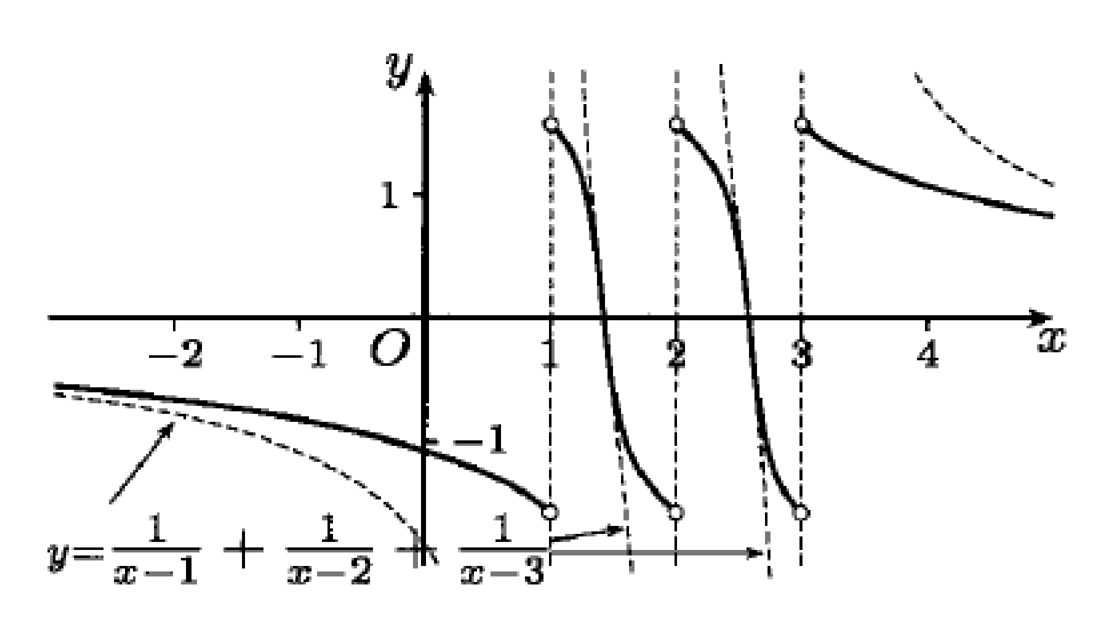
习题 324.2(g) :
$$y=\frac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$$



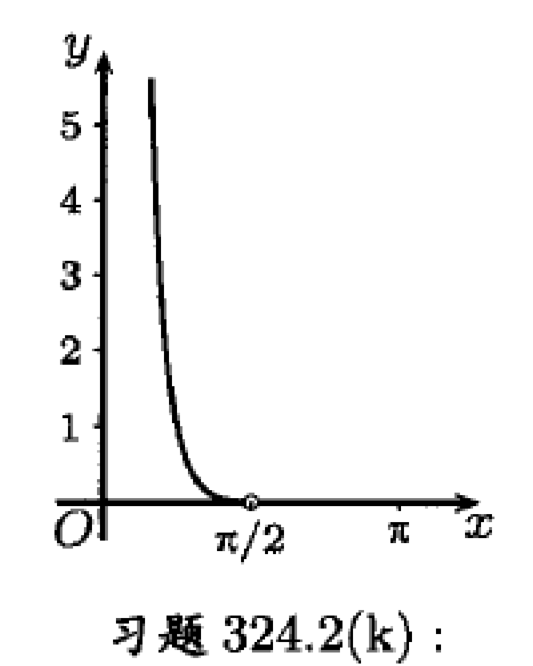
习题 324.2(h) :
$$y=\lg(x^2-3x+2)$$



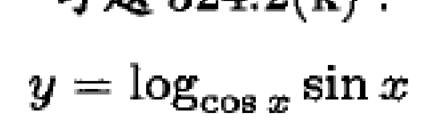
习题 324.2(i) :
$$y=\arcsin\left(\frac{3}{2}-\sin x\right)$$

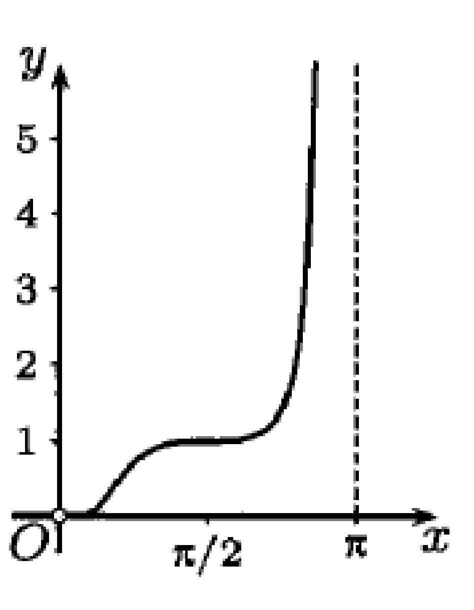


习题 324.2(j) :
$$y=\arctan\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)$$

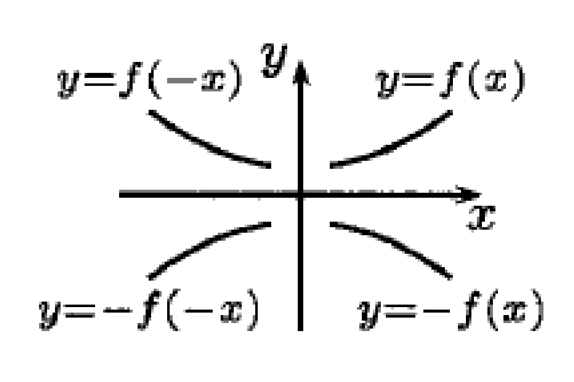


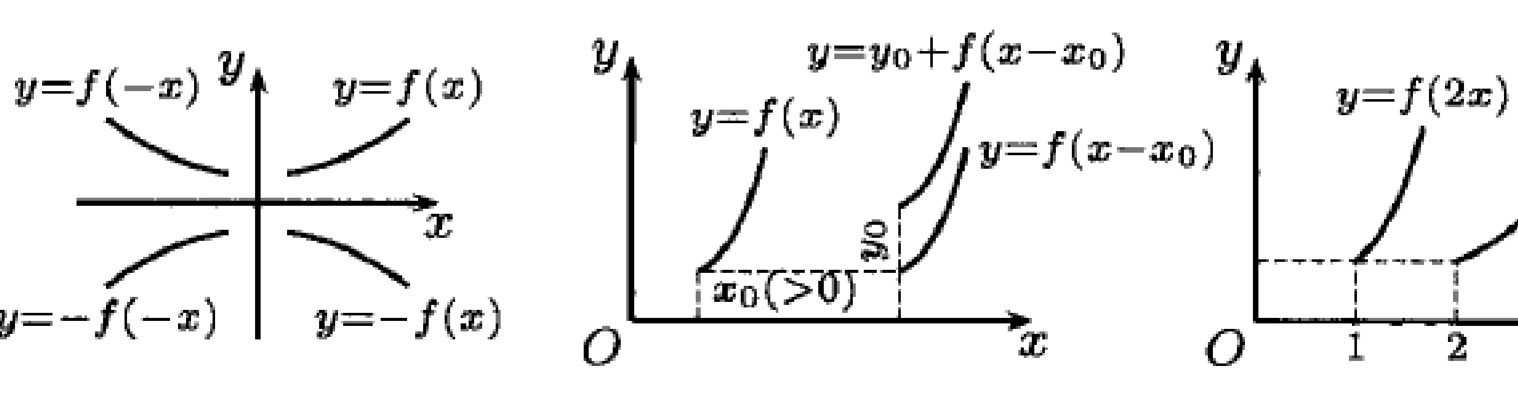
习题 324.2(k) :

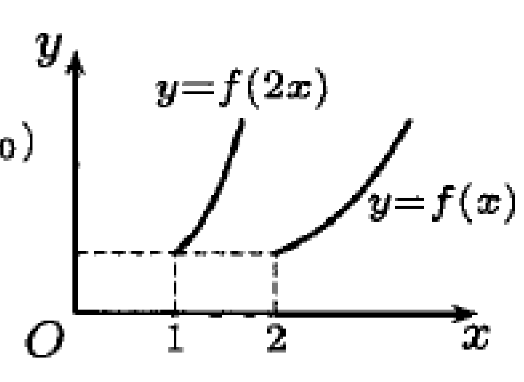

$$y=\log_{\cos x}\sin x$$

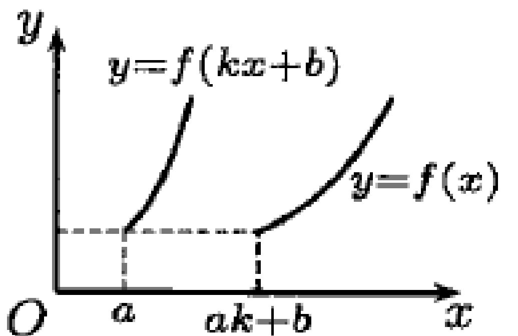


习题 324.2(l) :
$$y=(\sin x)^{\cot x}$$

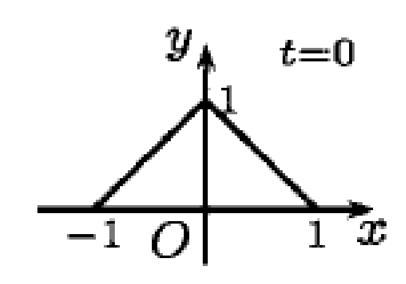


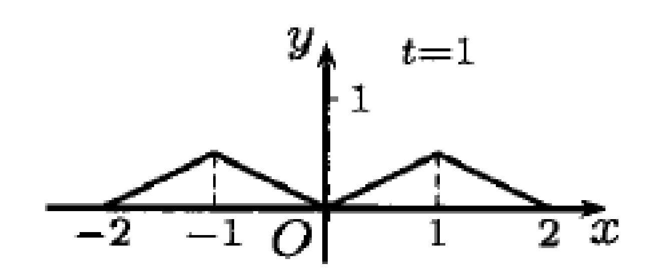


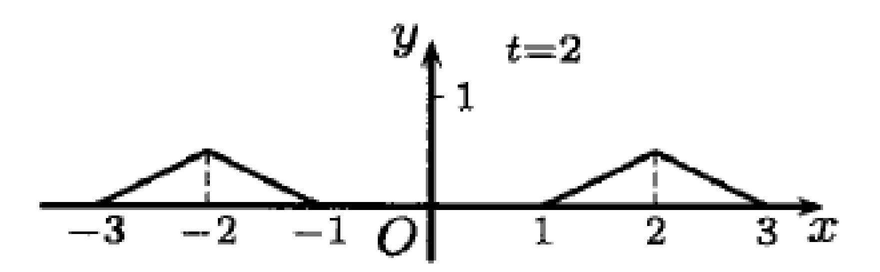




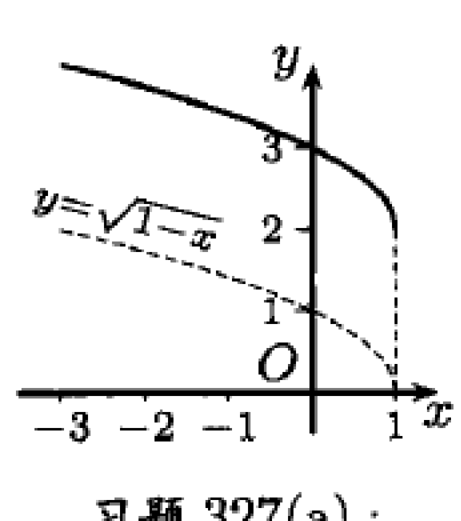
习题 325 : (a) $y=-f(x)$, (b) $y=f(-x)$, (c) $y=-f(-x)$, (d) $y=f(x-x_0)$, (e) $y=y_0+f(x-x_0)$, (f) $y=f(2x)$, (g) $y=f(kx+b)$ $(k\neq 0)$



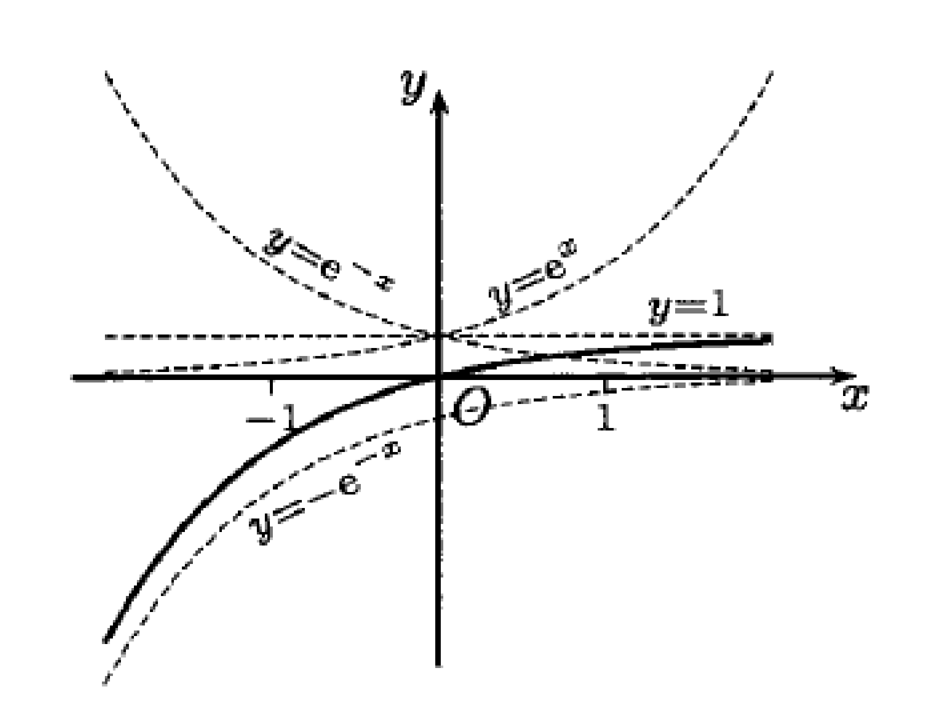




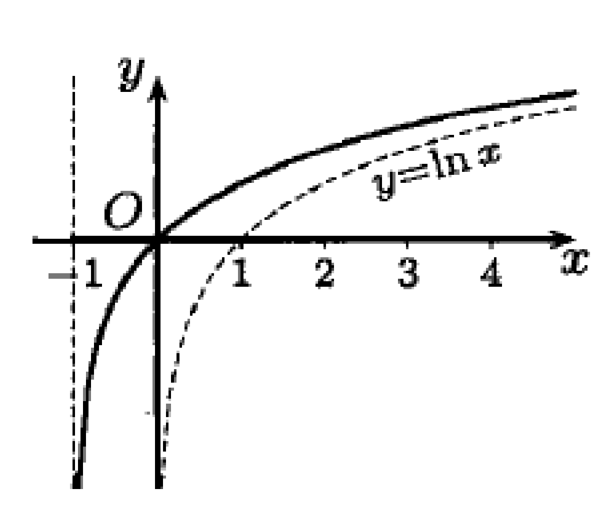
习题 326 : $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $y=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]$, $t=0,1,2$



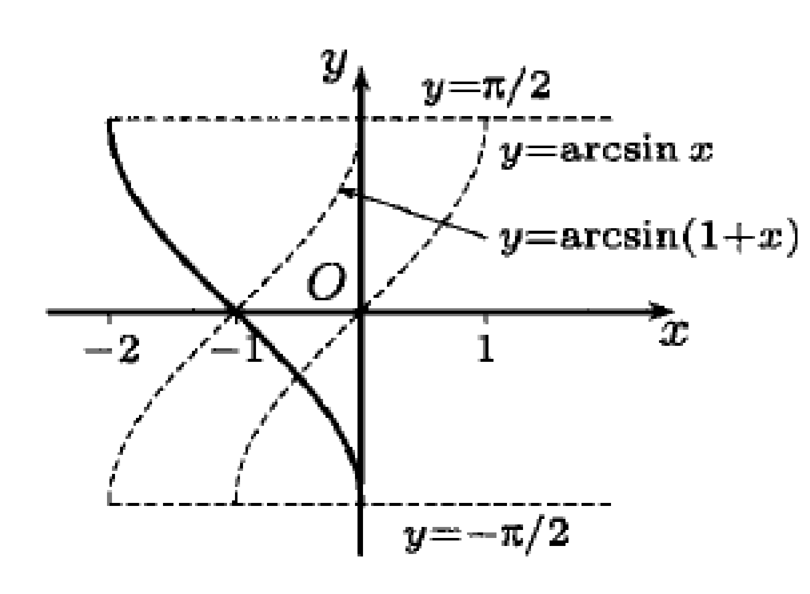
习题 327(a) :
$y = 2 + \sqrt{1-x}$



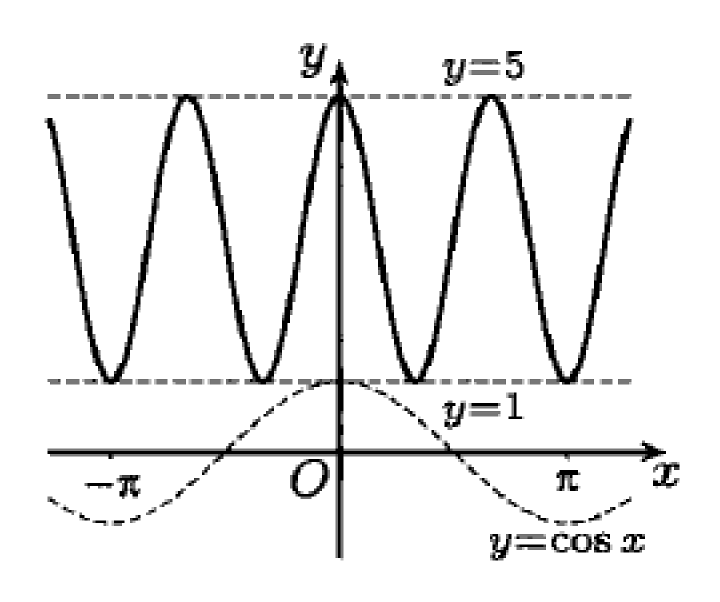
习题 327(b) : $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$



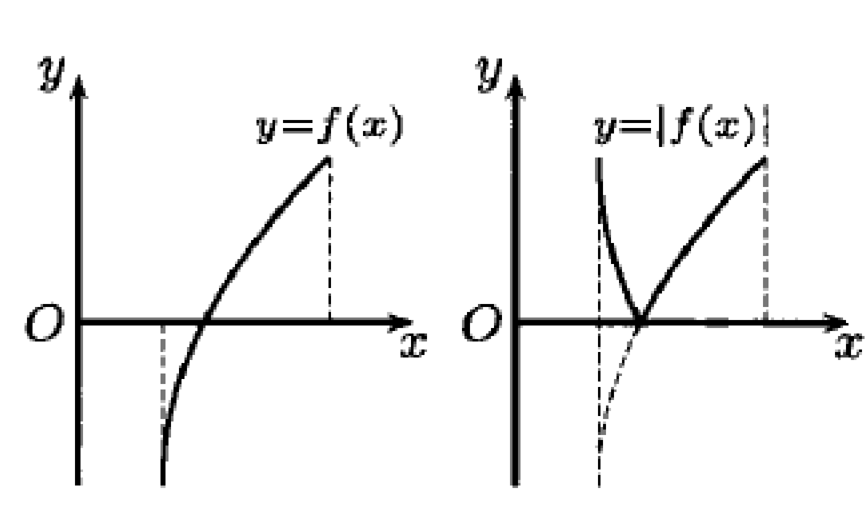
习题 327(c) :
$y = \ln(1+x)$

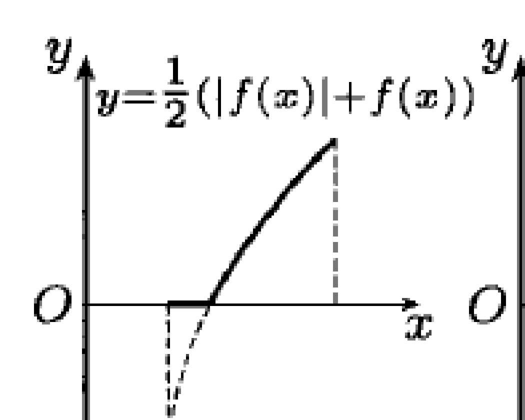


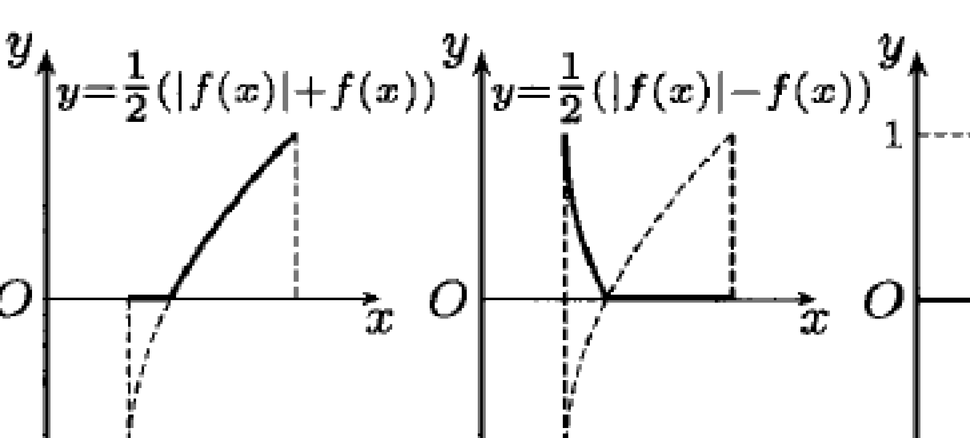
习题 327(d) :
$y = -\arcsin(1+x)$



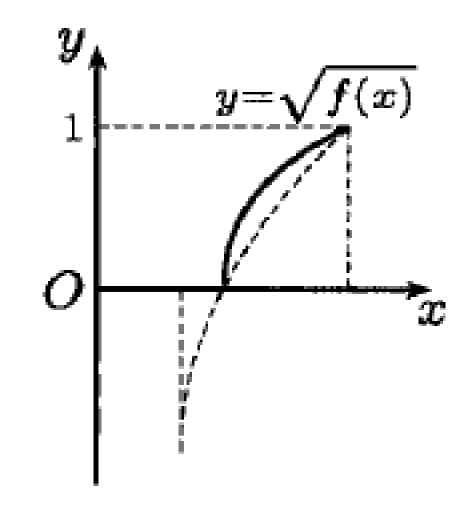
习题 327(e) :
$y = 3 + 2\cos 3x$

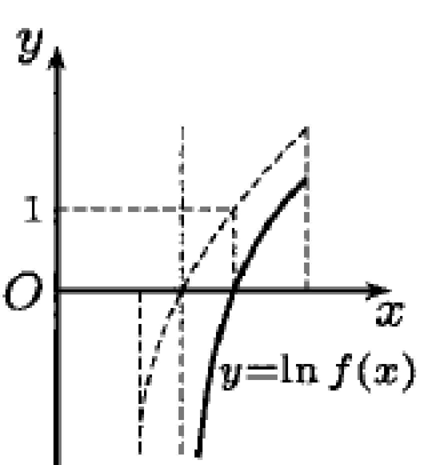


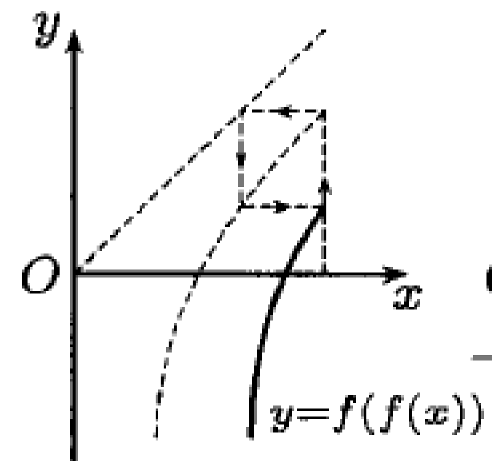


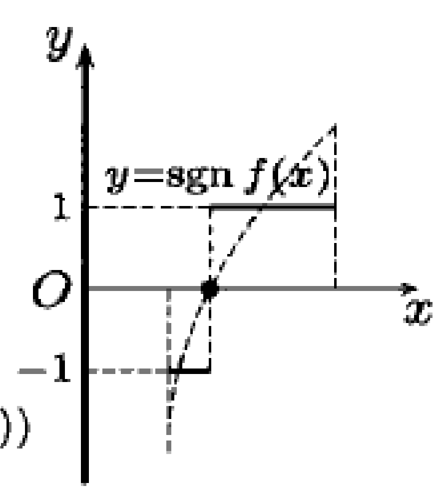


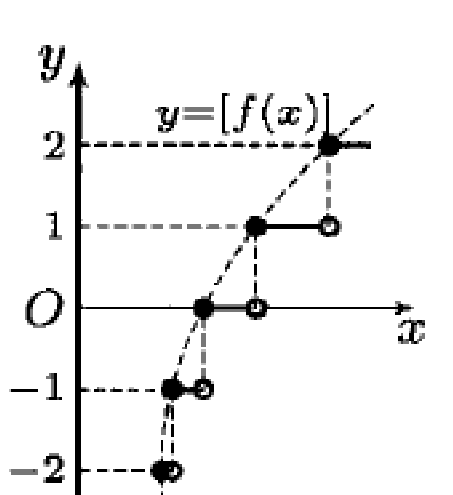
习题 328 : (a) $y = |f(x)|$, (b) $y = \dfrac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$,
(c) $y = \dfrac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$, (d) $y = f^2(x)$



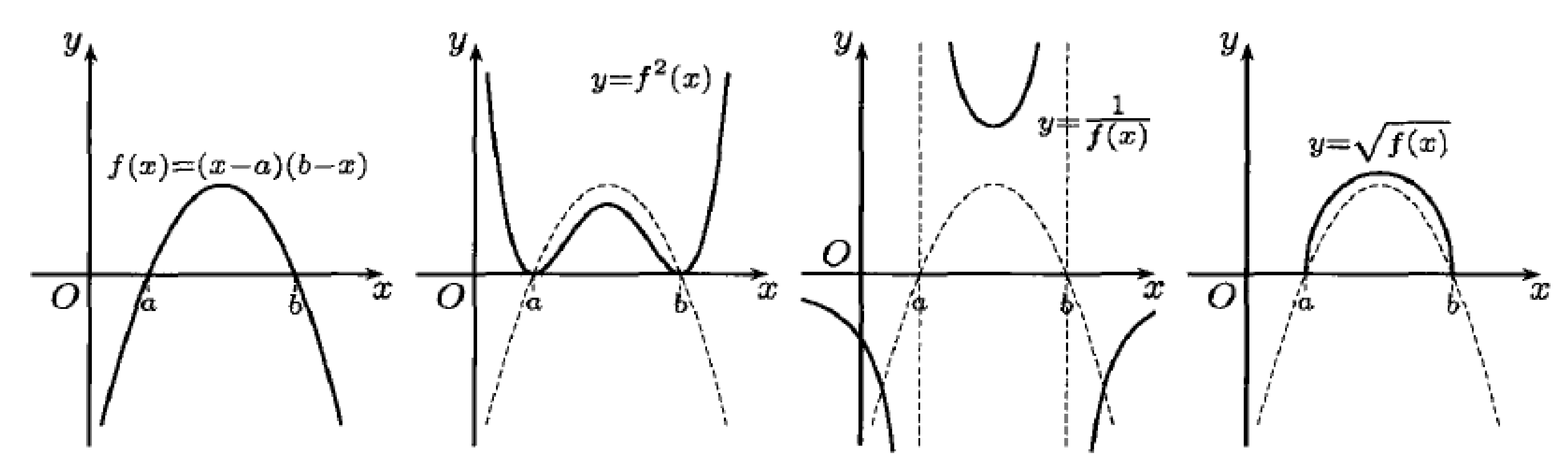




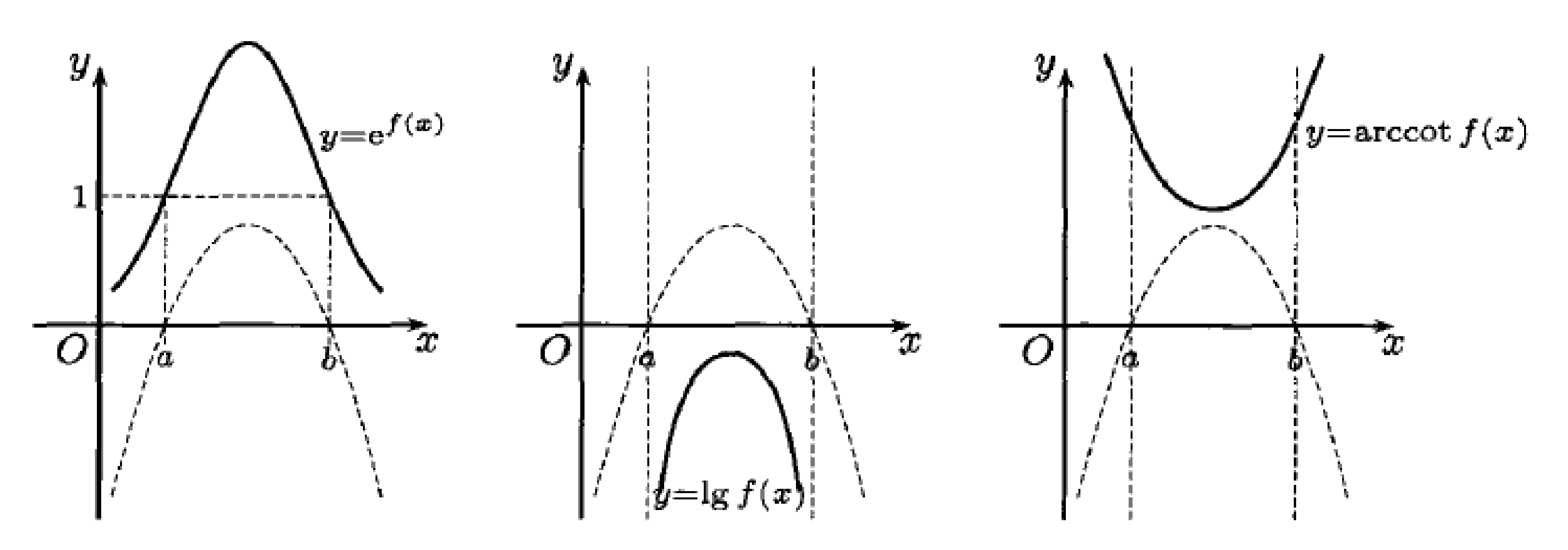




习题 328 : (e) $y = \sqrt{f(x)}$, (f) $y = \ln f(x)$, (g) $y = f(f(x))$,
(h) $y = \operatorname{sgn} f(x)$, (i) $y = [f(x)]$

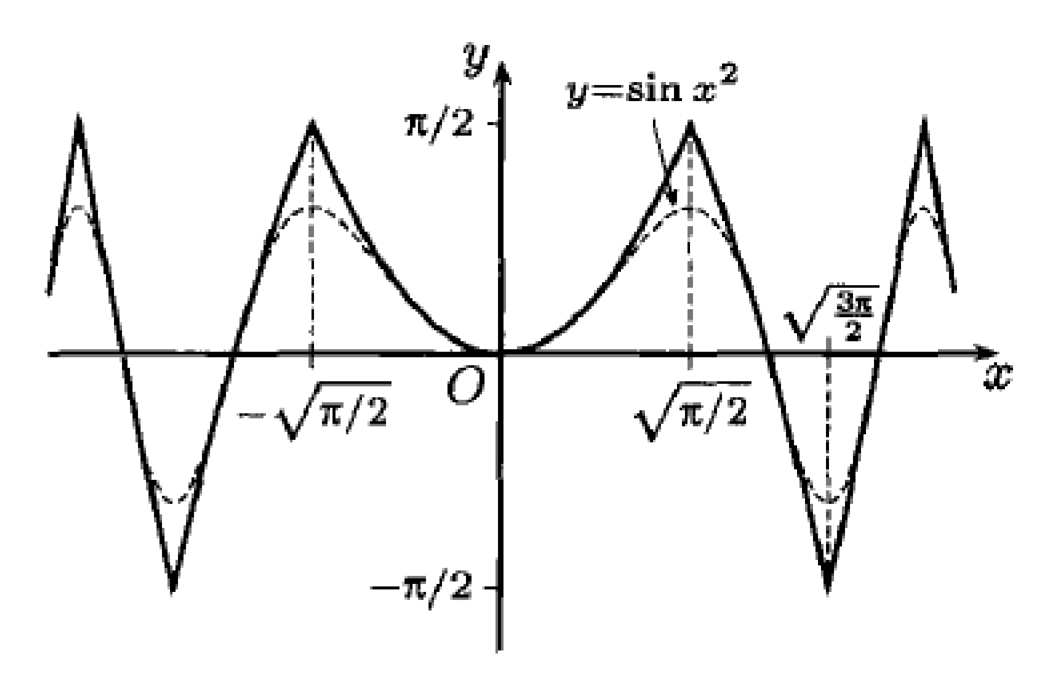


习题 329.1 : $f(x)=(x-a)(b-x)$ $(a<b)$, (a) $y=f(x)$, (b) $y=f^2(x)$,
(c) $y=\frac{1}{f(x)}$, (d) $y=\sqrt{f(x)}$

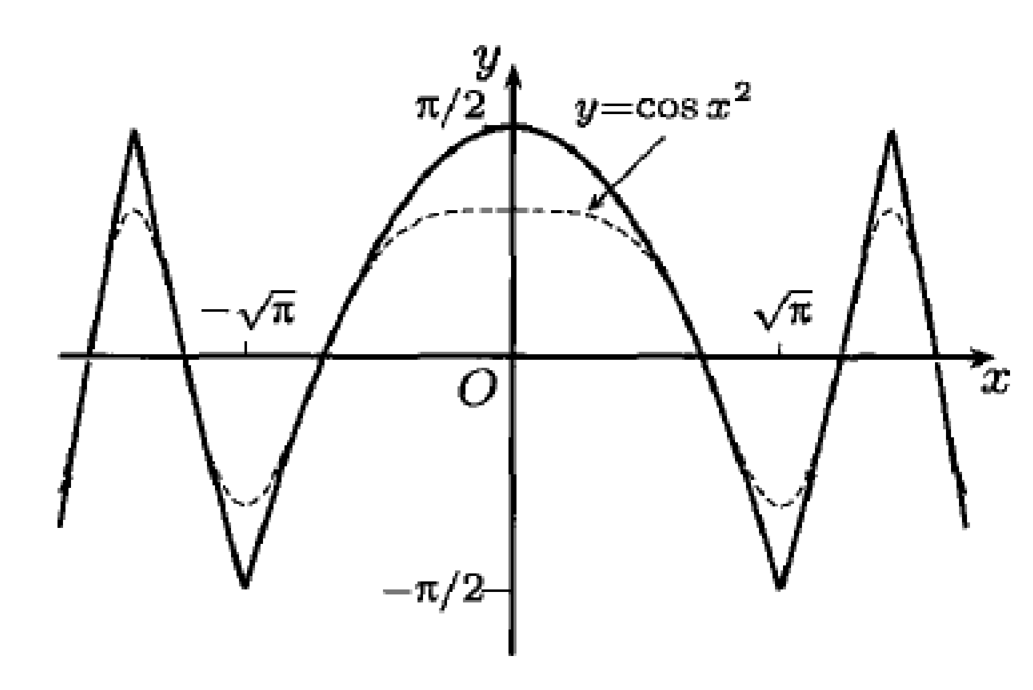


习题 329.1 : (e) $y=\mathrm{e}^{f(x)}$, (f) $y=\lg f(x)$, (g) $y=\operatorname{arccot} f(x)$

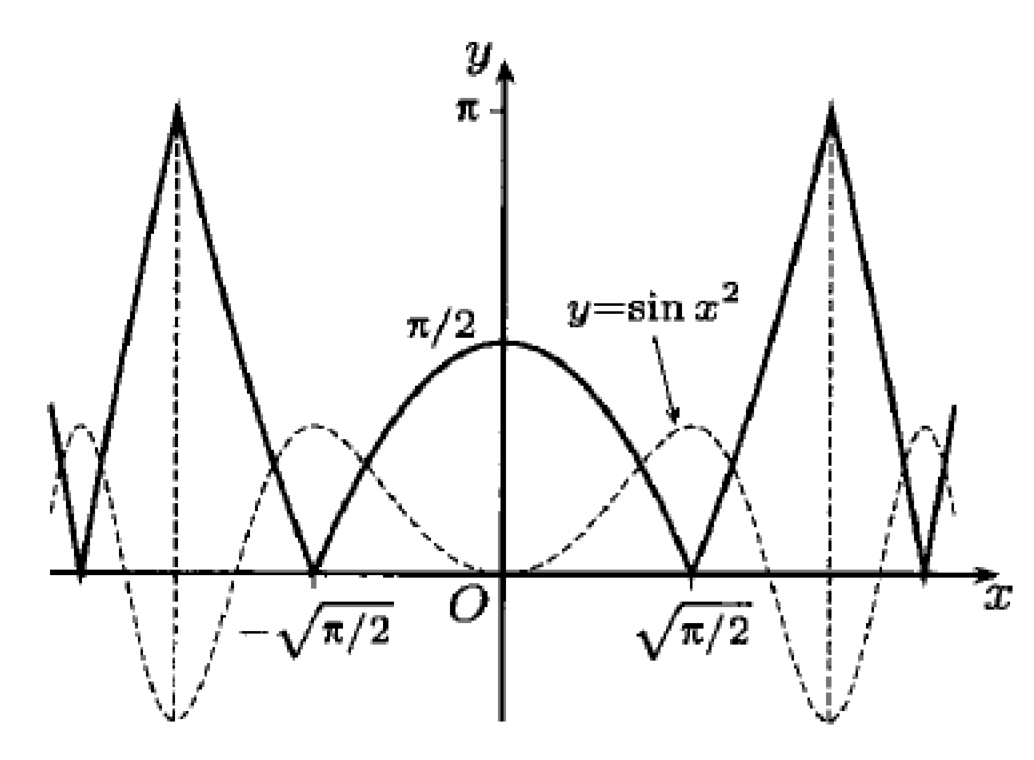
注 在作习题 329.1 的图像时, 所取的 a,b 数值使得 f 的最大值 $\frac{(b-a)^2}{4}<1$. 如果改变 a,b 使得这个最大值大于 1 或等于 1, 则各个分图的图像会不一样.



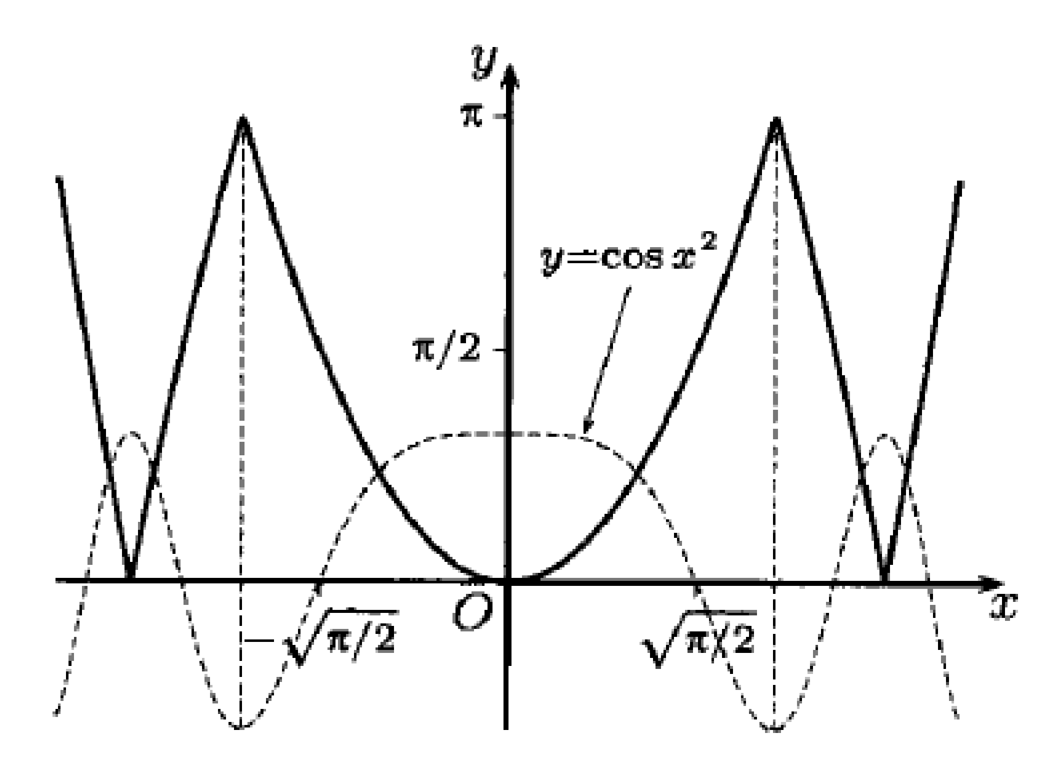
习题 329.2 1) : (a) $y=\arcsin(\sin x^2)$



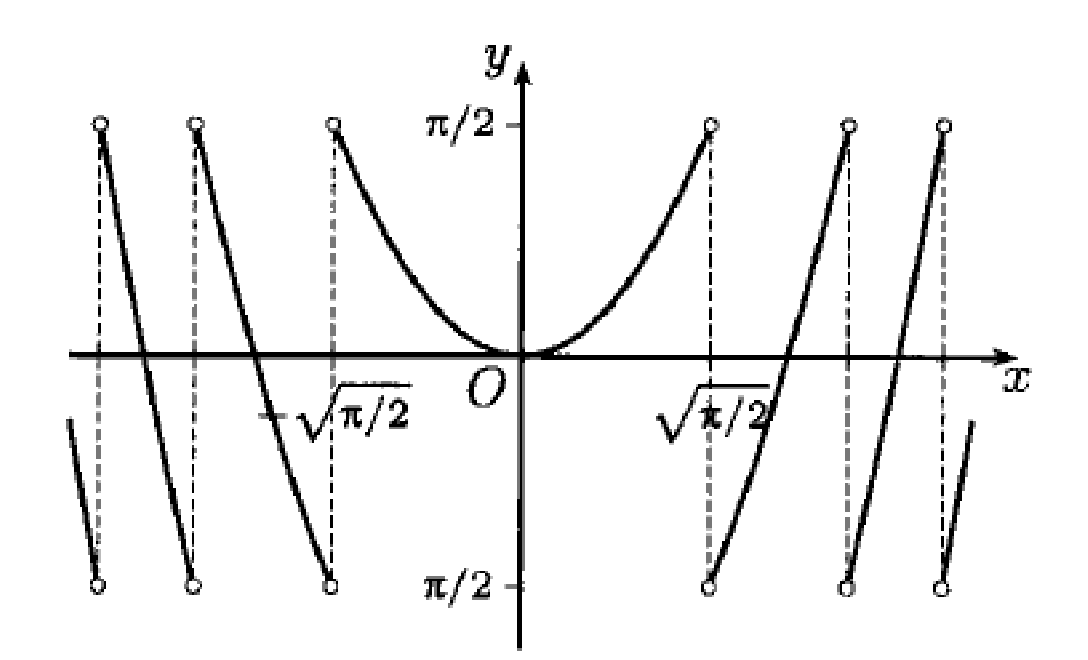
习题 329.2 1) : (b) $y=\arcsin(\cos x^2)$



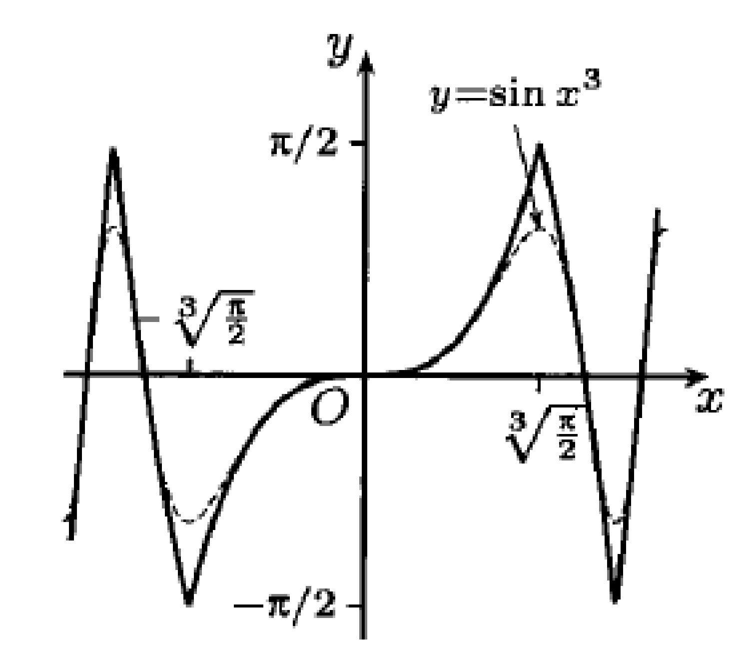
习题 329.2 1) : (c) $y=\arccos(\sin x^2)$



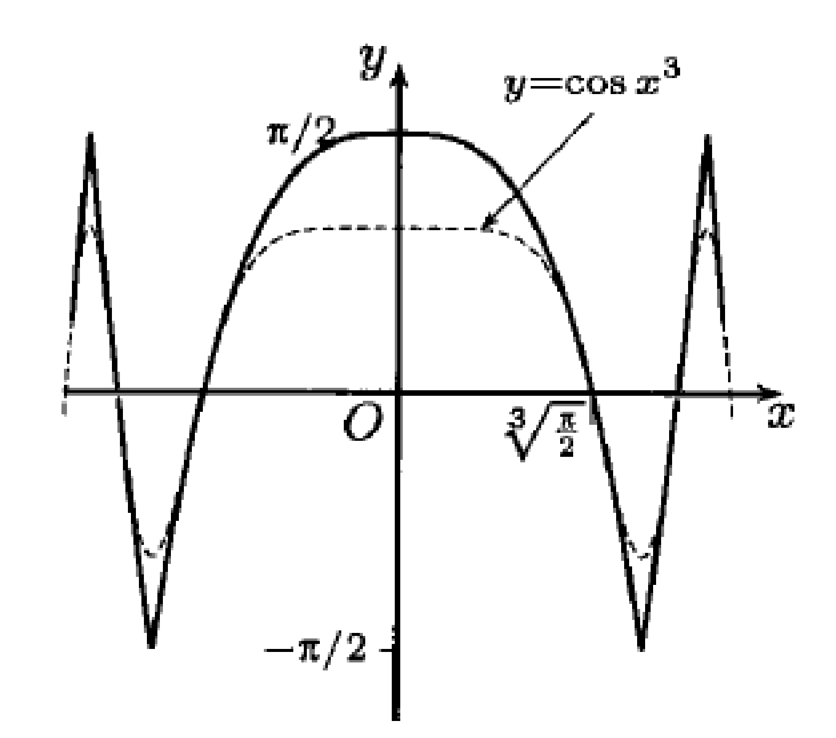
习题 329.2 1) : (d) $y=\arccos(\cos x^2)$



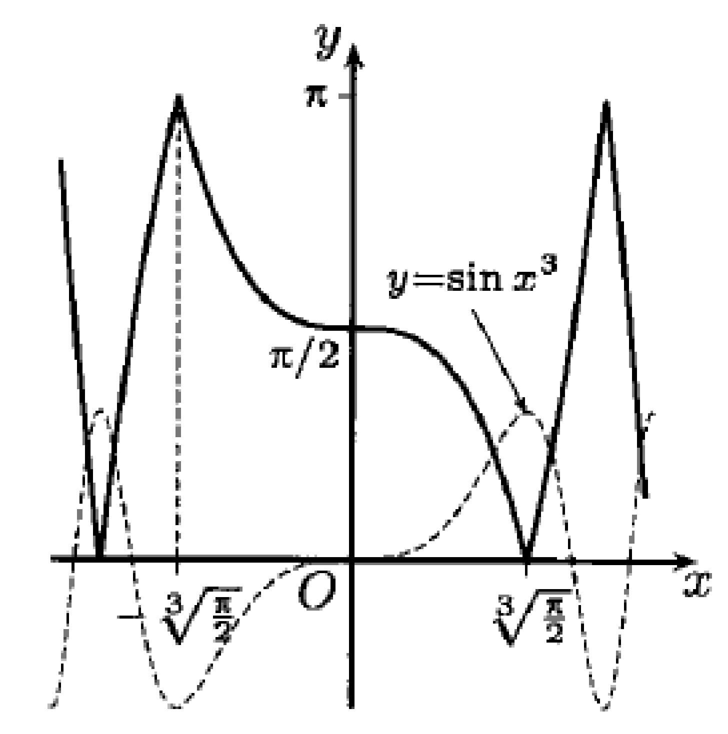
习题 329.2 1) : (e) $y=\arctan(\tan x^2)$



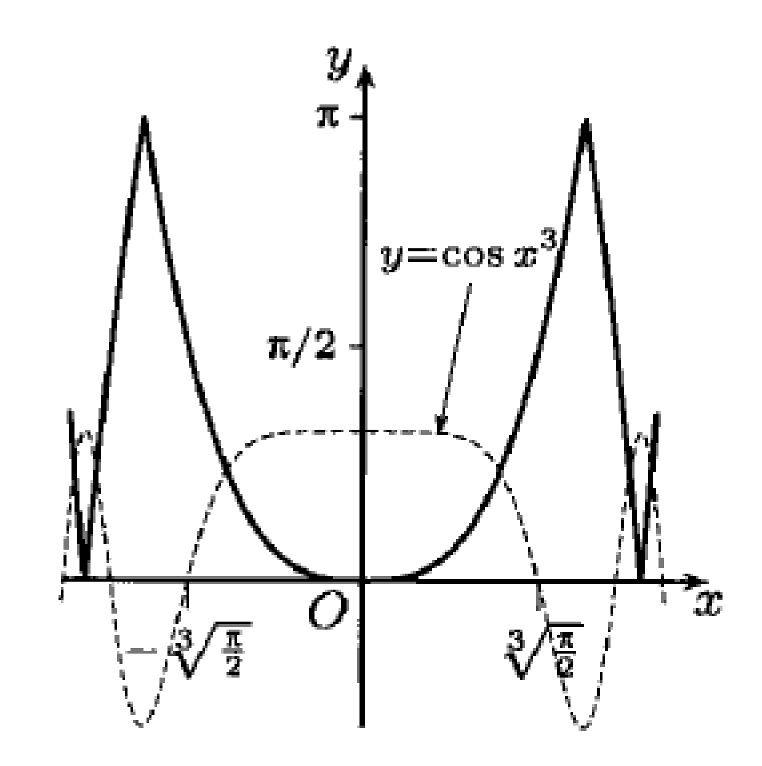
习题 329.2 2) : (a) $y=\arcsin(\sin x^3)$



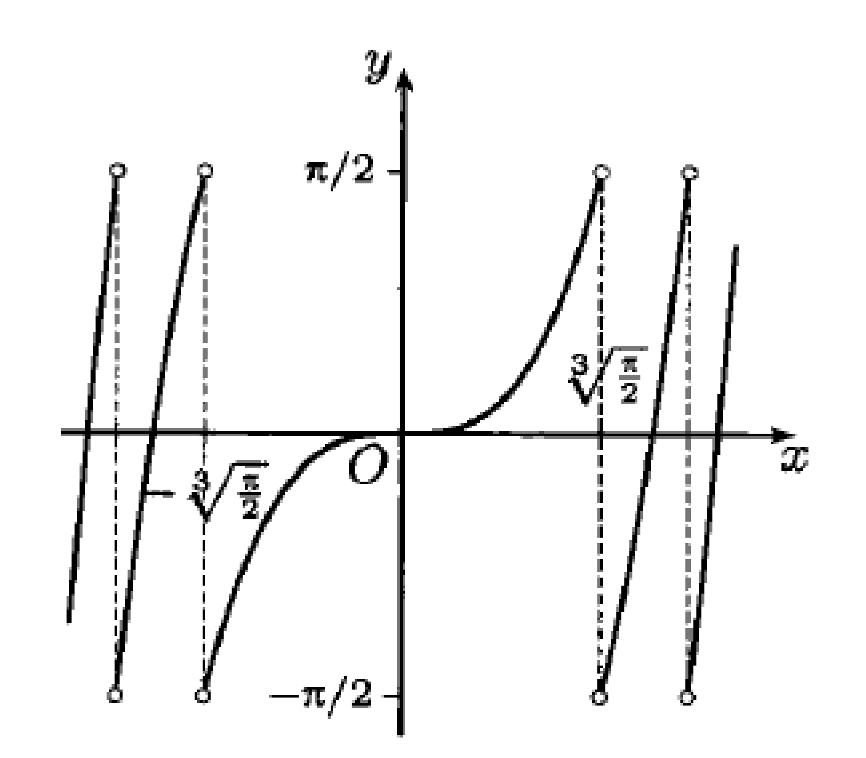
习题 329.2 2) : (b) $y=\arcsin(\cos x^3)$



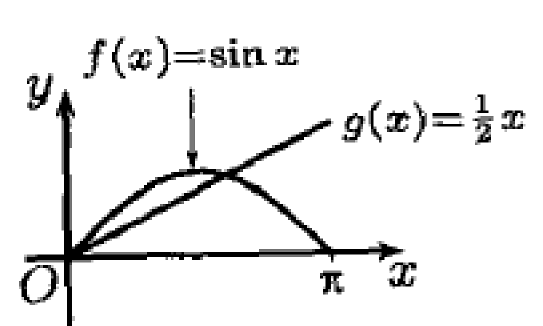
习题 329.2 2) : (c) $y=\arccos(\sin x^3)$

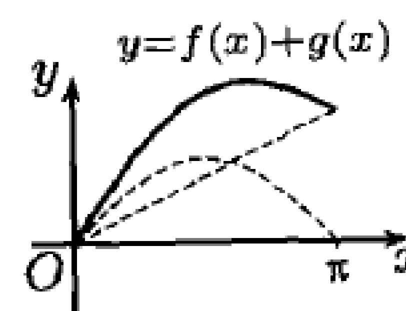


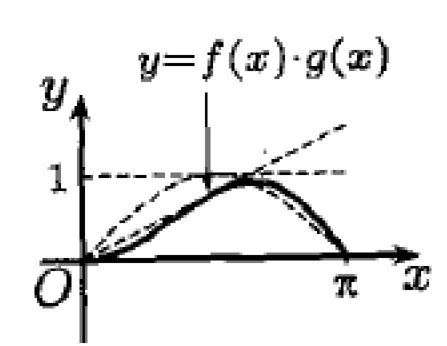
习题 329.2 2) : (d) $y=\arccos(\cos x^3)$

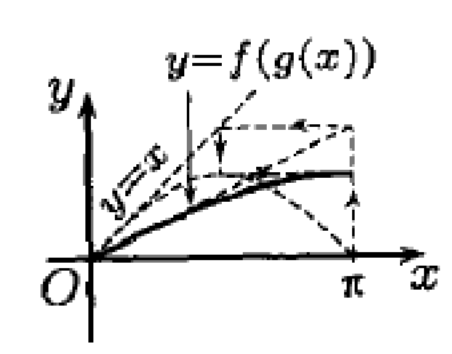


习题 329.2 2) : (e) $y=\arctan(\tan x^3)$

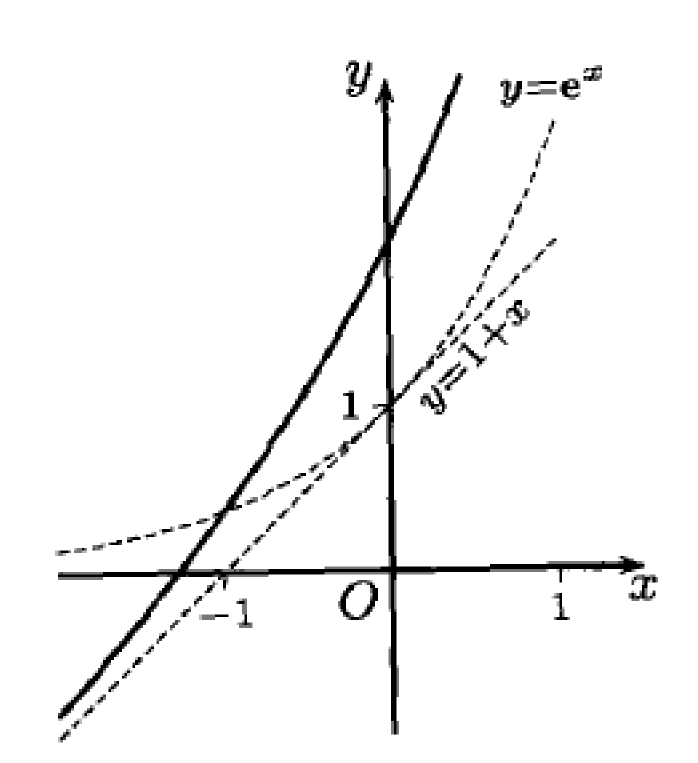




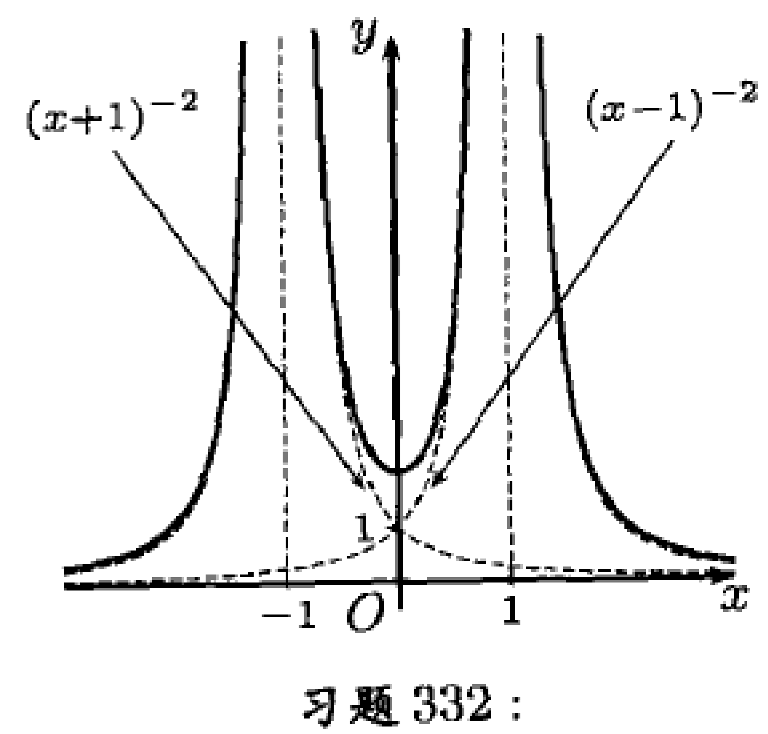




习题 330 : (a) $y=f(x)+g(x)$, (b) $y=f(x)g(x)$, (c) $y=f(g(x))$

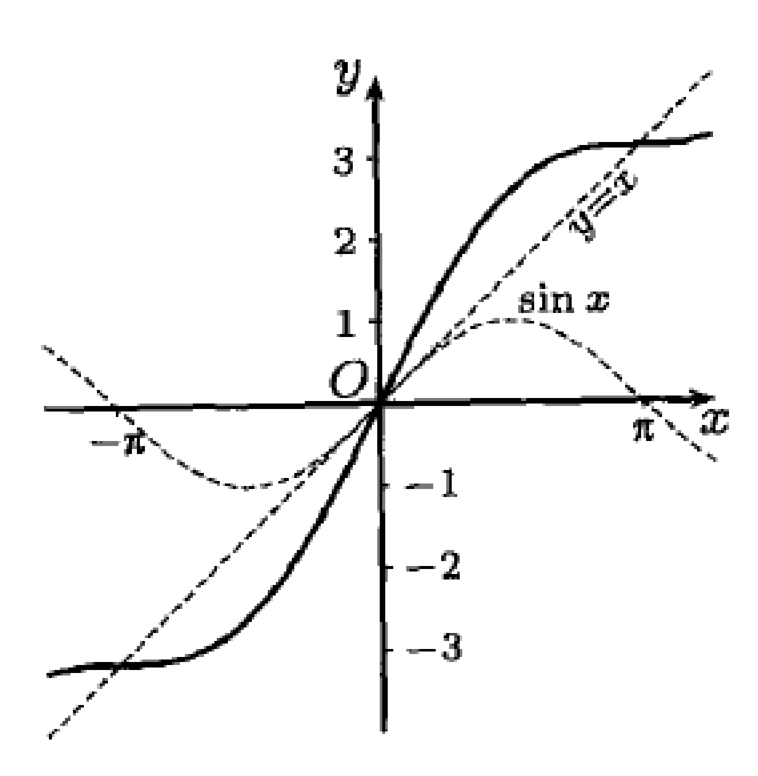


习题 331 : $y=1+x+e^x$

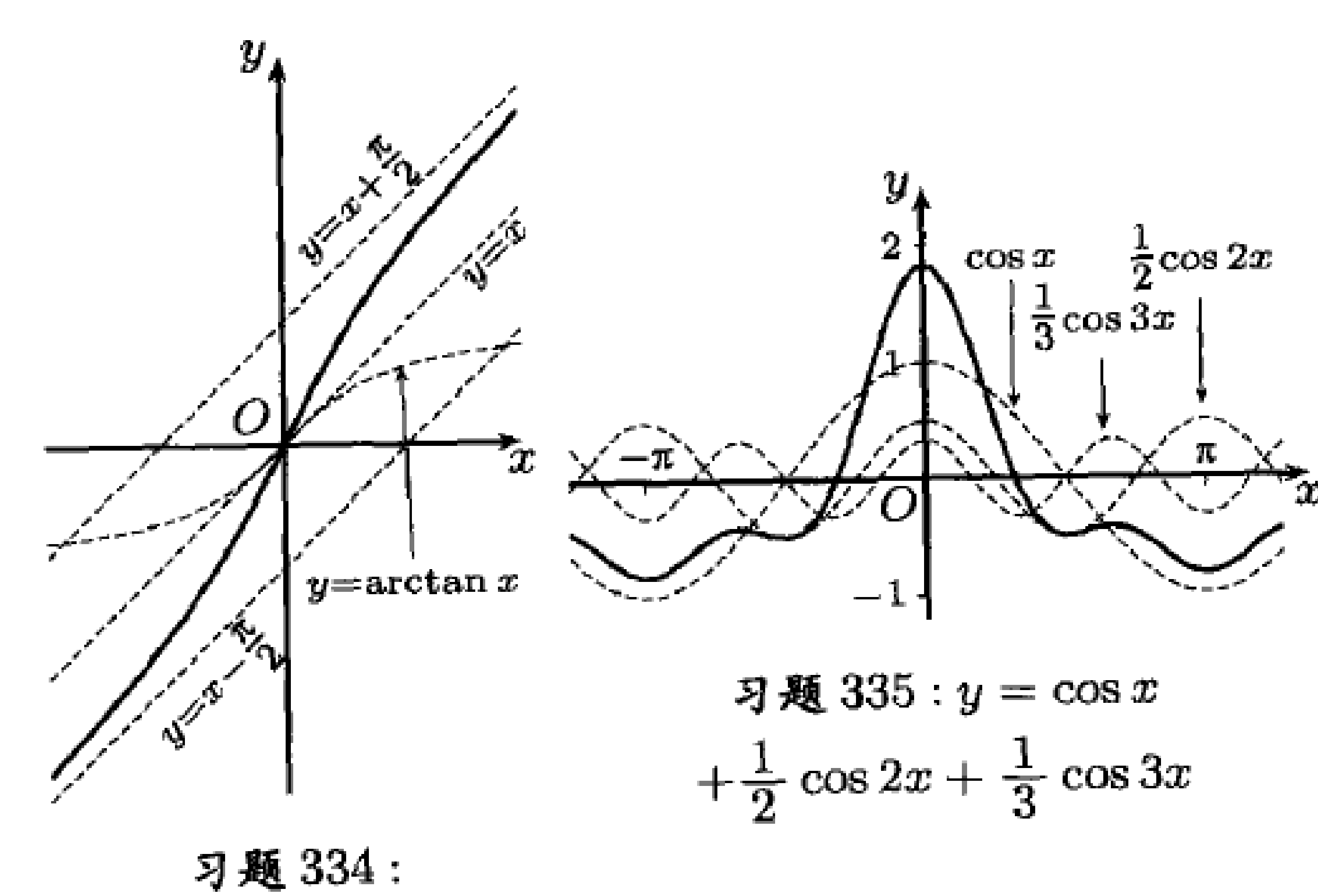


习题 332 :

$y=(x+1)^{-2}+(x-1)^{-2}$



习题 333 : $y=x+\sin x$

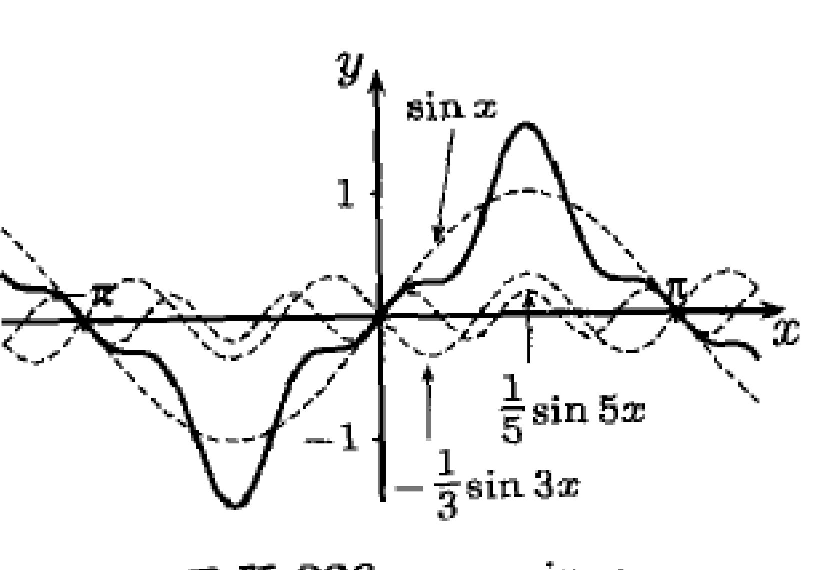


习题 334 :

$y=x+\arctan x$

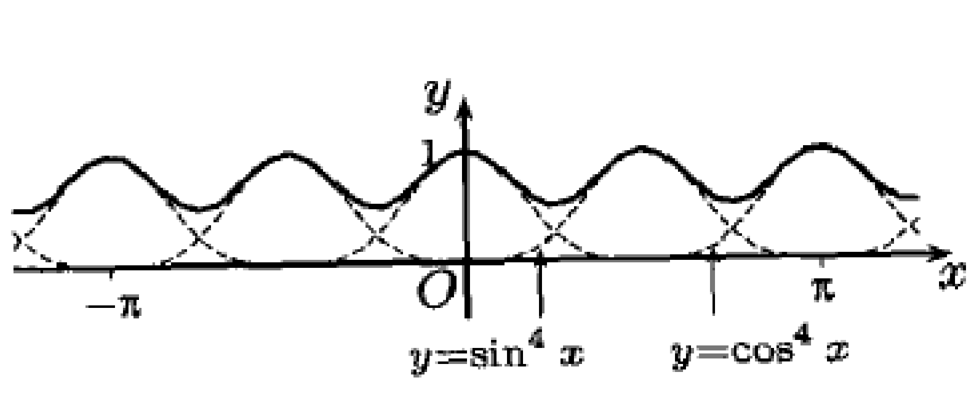
习题 335 : $y=\cos x$

$+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x$



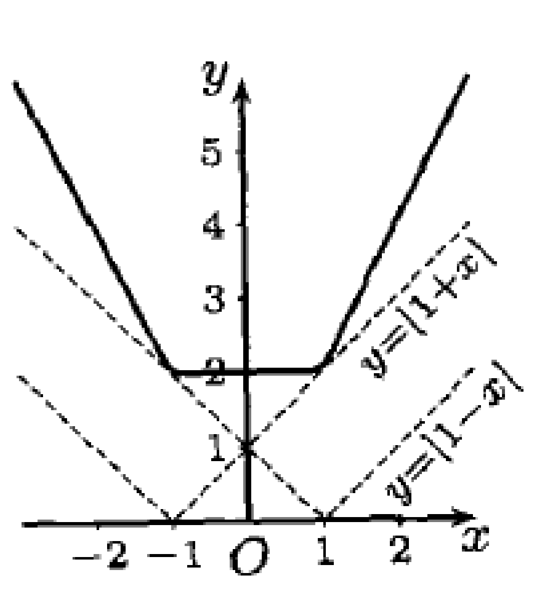
习题 336 : $y=\sin x$

$-\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x$



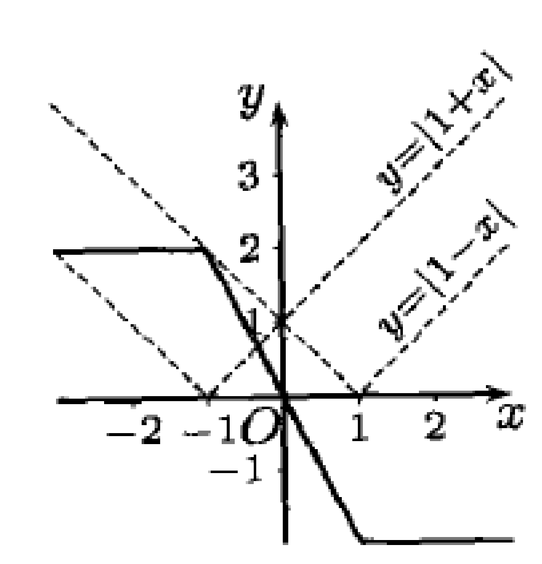
习题 337 :

$y=\sin^4 x+\cos^4 x$



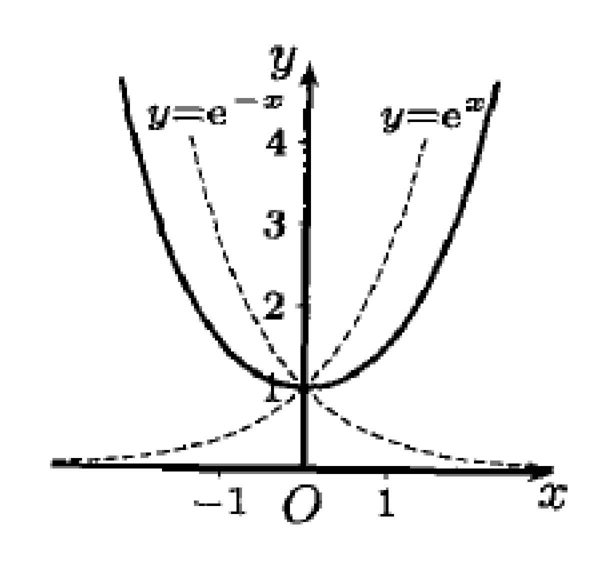
习题 338 :

$y=|1-x|+|1+x|$

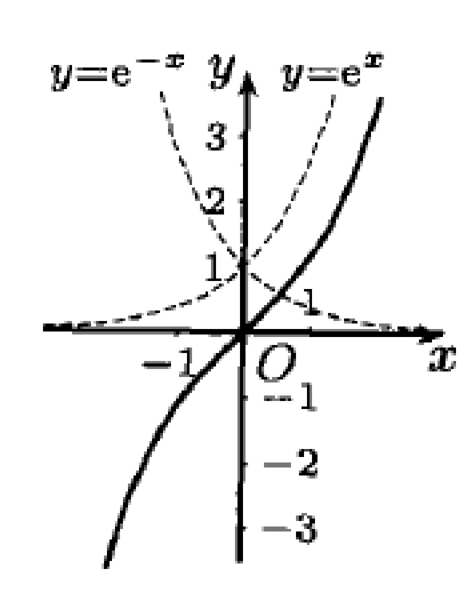


习题 339 :

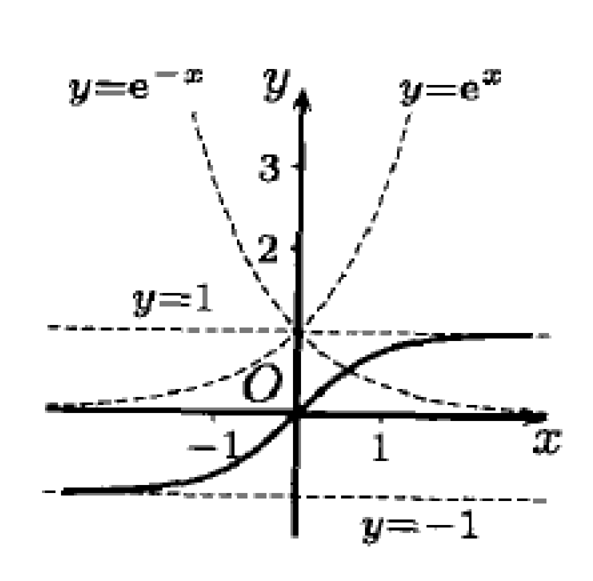
$y=|1-x|-|1+x|$



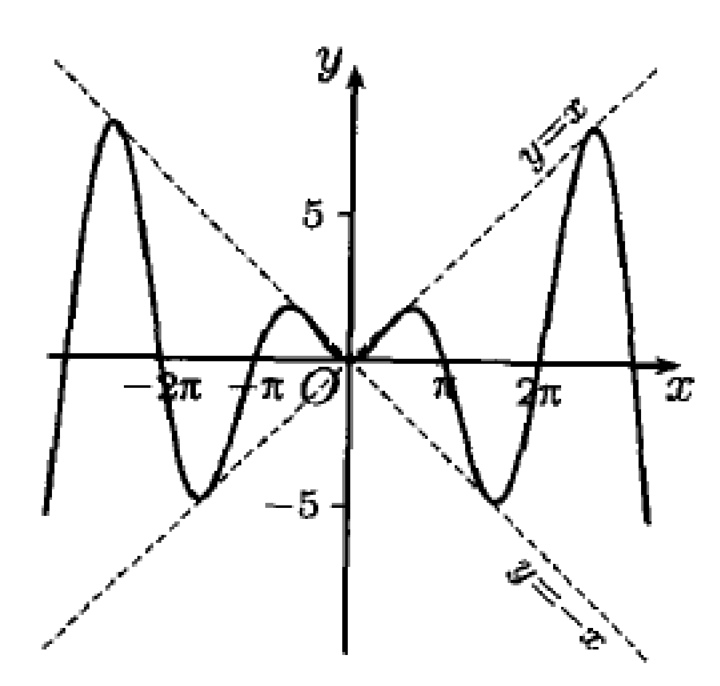
习题 340(a) :
$y = \cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$



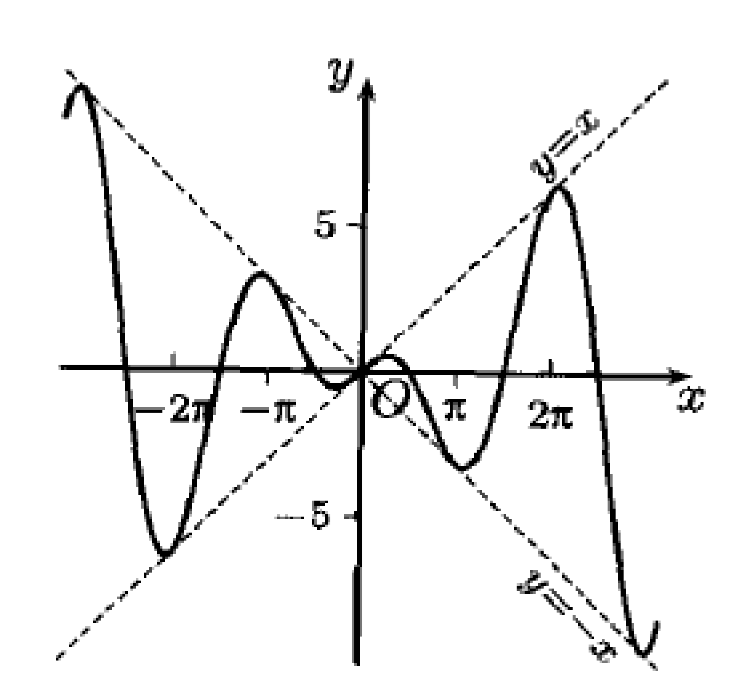
习题 340(b) :
$y = \sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$



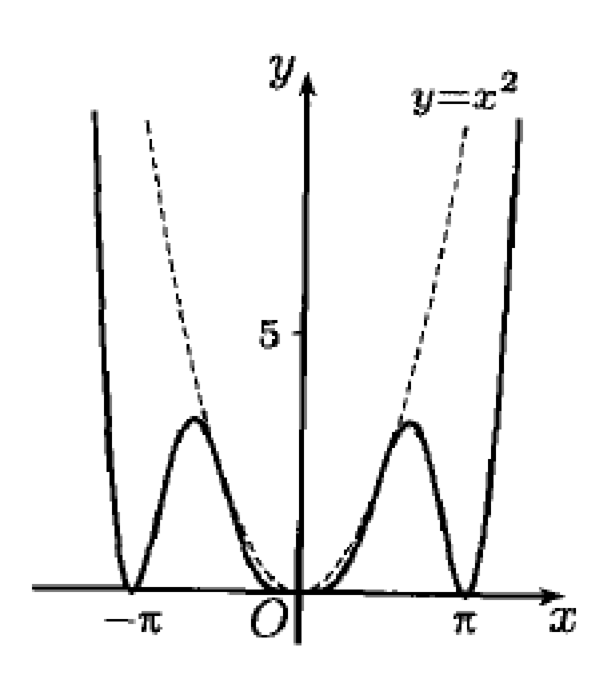
习题 340(c) :
$y = \tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$



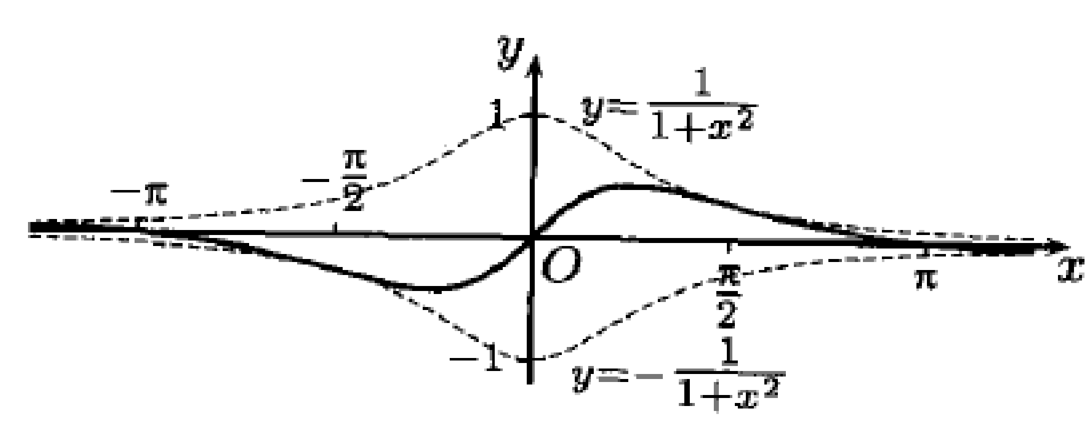
习题 341 : $y = x \sin x$



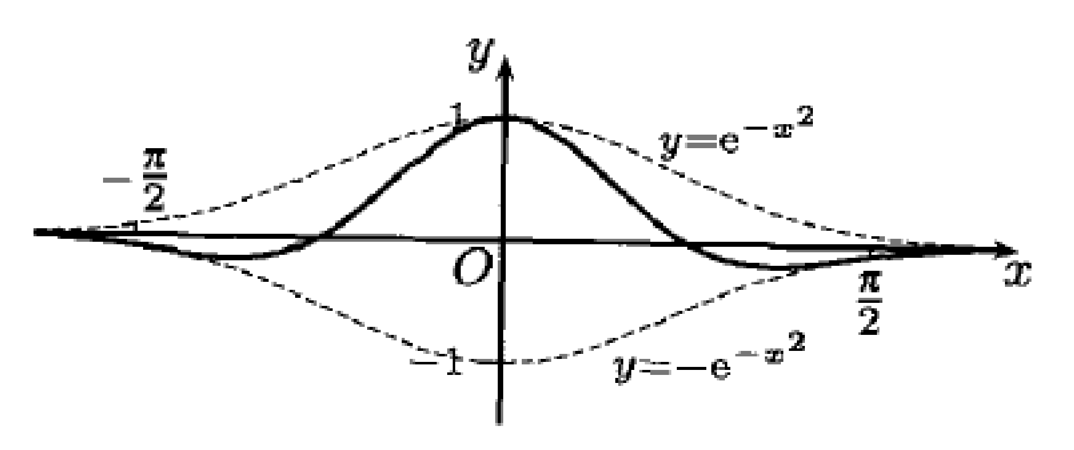
习题 342 : $y = x \cos x$



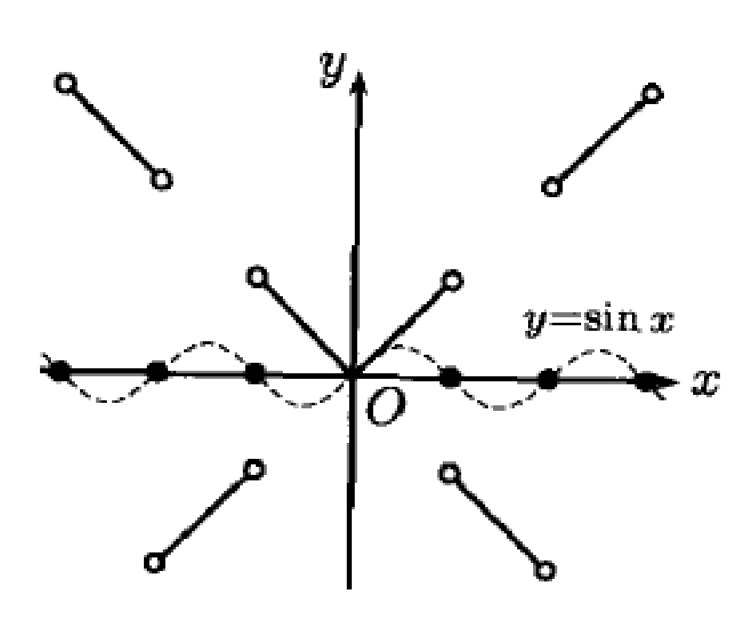
习题 343 : $y = x^2 \sin^2 x$



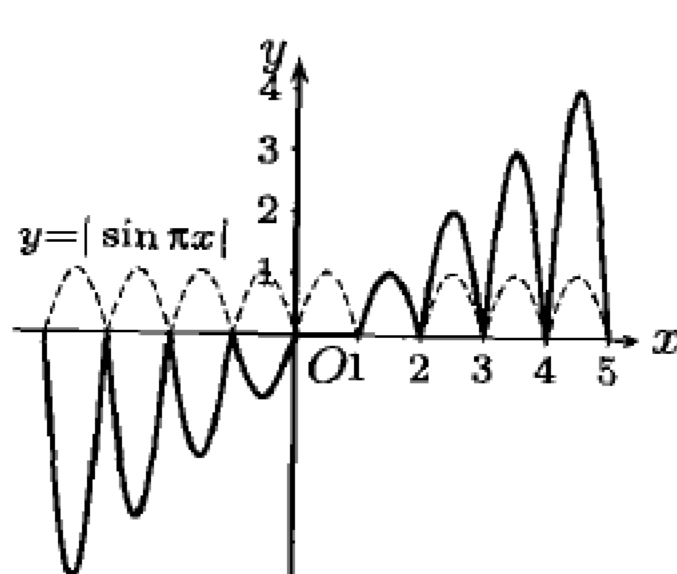
习题 344 : $y = \dfrac{\sin x}{1 + x^2}$



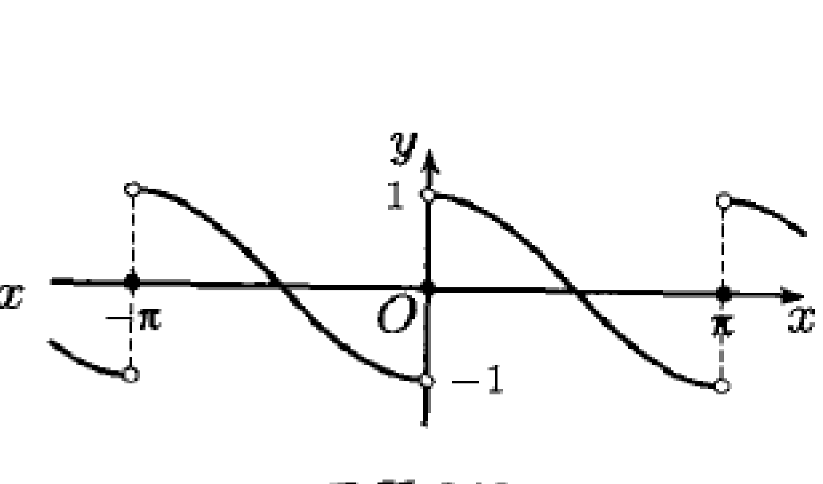
习题 345 : $y = \mathrm{e}^{-x^2} \cos 2x$



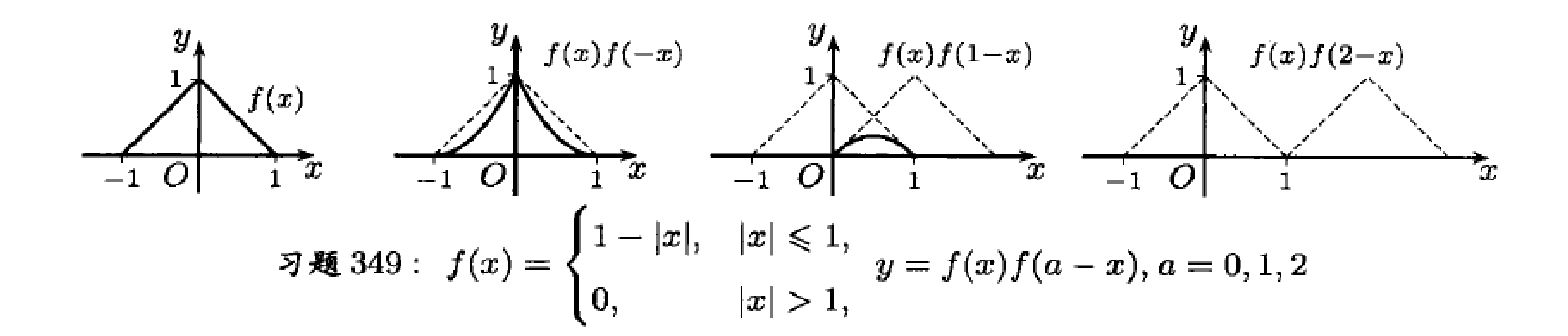
习题 346 :
$y = x \cdot \mathrm{sgn}(\sin x)$



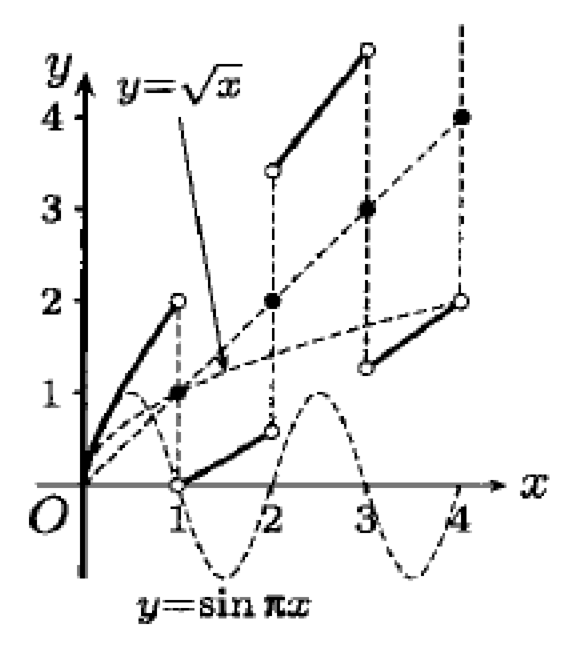
习题 347 :
$y = [x]|\sin \pi x|$



习题 348 :
$y = \cos x \cdot \mathrm{sgn}(\sin x)$

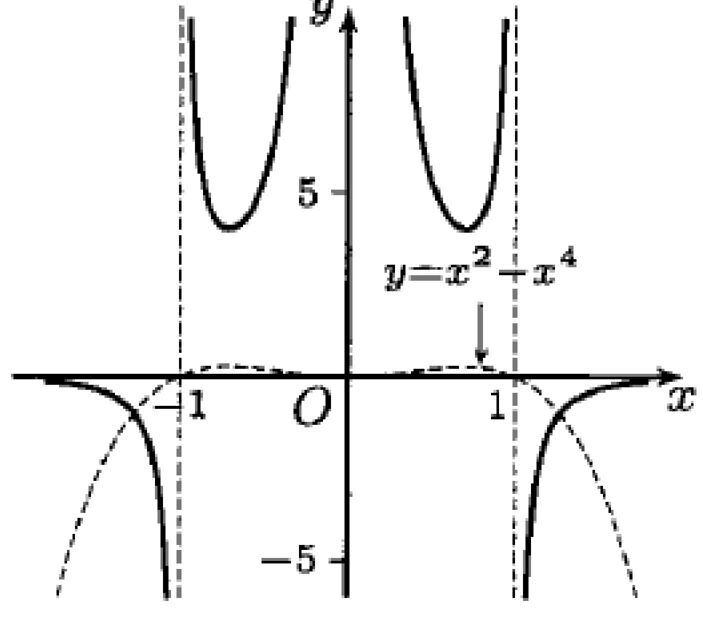


习题 349 : $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $y=f(x)f(a-x), a=0,1,2$



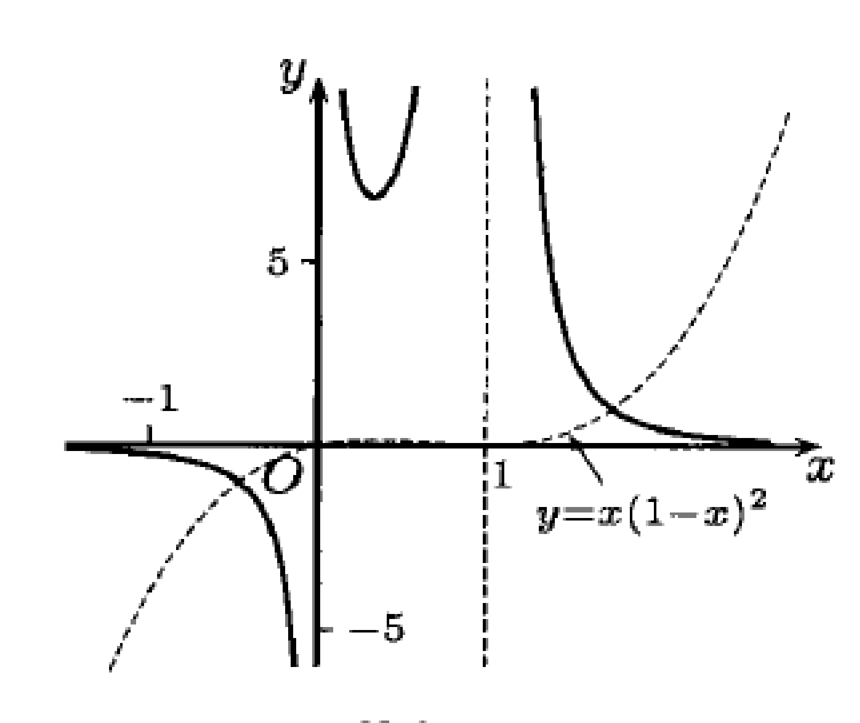
习题 350 :

$y=x+\sqrt{x}\,\mathrm{sgn}(\sin\pi x)$



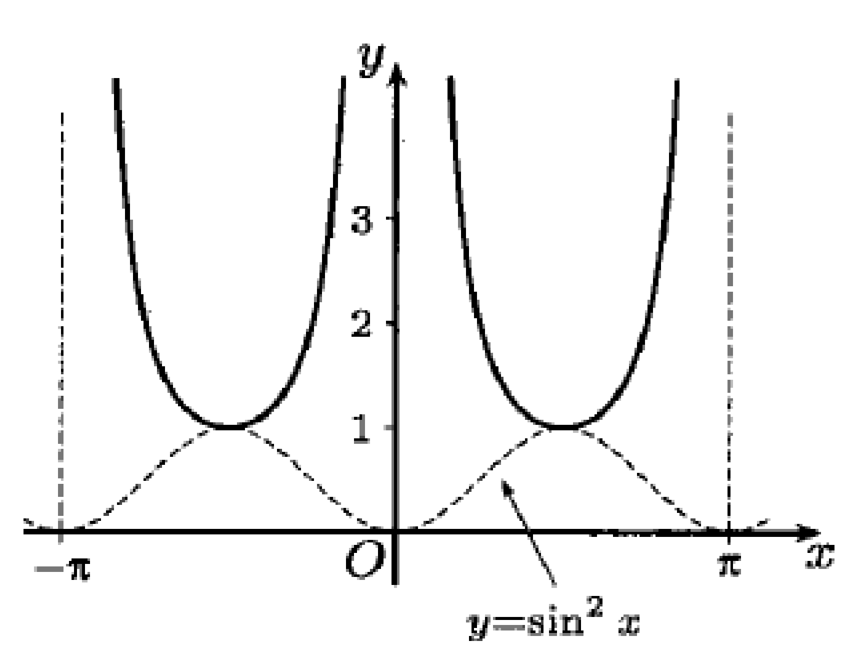
习题 351 :

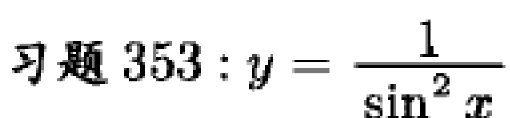
$y=\dfrac{1}{x^2(1-x^2)}$



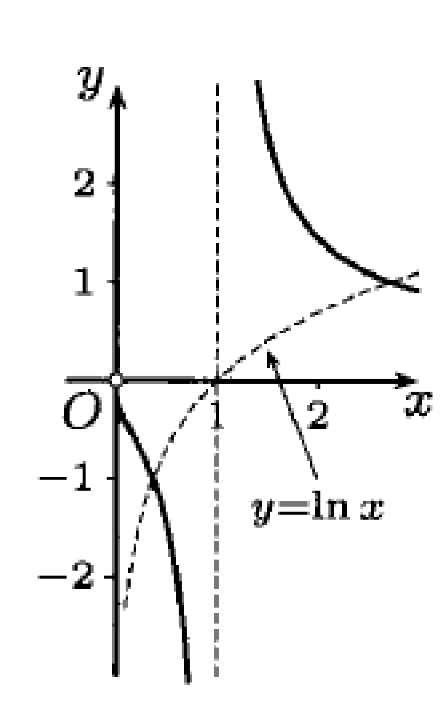
习题 352 :

$y=\dfrac{1}{x(1-x)^2}$

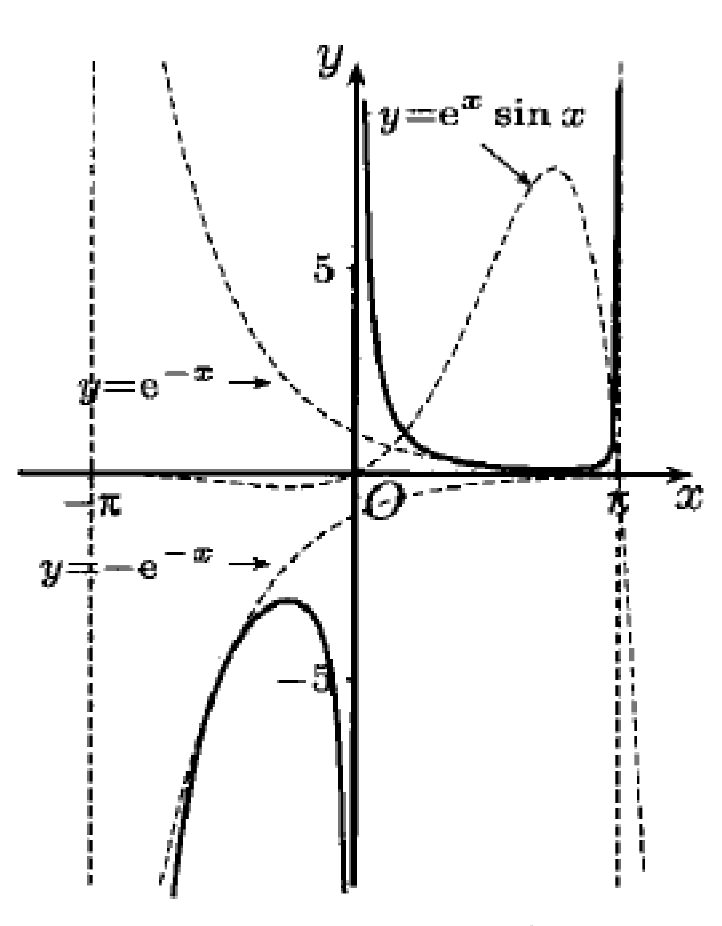




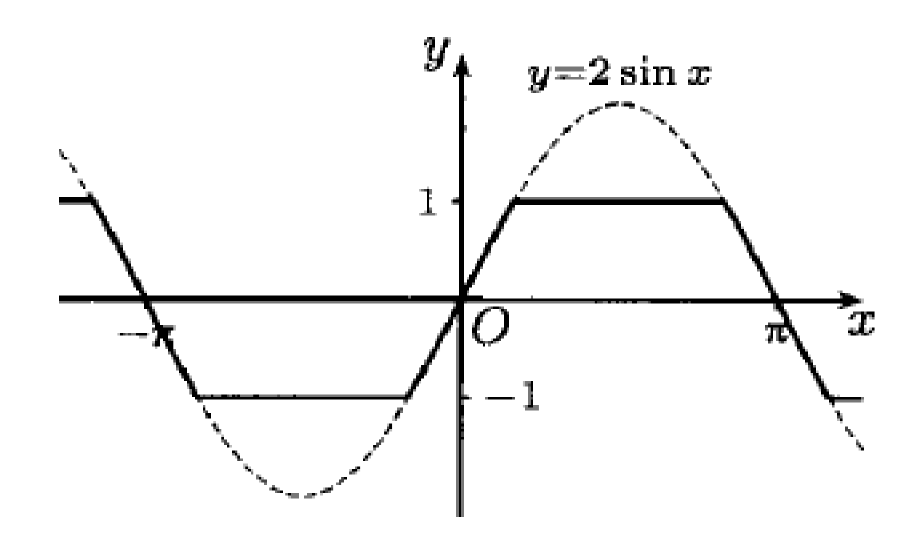
习题 353 : $y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$



习题 354 : $y=\dfrac{1}{\ln x}$

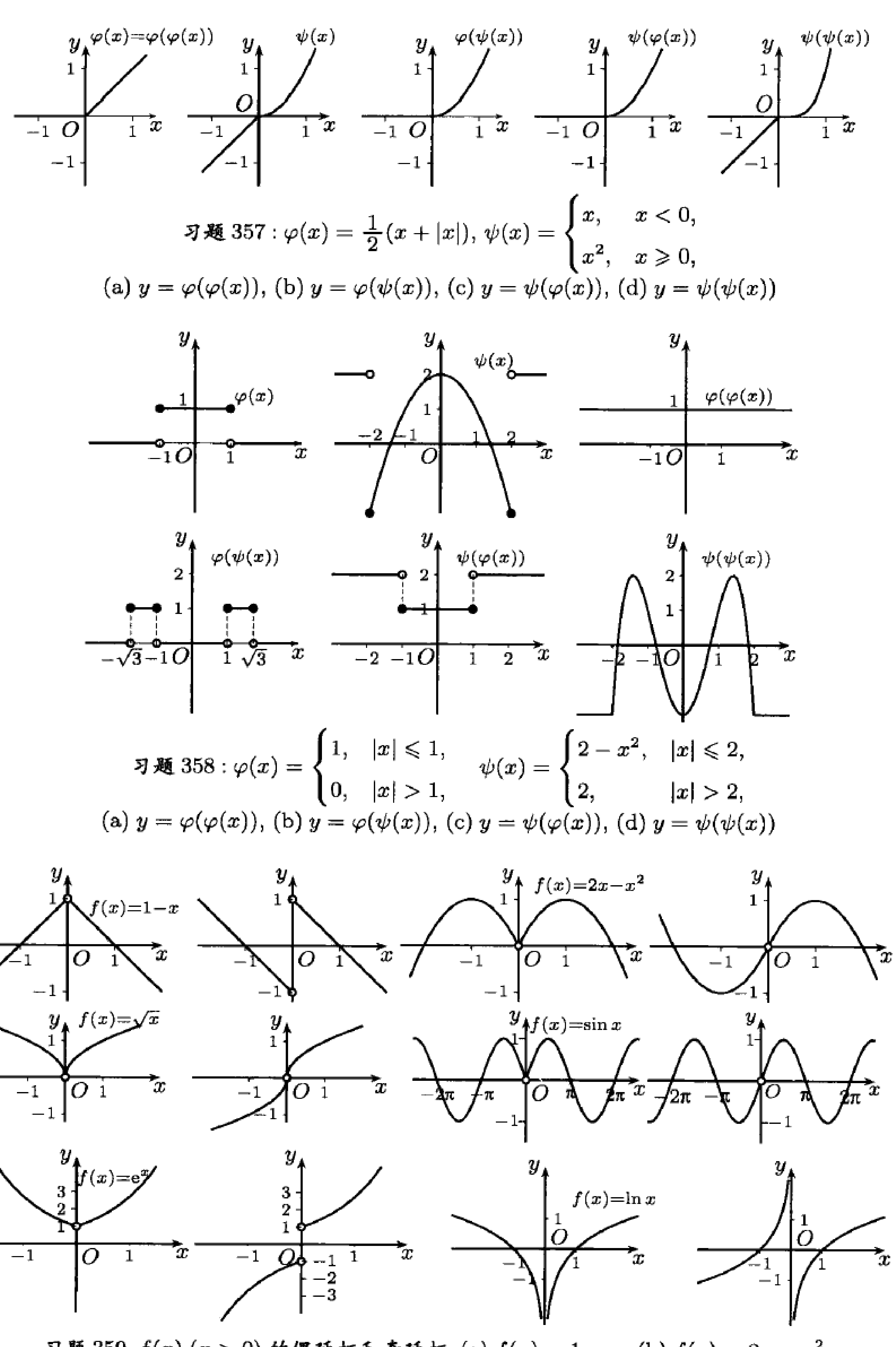


习题 355 : $y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x\sin x}$



习题 356 : $y=f(u)$, $u=2\sin x$,

$$f(u)=\begin{cases}-1, & -\infty<u<-1,\\ u, & -1\leqslant u\leqslant 1,\\ 1, & 1<u<+\infty\end{cases}$$



习题 357 : $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$, $\psi(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$

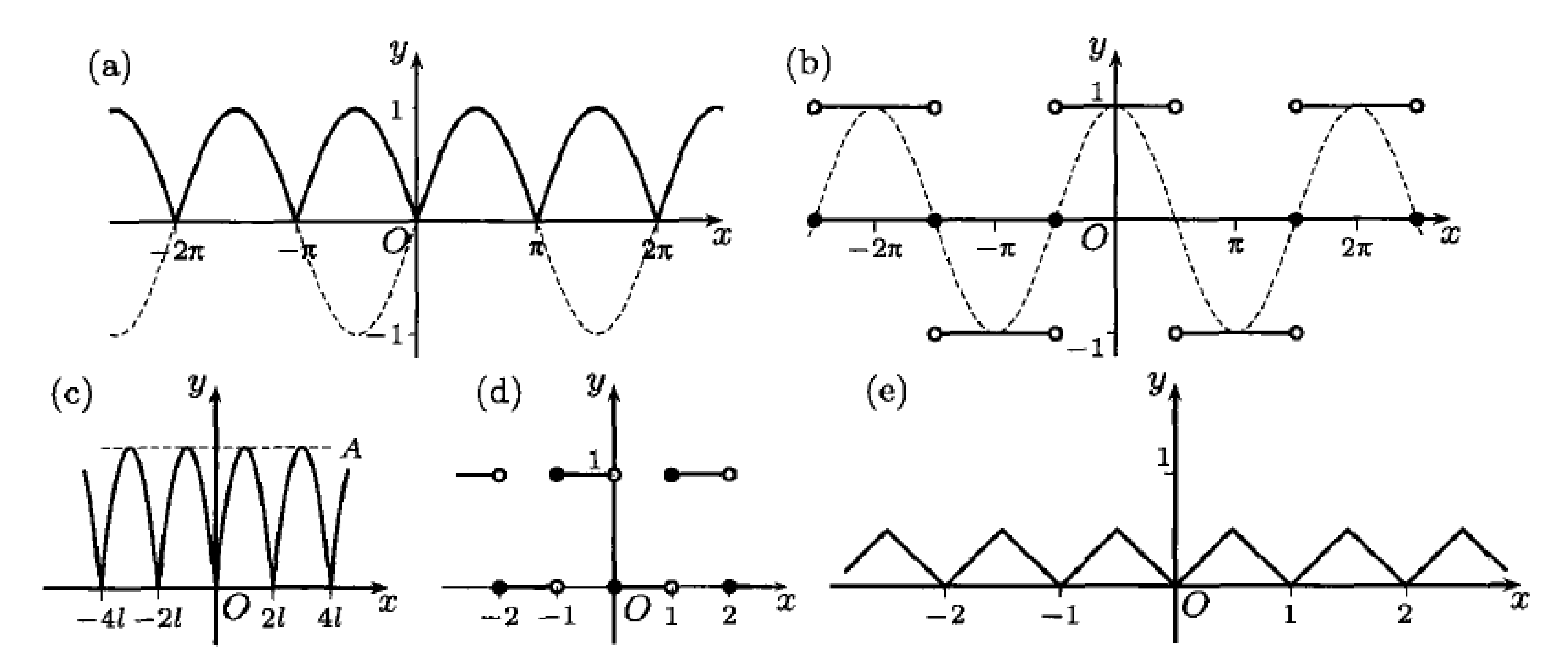
(a) $y=\varphi(\varphi(x))$, (b) $y=\varphi(\psi(x))$, (c) $y=\psi(\varphi(x))$, (d) $y=\psi(\psi(x))$

习题 358 : $\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $\quad\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$

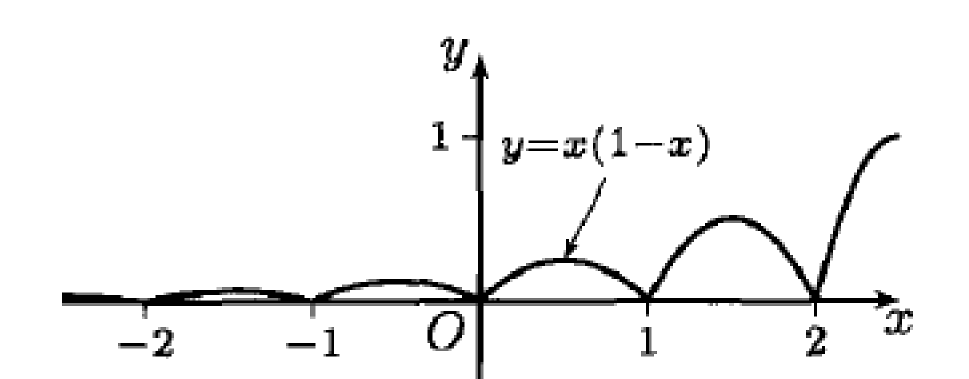
(a) $y=\varphi(\varphi(x))$, (b) $y=\varphi(\psi(x))$, (c) $y=\psi(\varphi(x))$, (d) $y=\psi(\psi(x))$

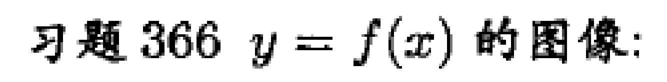
习题 359 $f(x)$ $(x>0)$ 的偶延拓和奇延拓: (a) $f(x)=1-x$, (b) $f(x)=2x-x^2$,

(c) $f(x)=\sqrt{x}$, (d) $f(x)=\sin x$, (e) $f(x)=\mathrm{e}^x$, (f) $f(x)=\ln x$

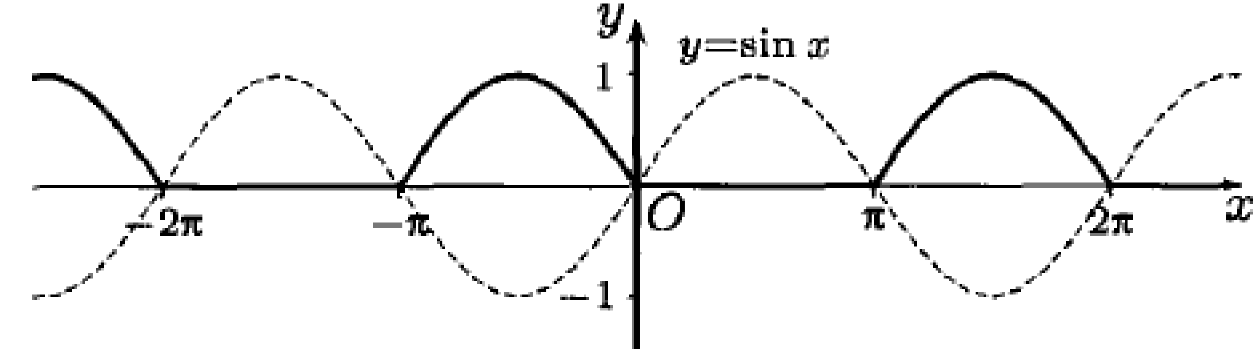


习题 362　几个周期函数的图像: (a) $y=|\sin x|$, (b) $y=\operatorname{sgn}(\cos x)$, (c) $y=f(x)$, 其中 $f(x)=A\frac{x}{l}\left(2-\frac{x}{l}\right)$, 其中 $0\leqslant x\leqslant 2l$ 且 $f(x+2l)\equiv f(x)$, (d) $y=[x]-2[\frac{x}{2}]$, (e) $f(x)=(x)$, 其中 (x) 为数 x 到与它最接近的整数的距离

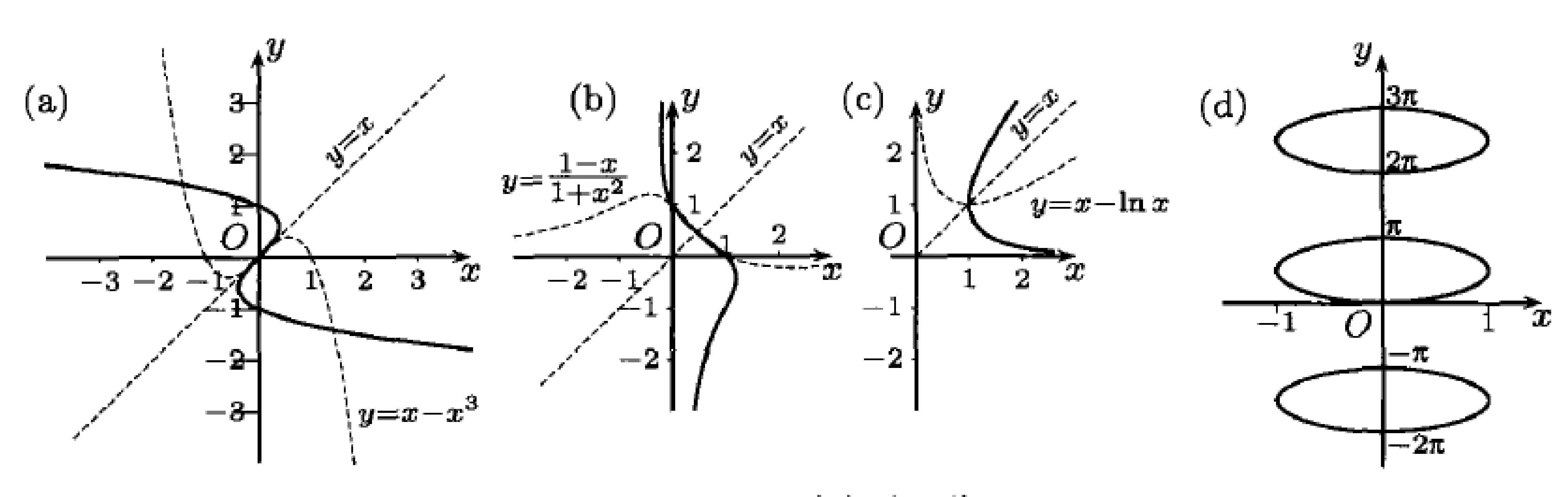




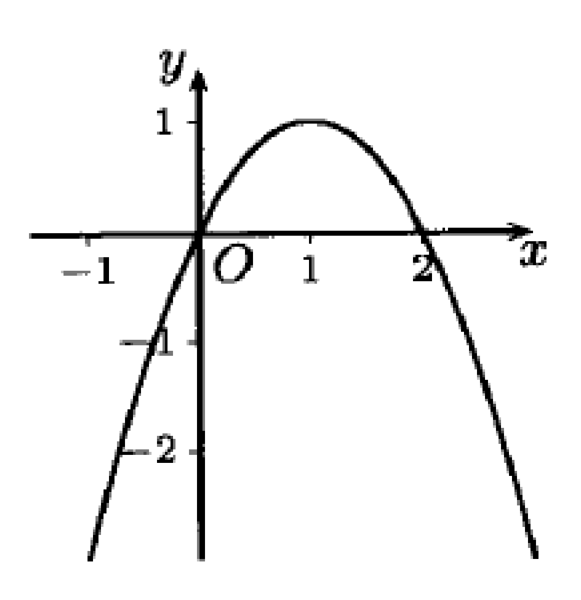
习题 366　$y=f(x)$ 的图像:
f 满足 $f(x+1)=2f(x)$,
且当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x(1-x)$



习题 367　$y=f(x)$ 的图像:
f 满足 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$,
且当 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 时 $f(x)=0$

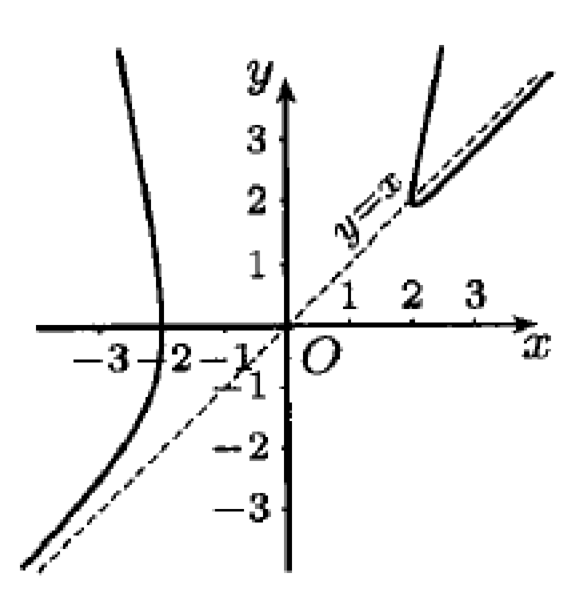


习题 368　$y=f(x)$ 的图像:
(a) $x=y-y^3$, (b) $x=\dfrac{1-y}{1+y^2}$, (c) $x=y-\ln y$, (d) $x^2=\sin y$



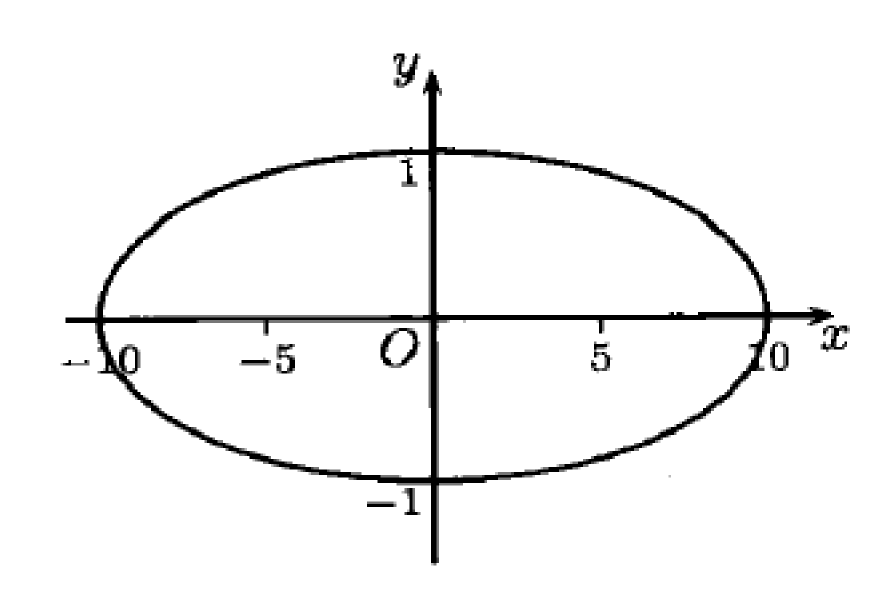
习题 369(a) :


$x=1-t, y=1-t^2$



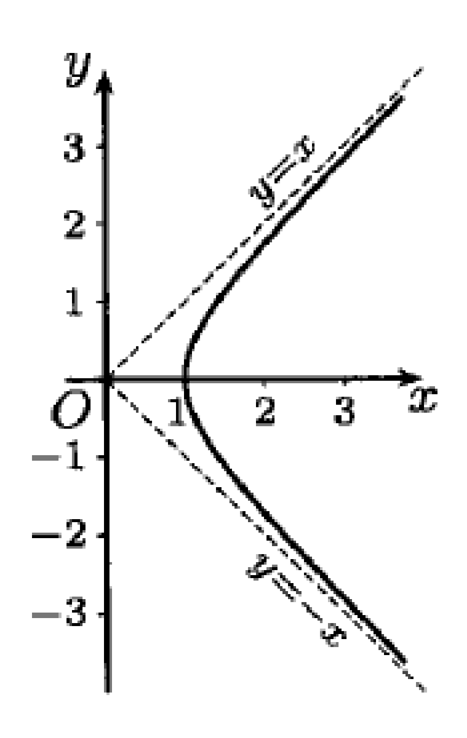
习题 369(b) :

$x=t+\dfrac{1}{t}, y=t+\dfrac{1}{t^2}$



习题 369(c) :

$x=10\cos t, y=\sin t$ (椭圆)

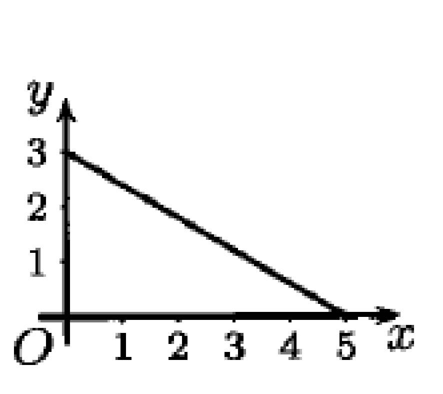


习题 369(d) :

$x=\cosh t$,

$y=\sinh t$

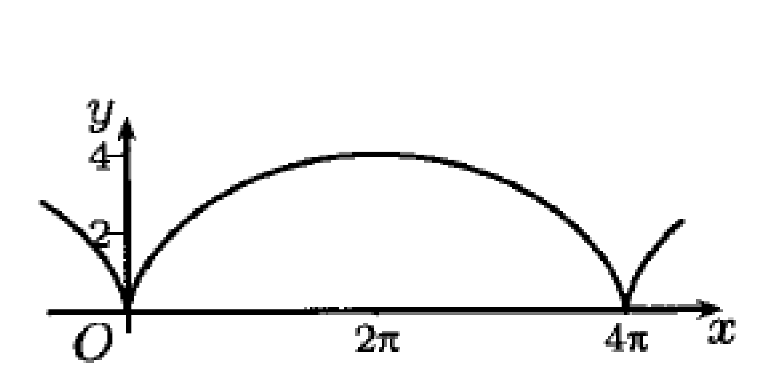
(双曲线)



习题 369(e) :

$x=5\cos^2 t$,

$y=3\sin^2 t$

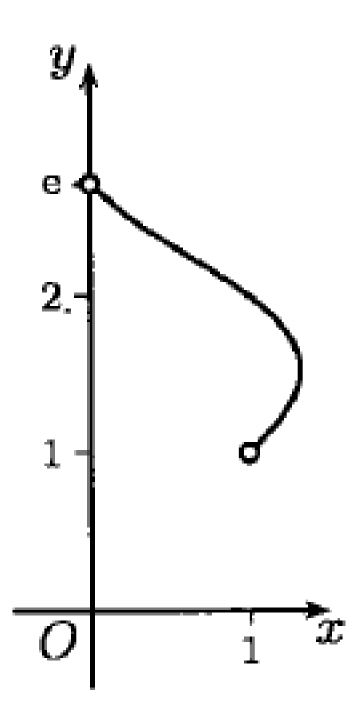


习题 369(f) :

$x=2(t-\sin t)$,

$y=2(1-\cos t)$

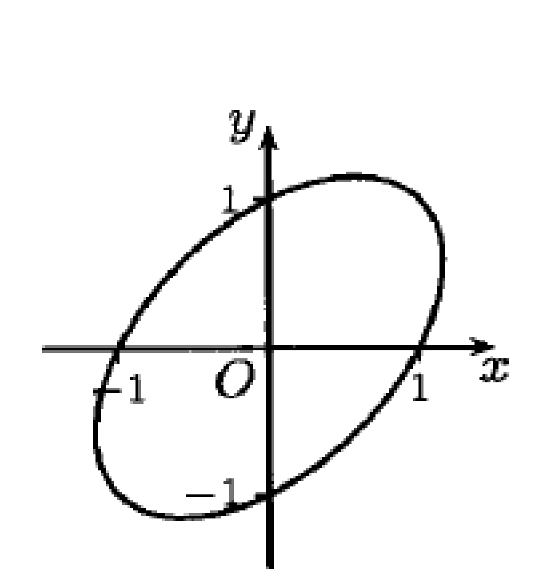
(摆线)



习题 369(g) :

$x=\sqrt[t+1]{t}$,

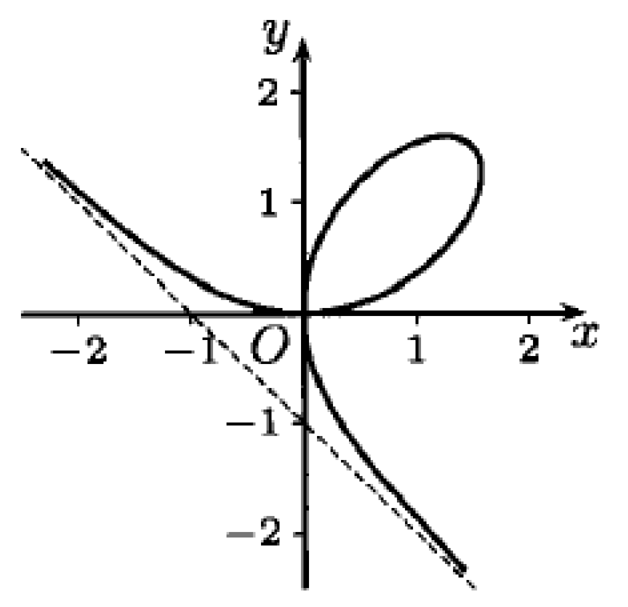
$y=\sqrt[t]{t+1}\ (t>0)$



习题 370.1(a) :

$x^2-xy+y^2=1$

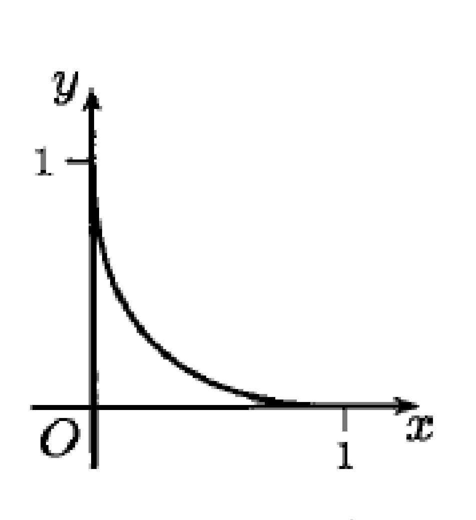
(椭圆)



习题 370.1(b) :

$x^3+y^3-3xy=0$

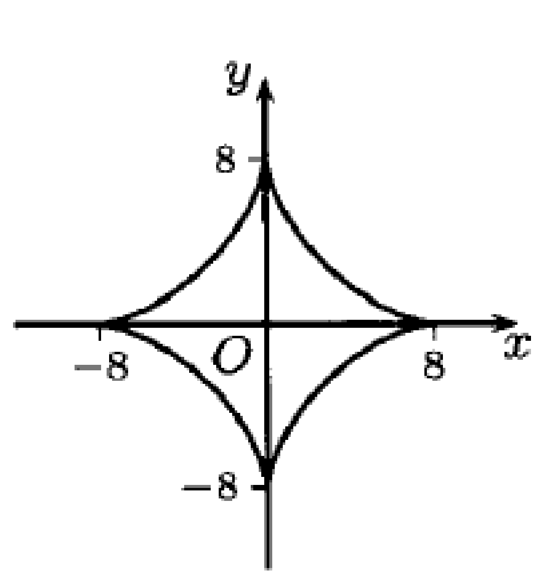
(笛卡儿叶形线)



习题 370.1(c) :

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$

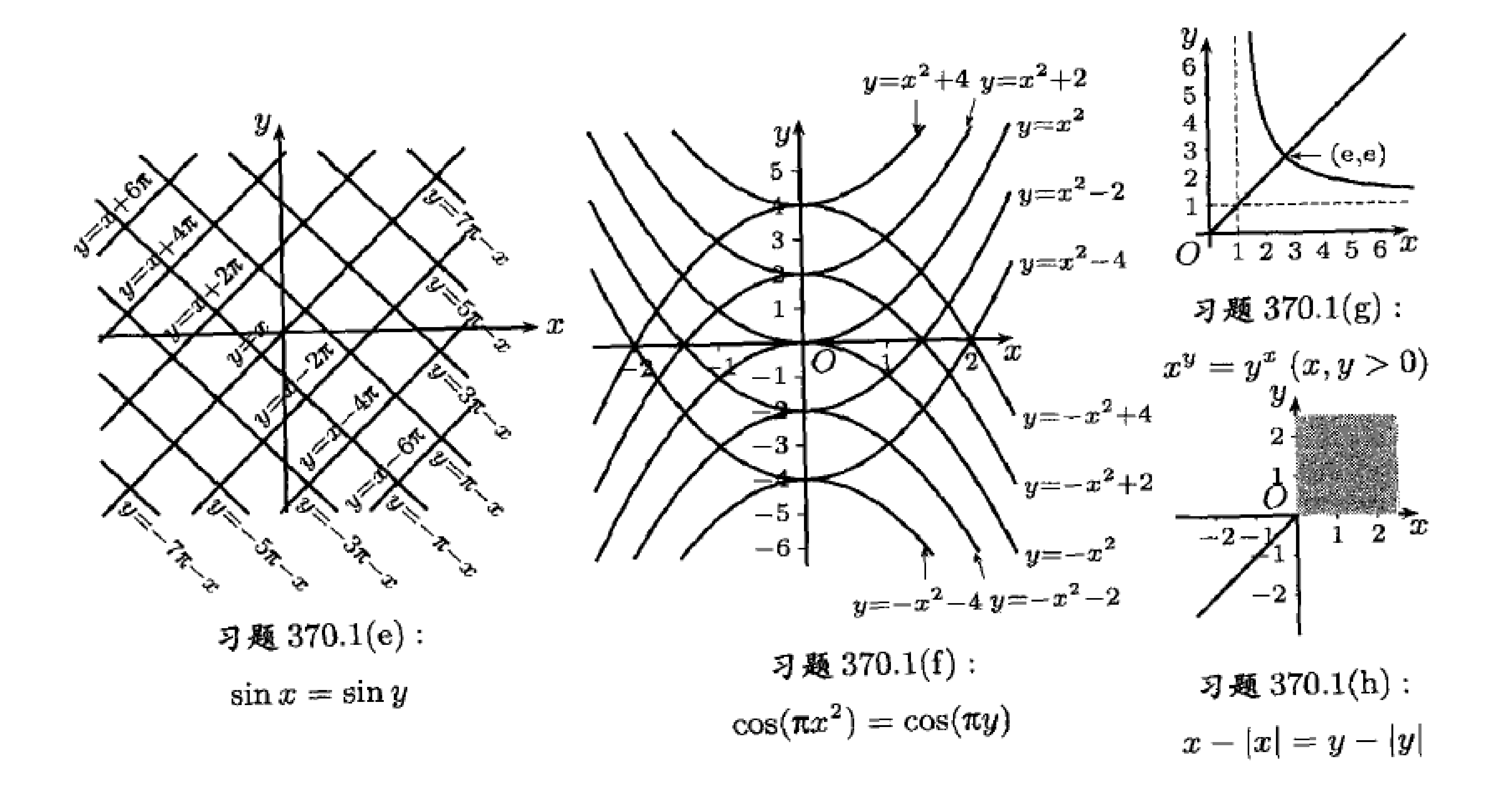
(抛物线)



习题 370.1(d) :

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4$

(星形线)



习题 370.1(e)：

$\sin x = \sin y$

习题 370.1(f)：

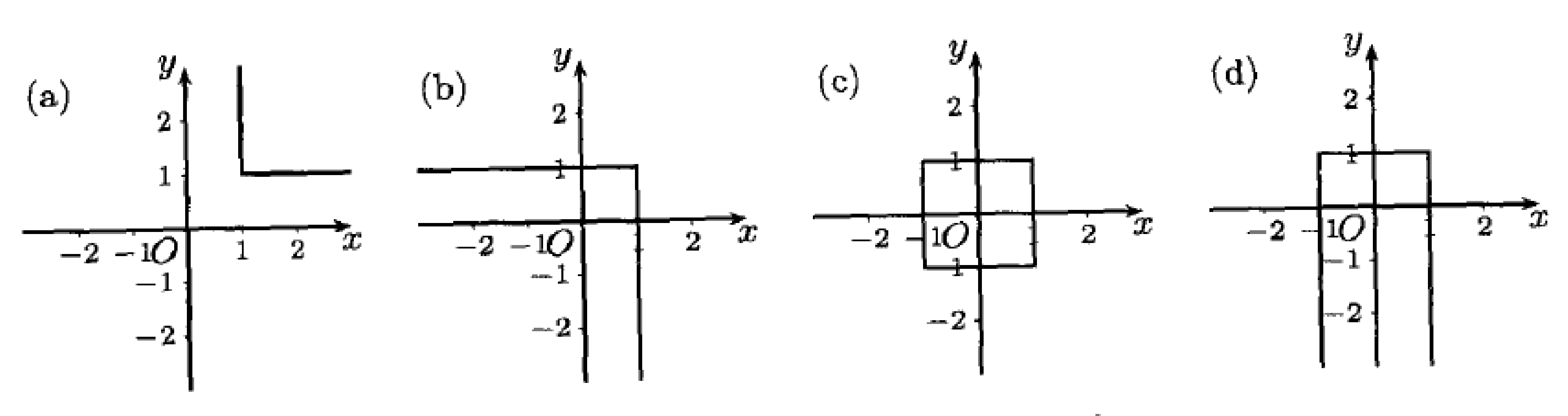
$\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$

习题 370.1(g)：

$x^y = y^x\ (x, y > 0)$

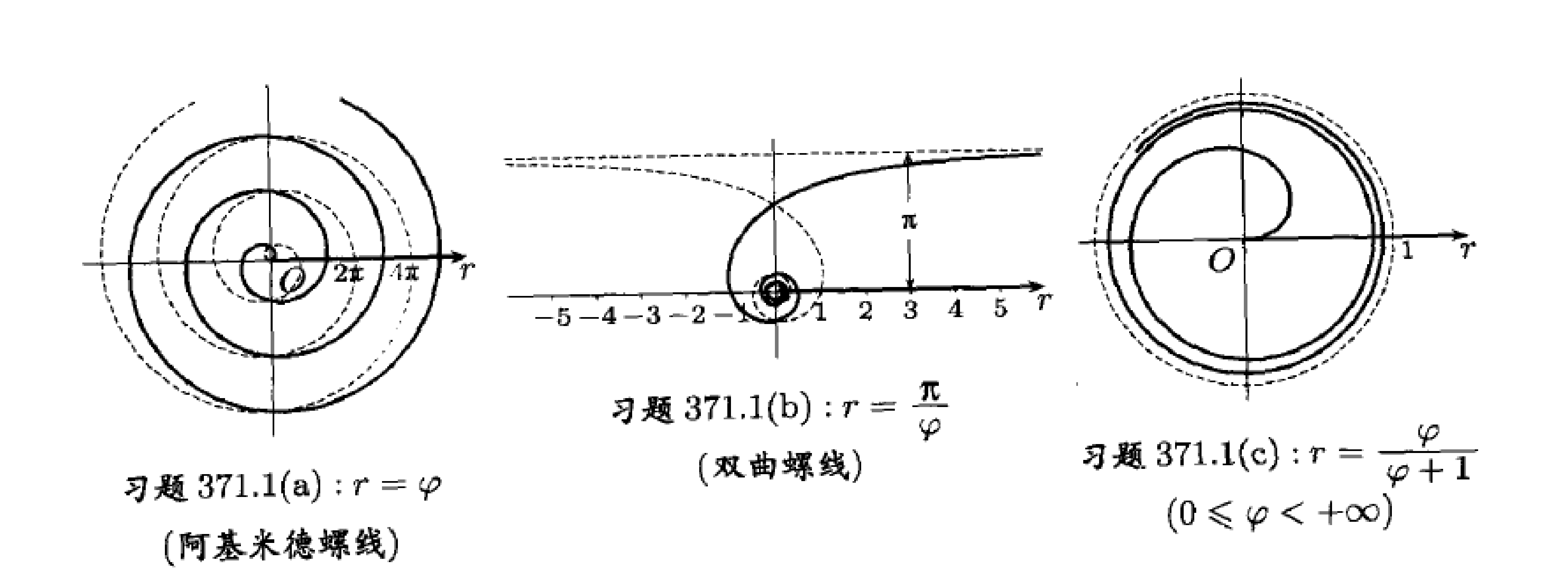
习题 370.1(h)：

$x - |x| = y - |y|$



习题 370.2: (a) $\min\{x, y\} = 1$, (b) $\max\{x, y\} = 1$,

(c) $\max\{|x|, |y|\} = 1$, (d) $\min\{x^2, y\} = 1$



习题 371.1(a)：$r = \varphi$

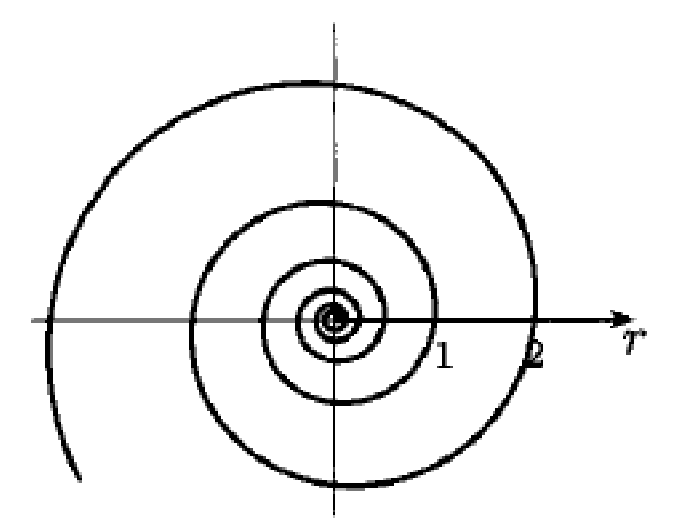
(阿基米德螺线)

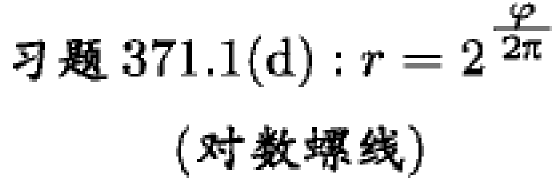
习题 371.1(b)：$r = \dfrac{\pi}{\varphi}$

(双曲螺线)

习题 371.1(c)：$r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}$

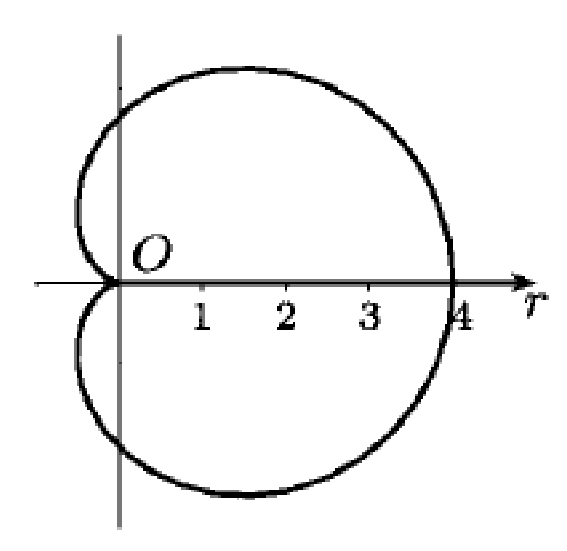
$(0 \leqslant \varphi < +\infty)$





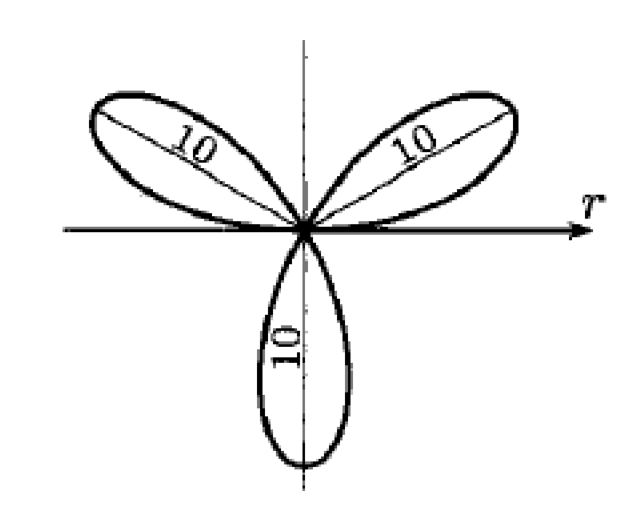
习题 371.1(d) : $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$

(对数螺线)



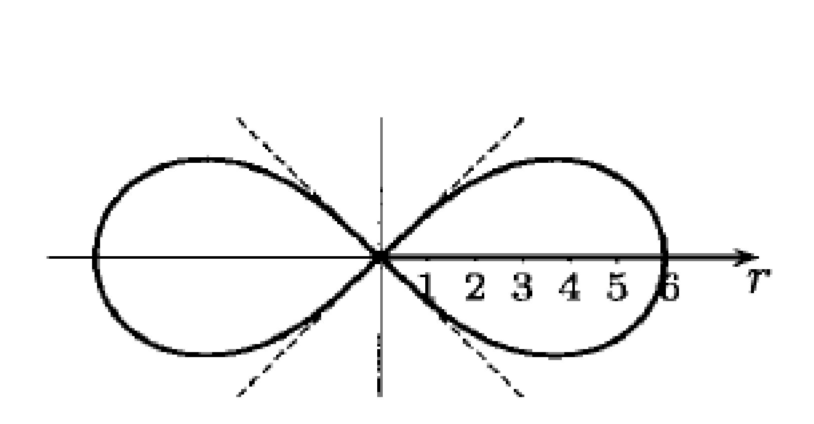
习题 371.1(e) : $r = 2(1 + \cos\varphi)$

(心脏线)



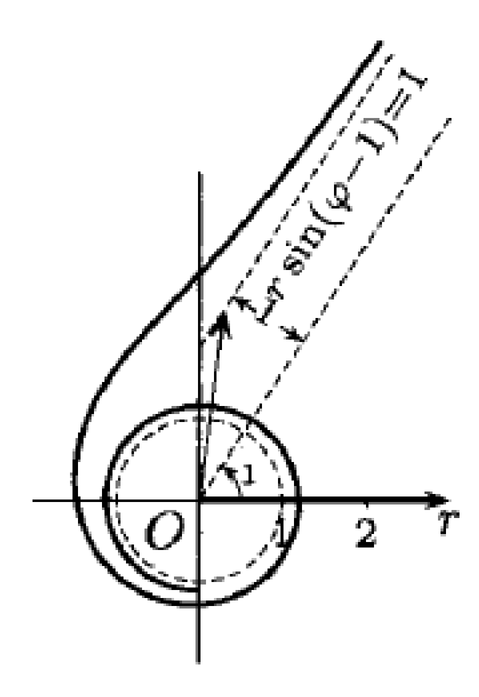
习题 371.1(f) : $r = 10\sin 3\varphi$

(三叶玫瑰线)



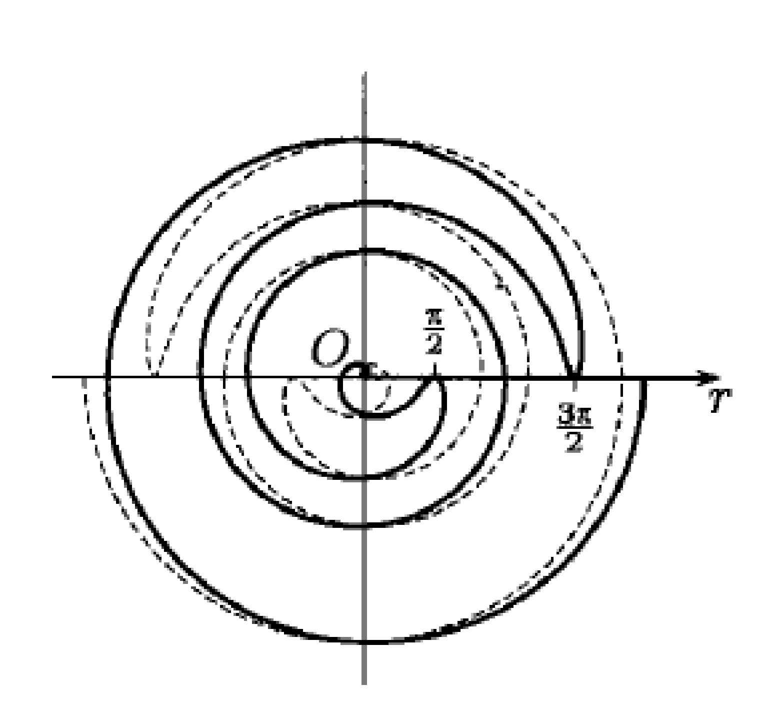
习题 371.1(g) : $r^2 = 36\cos 2\varphi$

(伯努利双纽线)

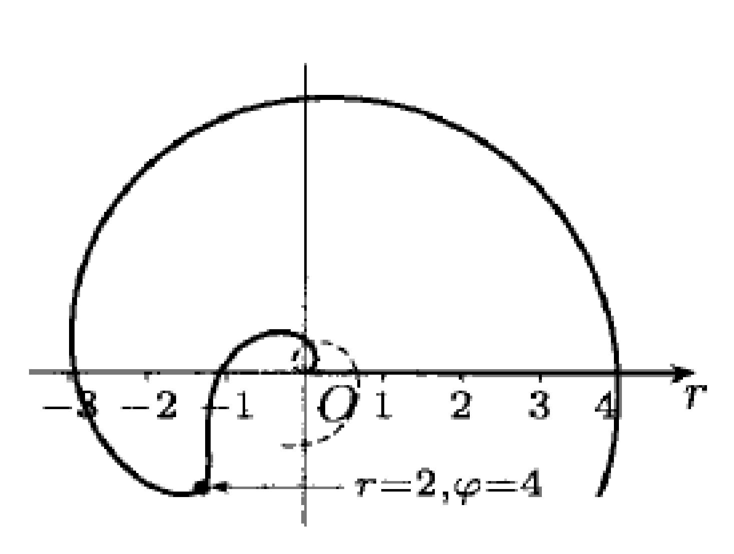


习题 371.1(h) : $\varphi = \dfrac{r}{r-1}$

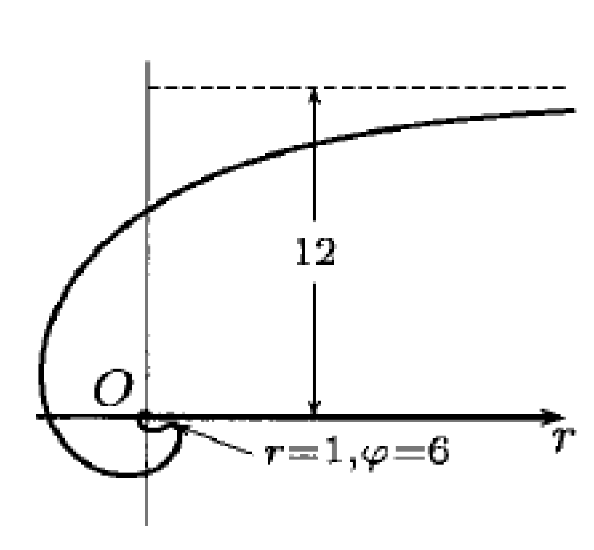
$(r > 1)$



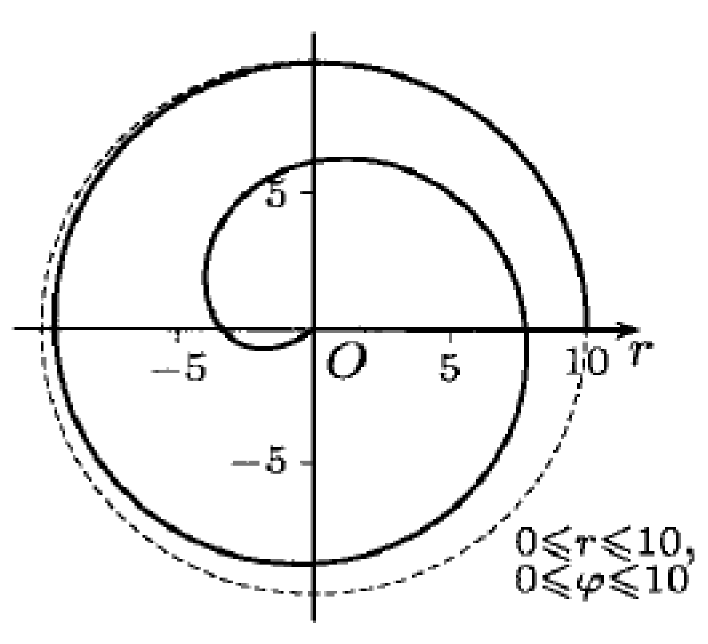
习题 371.1(i) : $\varphi = 2\pi \sin r$



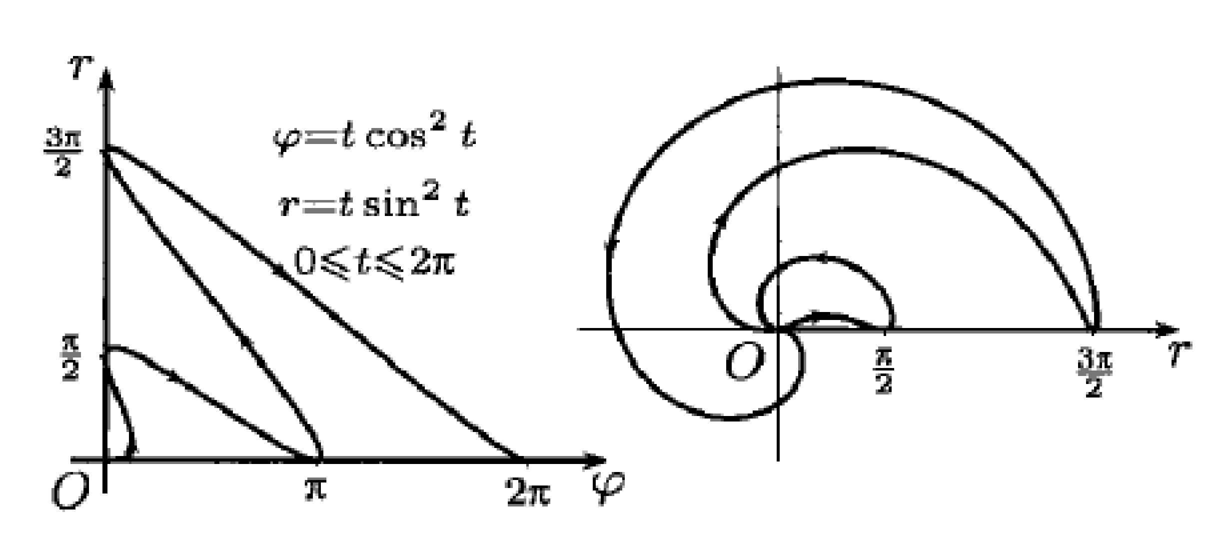
习题 371.2(a) : $\varphi = 4r - r^2$



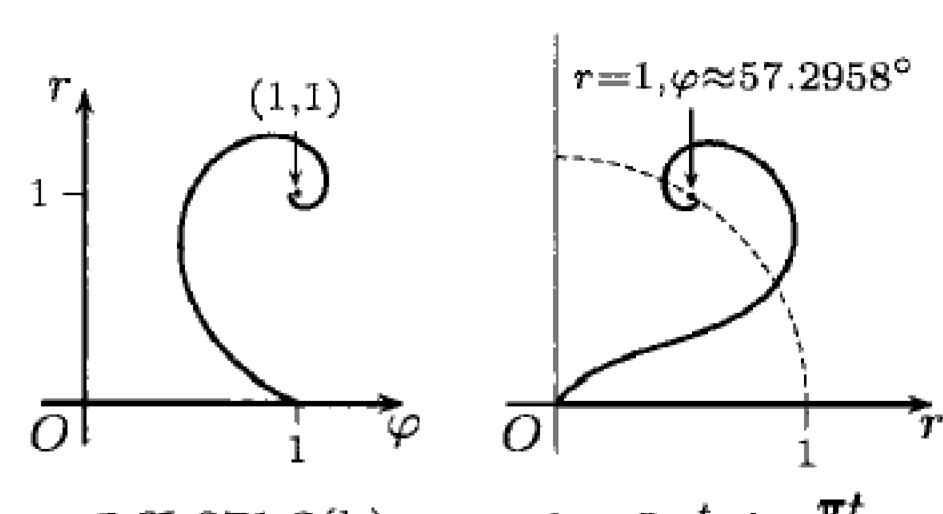
习题 371.2(b) : $\varphi = \dfrac{12\,r}{1 + r^2}$



习题 371.2(c) : $r^2 + \varphi^2 = 100$

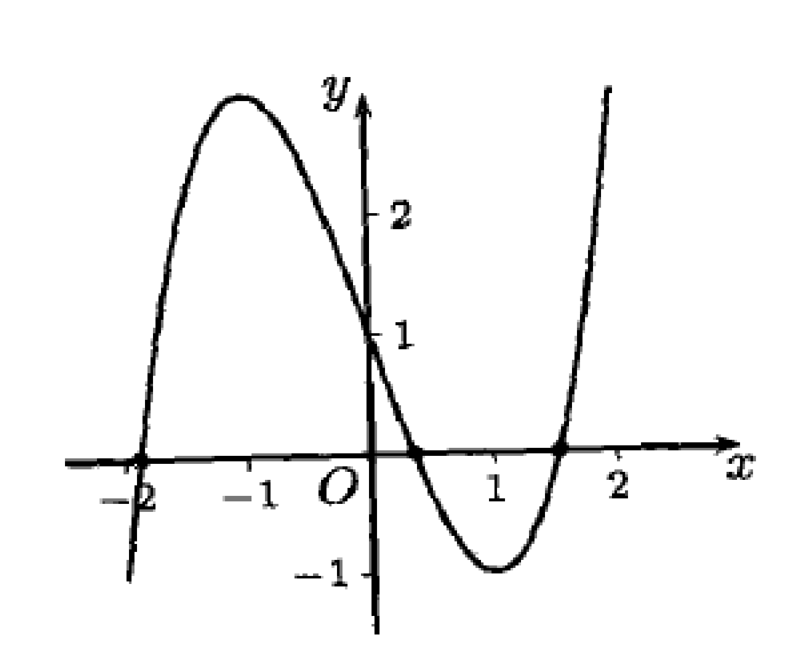


习题 371.3(a) : $\varphi = t\cos^2 t, r = t\sin^2 t$

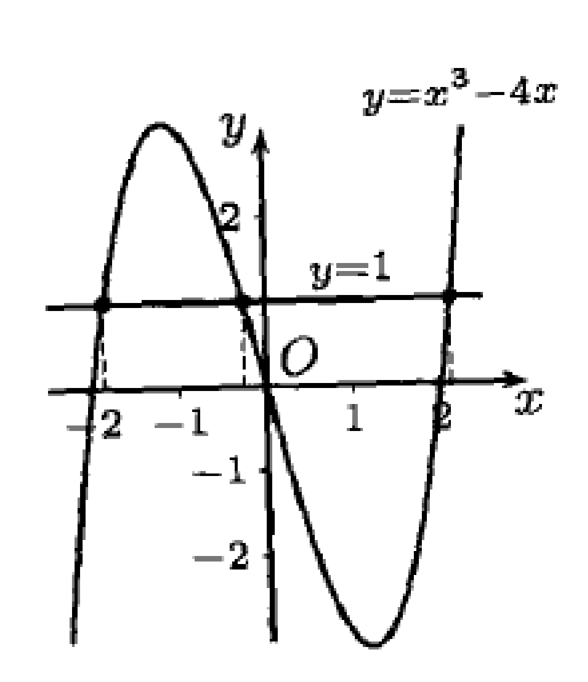


习题 371.3(b) : $\varphi = 1 - 2^{-t}\sin\dfrac{\pi t}{2}$,

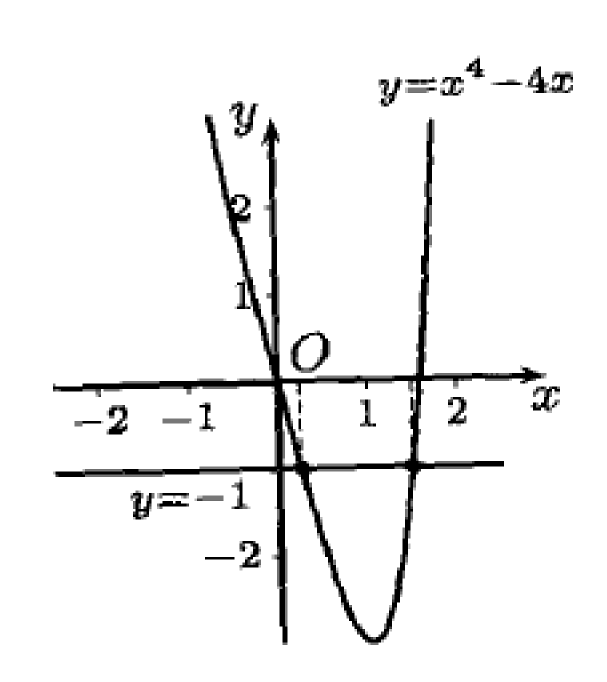
$r = 1 - 2^{-t}\cos\dfrac{\pi t}{2}$



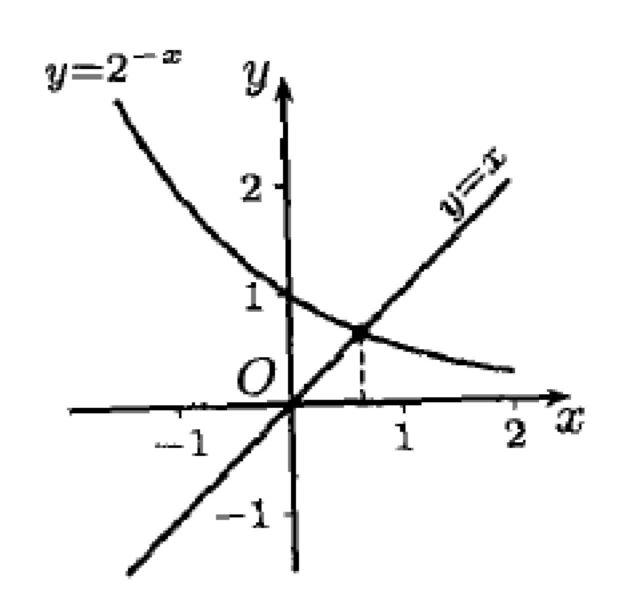
习题 372：求 $x^3-3x+1=0$ 的近似解



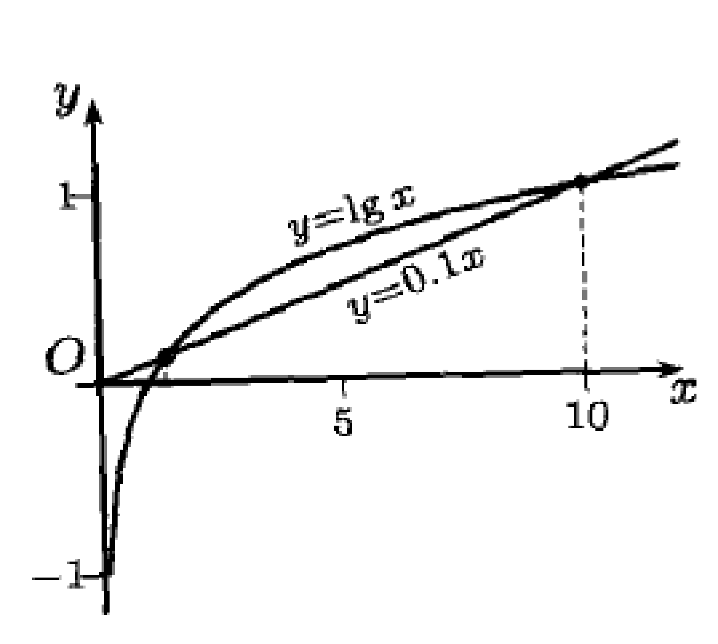
习题 373：求 $x^3-4x-1=0$ 的近似解



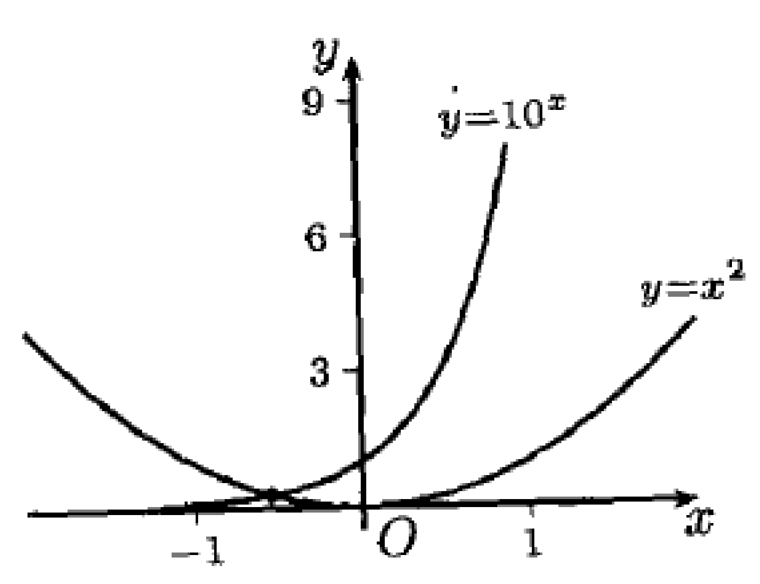
习题 374：求 $x^4-4x+1=0$ 的近似解



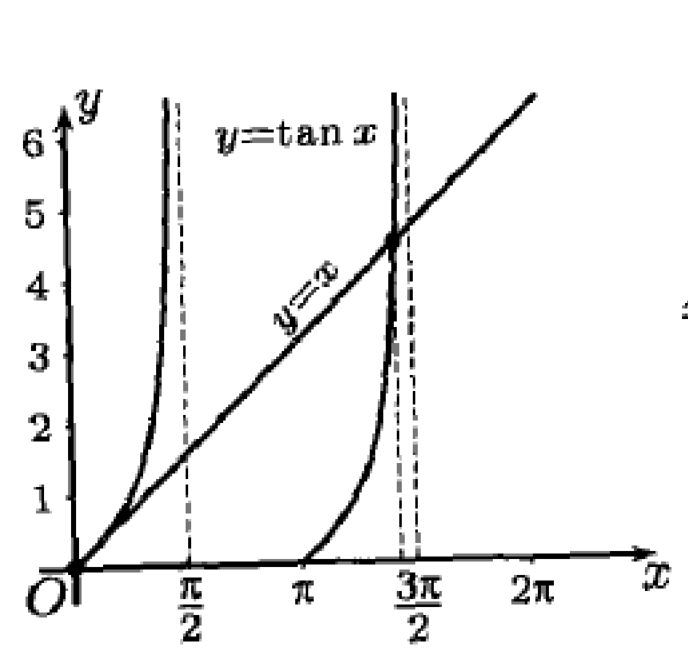
习题 375：求 $x=2^{-x}$ 的近似解



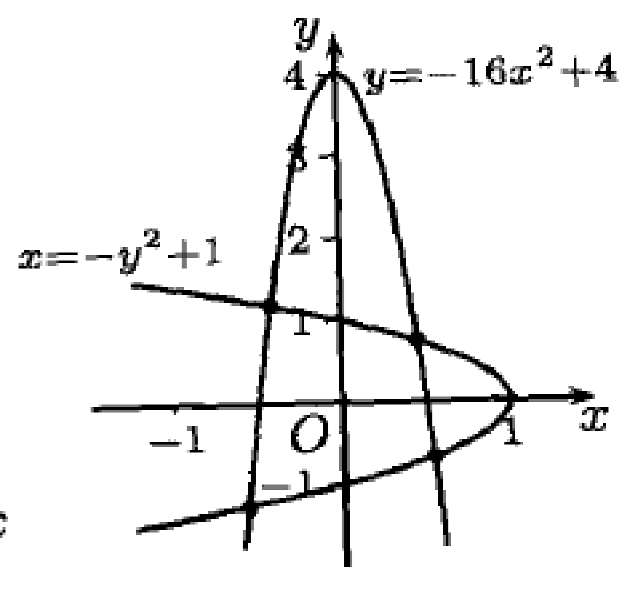
习题 376：求 $\lg x=0.1x$ 的近似解



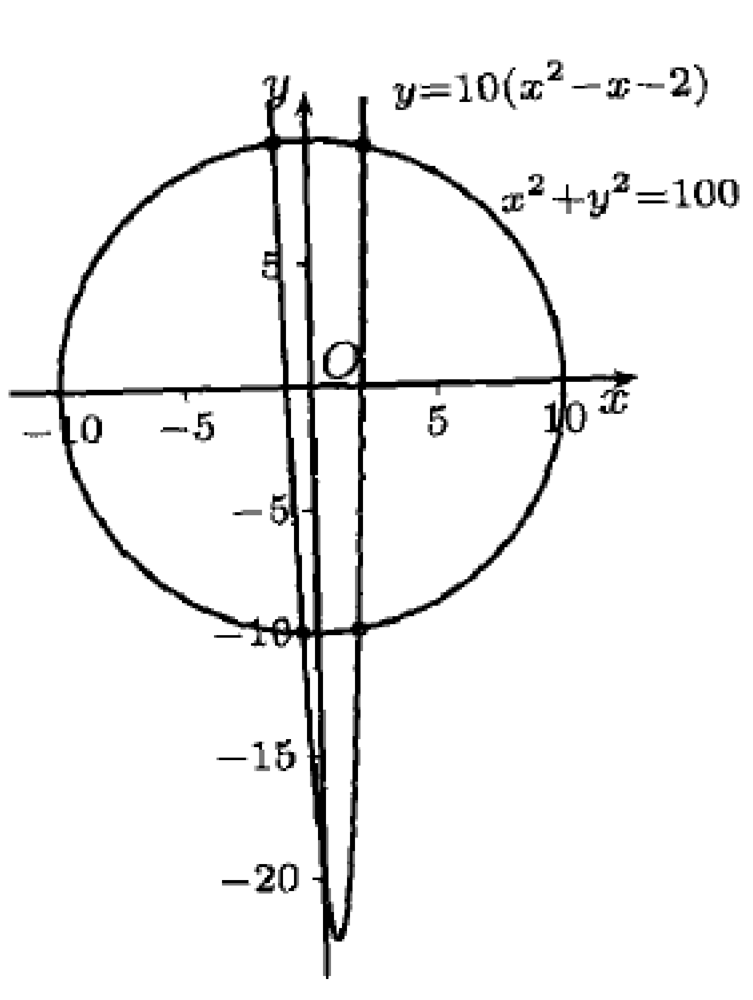
习题 377：求 $10^x=x^2$ 的近似解



习题 378：求 $\tan x=x$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ 的近似解



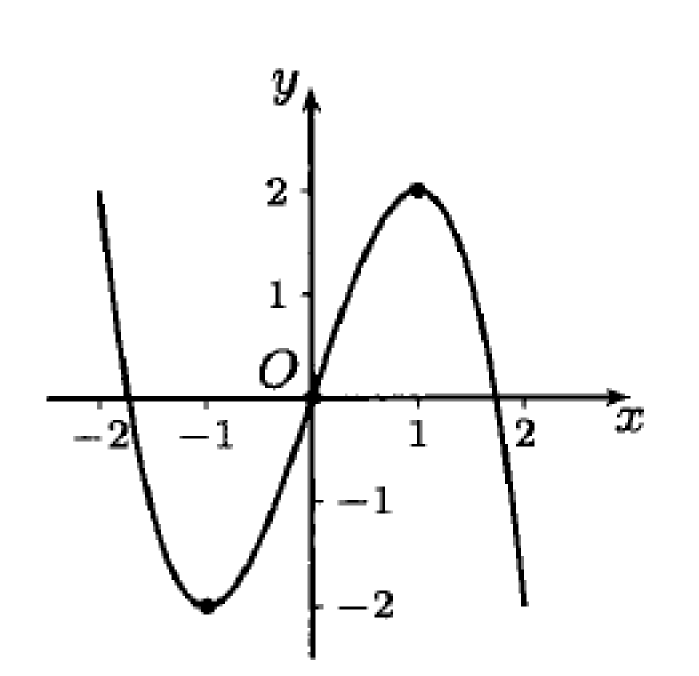
习题 379：求 $x+y^2=1$，$16x^2+y=4$ 的近似解



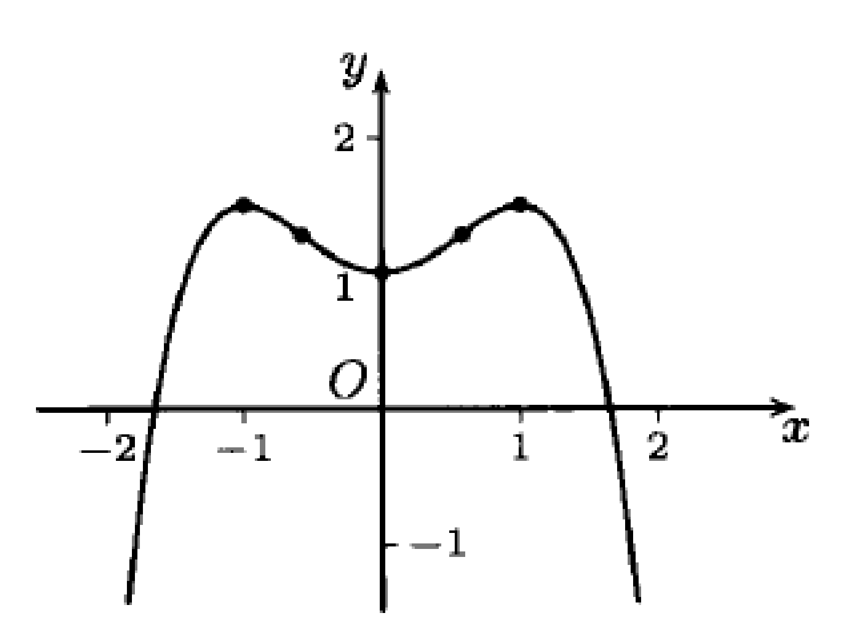
习题 380：求 $x^2+y^2=100$，$y=10(x^2-x-2)$ 的近似解

附录二　§2.12 的图像参考答案

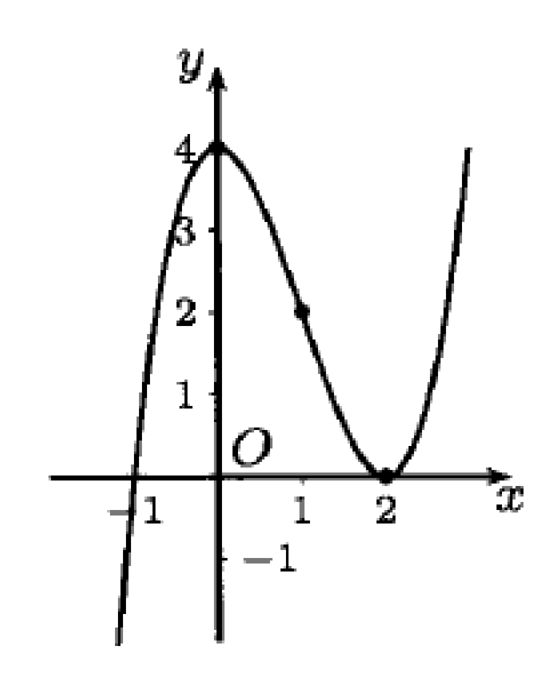
这个附录对 §2.12 "根据特征点作函数图像"中的习题提供图像的参考答案, 在图像上标出了有关的特征点和渐近线.



习题 1471 : $y = 3x - x^3$

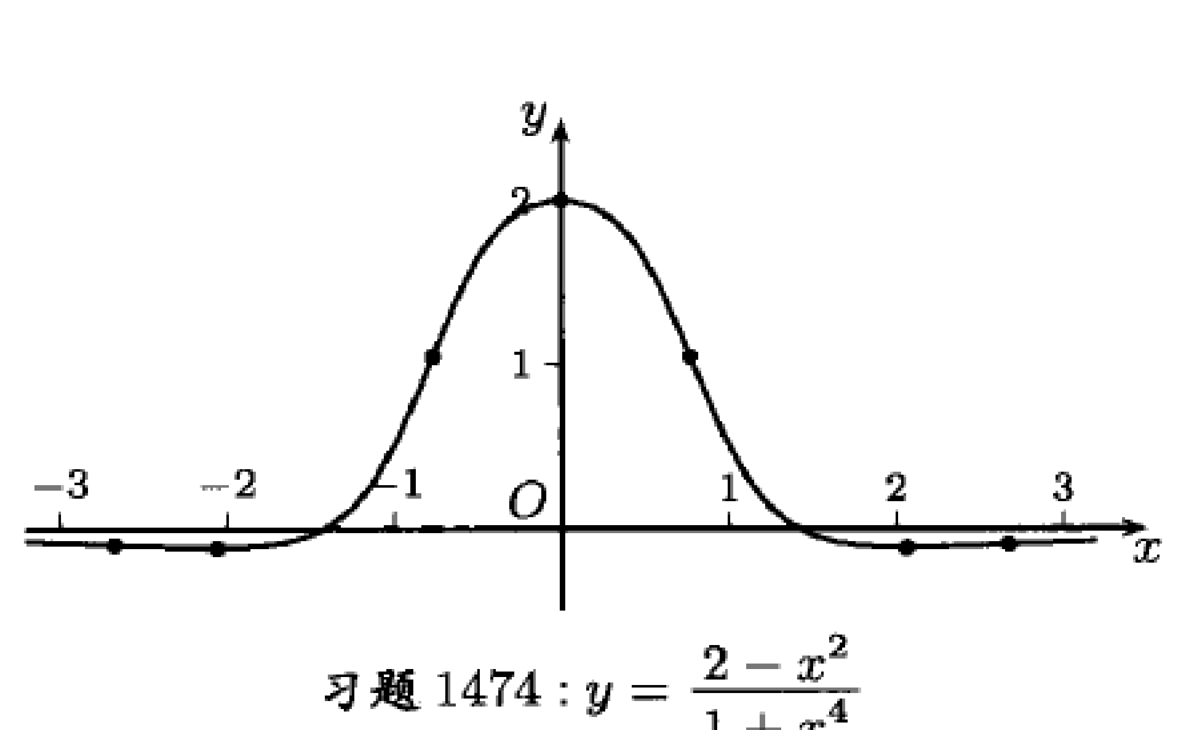


习题 1472 : $y = 1 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$

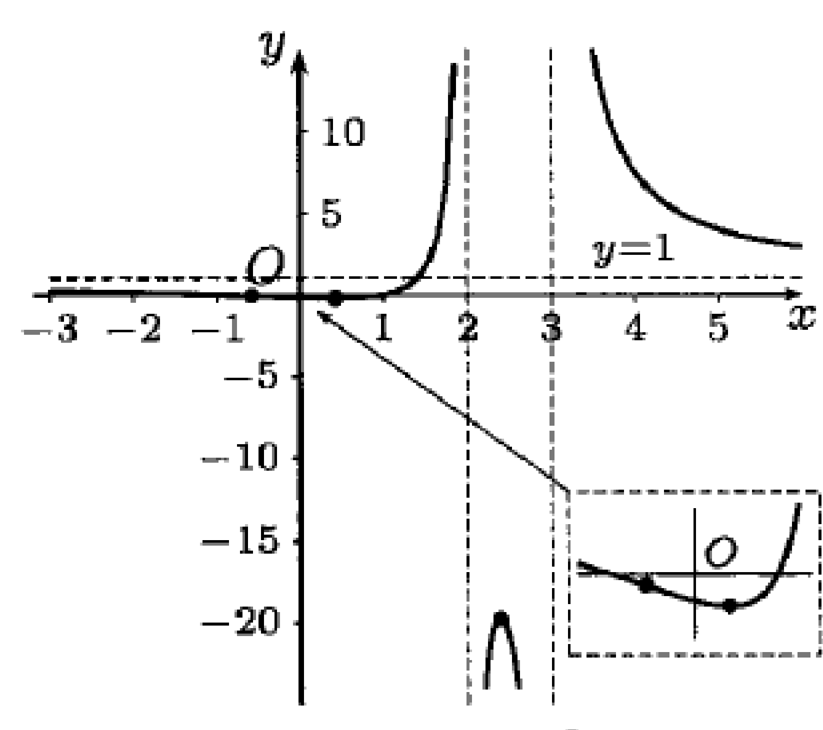


习题 1473 :

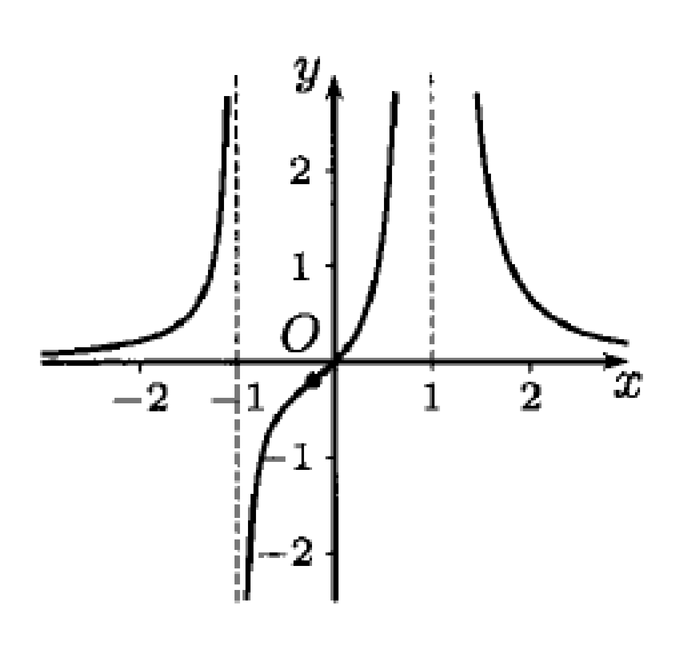
$y = (x+1)(x-2)^2$



习题 1474 : $y = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$

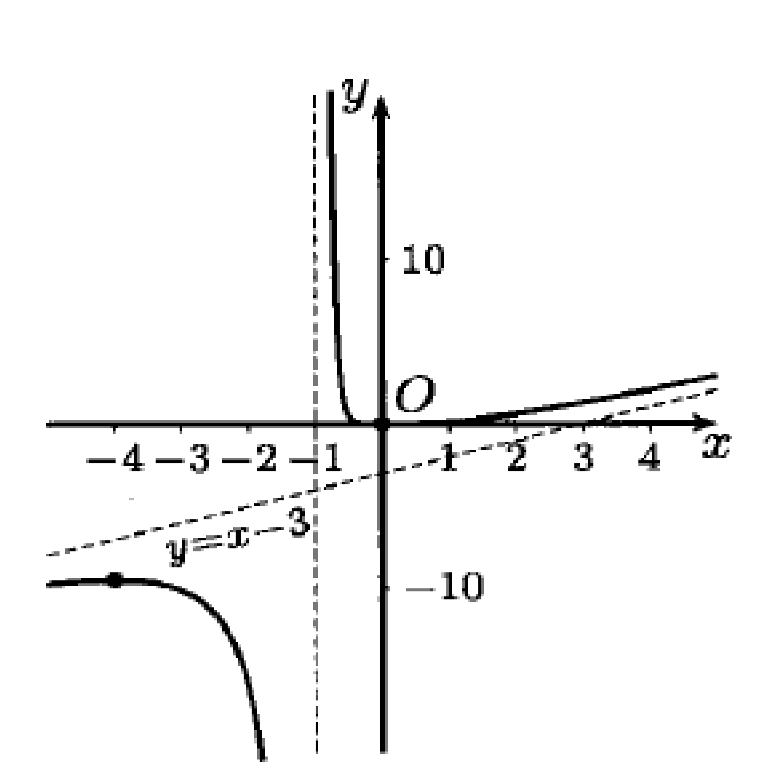


习题 1475 : $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$

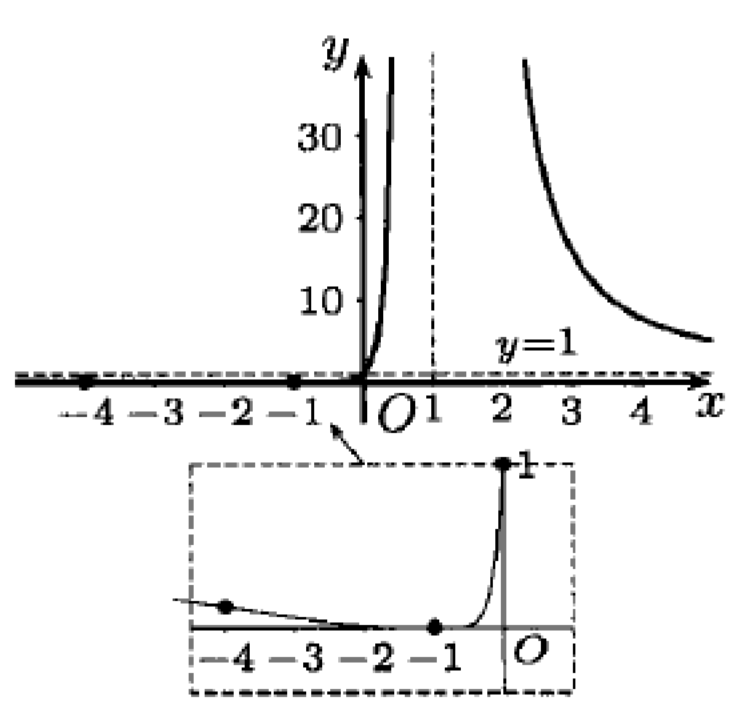


习题 1476 :

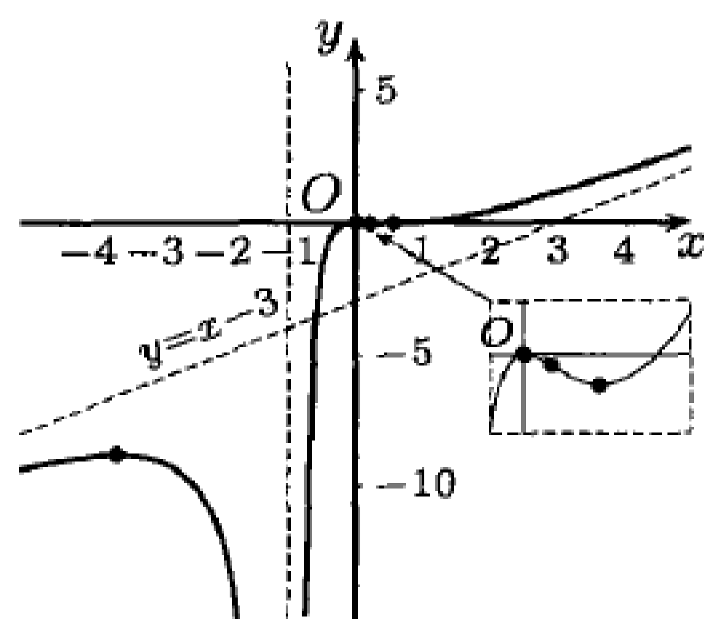
$y = \dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$

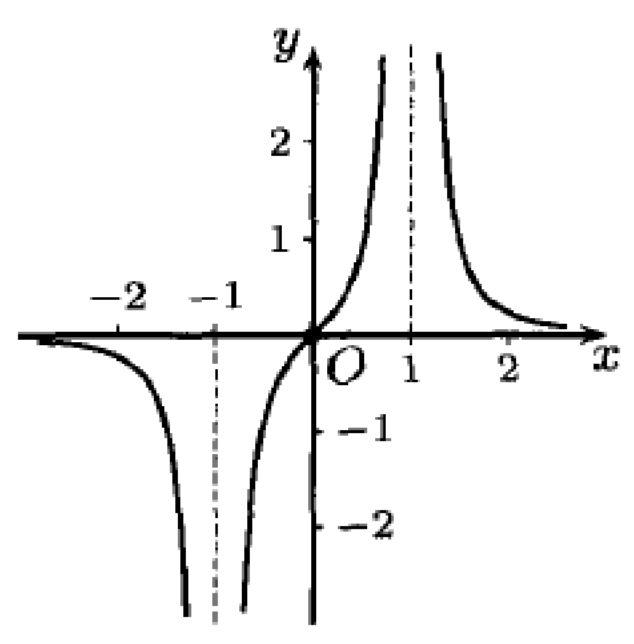


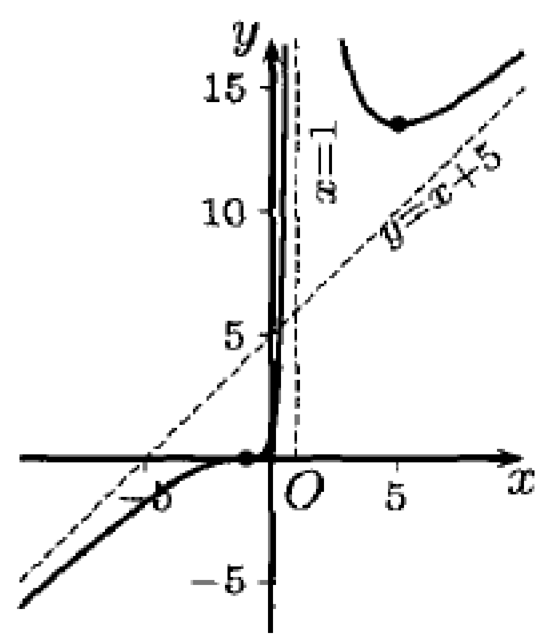
习题 1477 : $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$

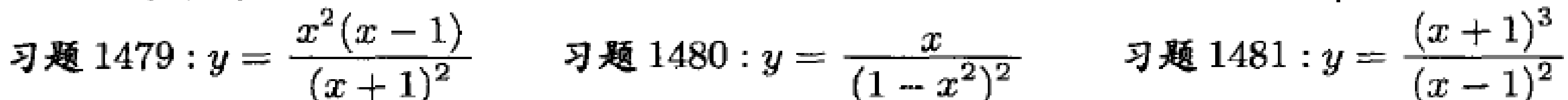


习题 1478 : $y = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$

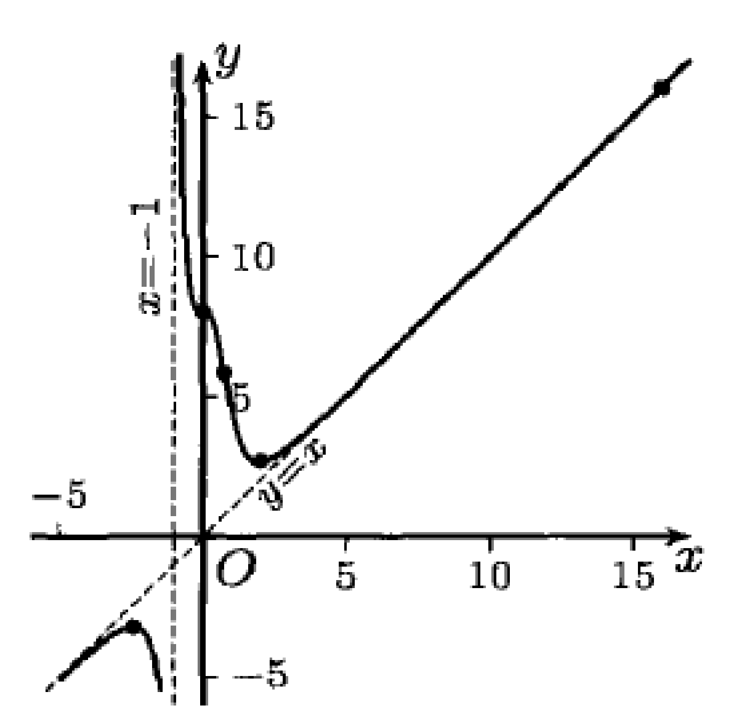




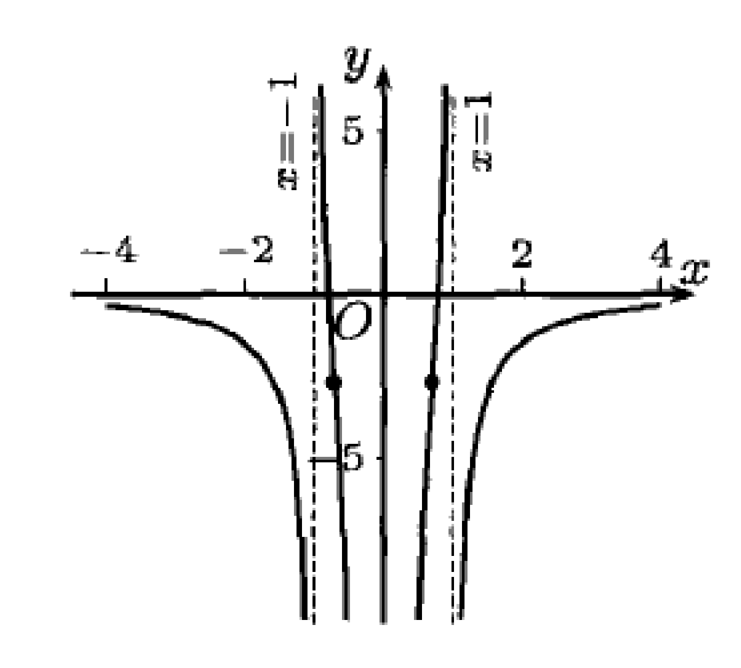




习题 1479 : $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$　习题 1480 : $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$　习题 1481 : $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$

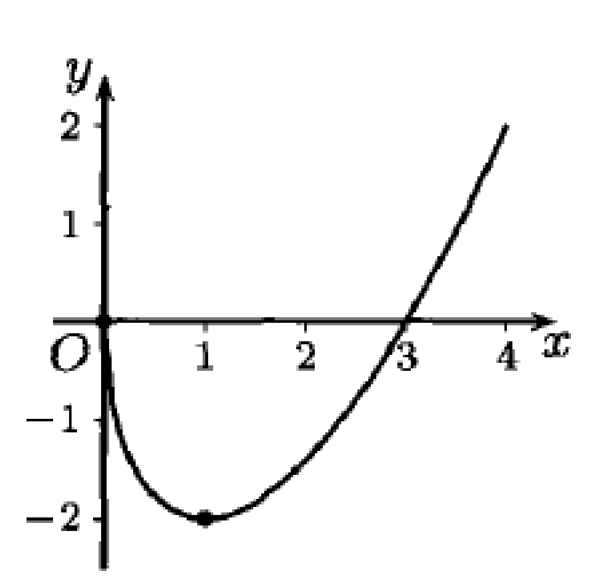


习题 1482 : $y=\dfrac{x^4+8}{x^3+1}$



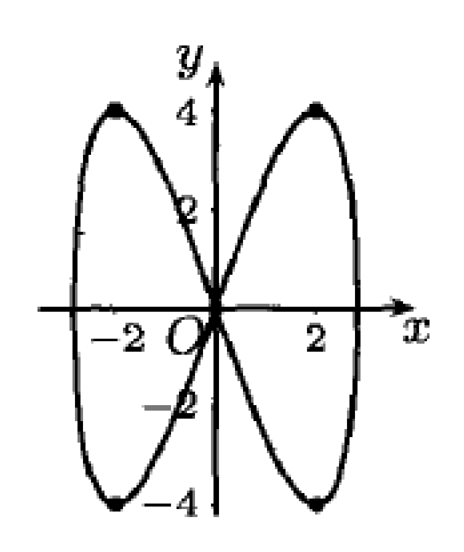
习题 1483 :

$y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{10}{3x^2}+\dfrac{1}{1-x}$



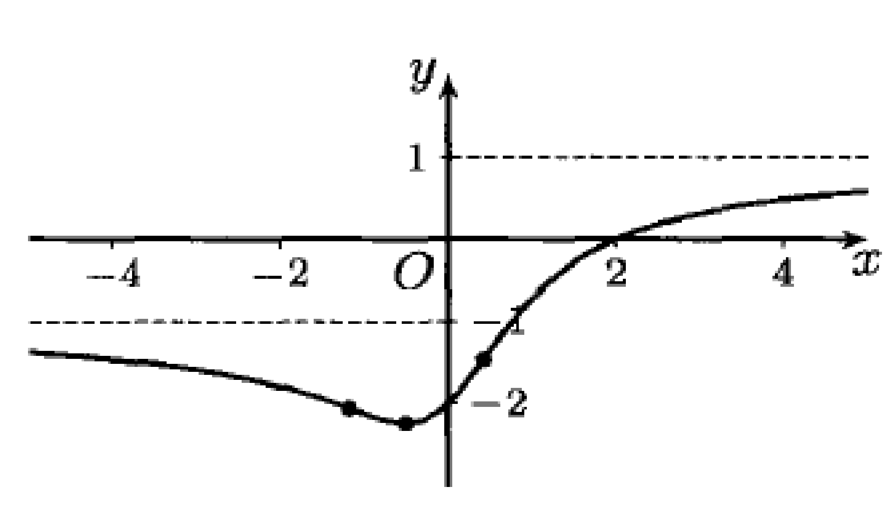
习题 1484 :

$y=(x-3)\sqrt{x}$

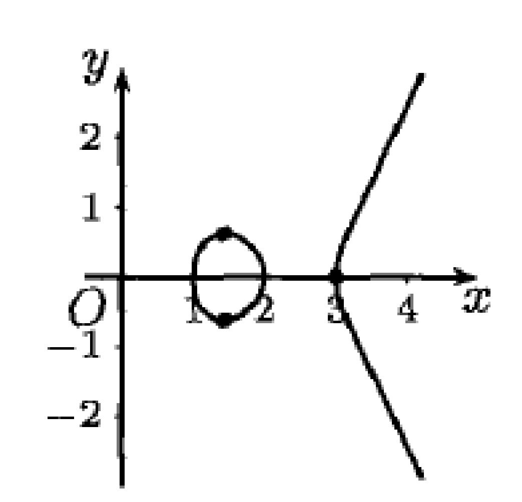


习题 1485(a) :

$y=\pm\sqrt{8x^2-x^4}$

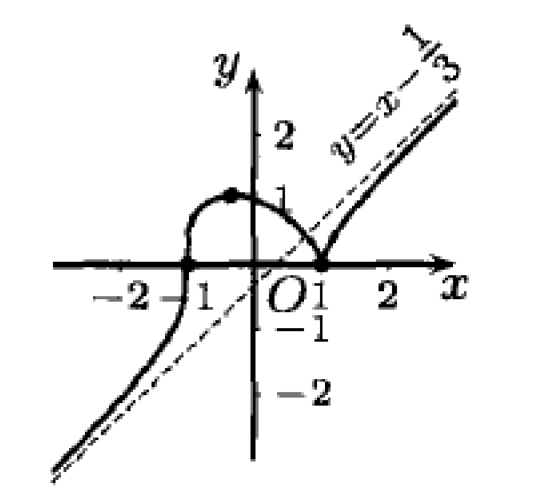


习题 1485(b) : $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$

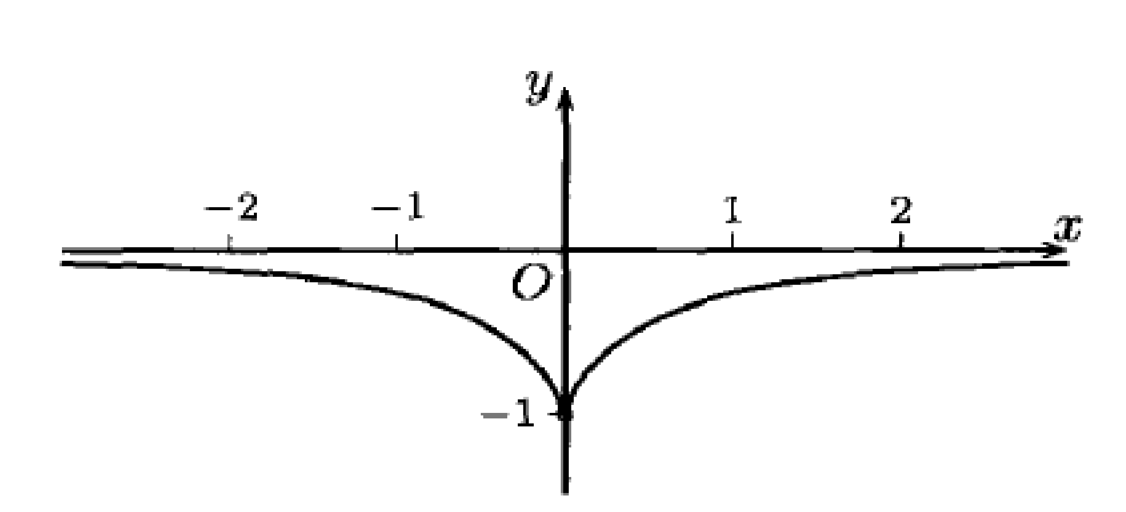


习题 1486 :

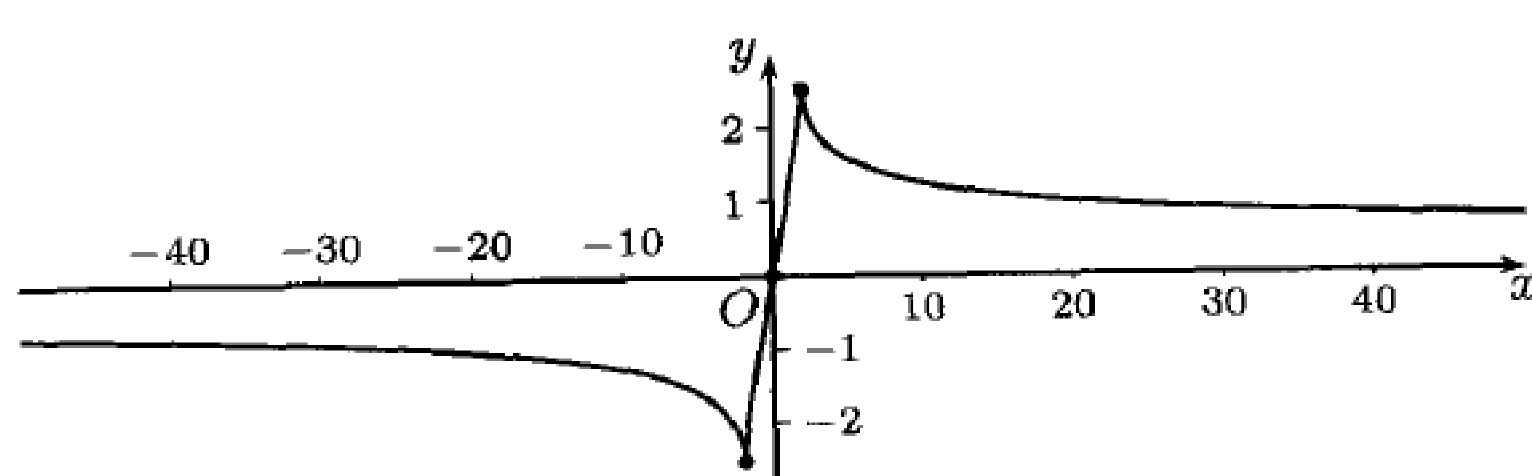
$y=\pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$



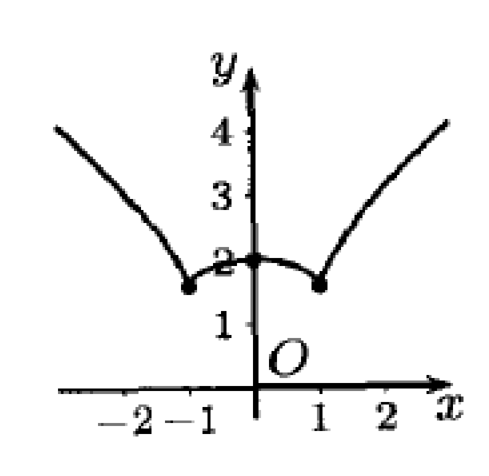
习题 1487 : $y=\sqrt[3]{x^3-x^2-x+1}$



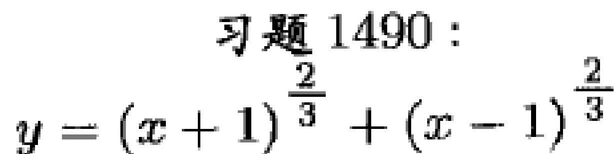
习题 1488 : $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$



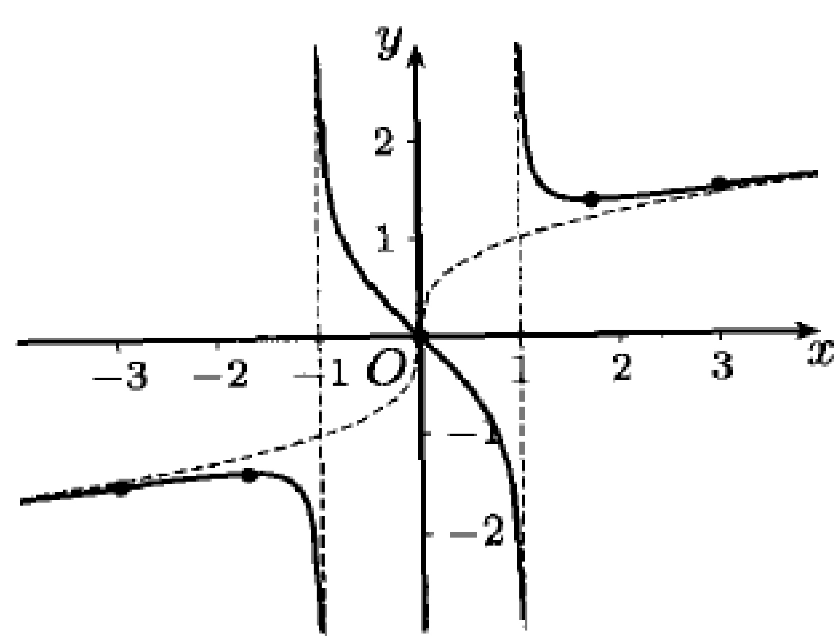
习题 1489 : $y=(x+2)^{\frac{2}{3}}-(x-2)^{\frac{2}{3}}\sim\dfrac{8}{3\sqrt[3]{x}}\ (x\to\pm\infty)$



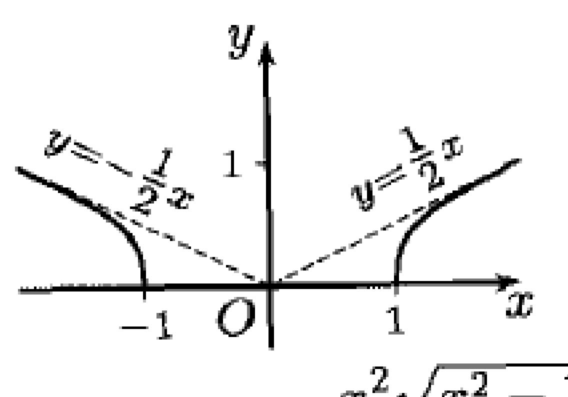
习题 1490 :

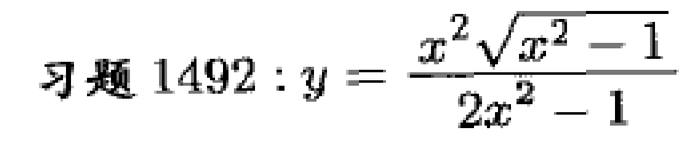


$y=(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$

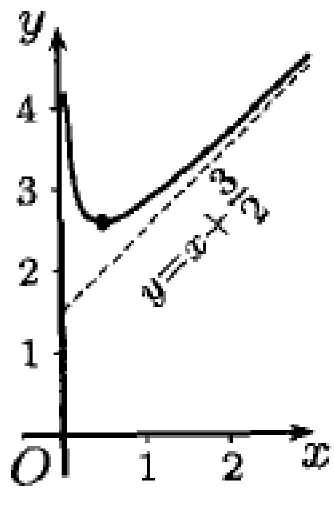


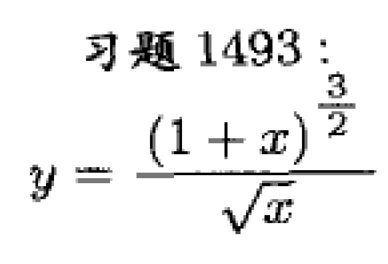
习题 1491 : $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$



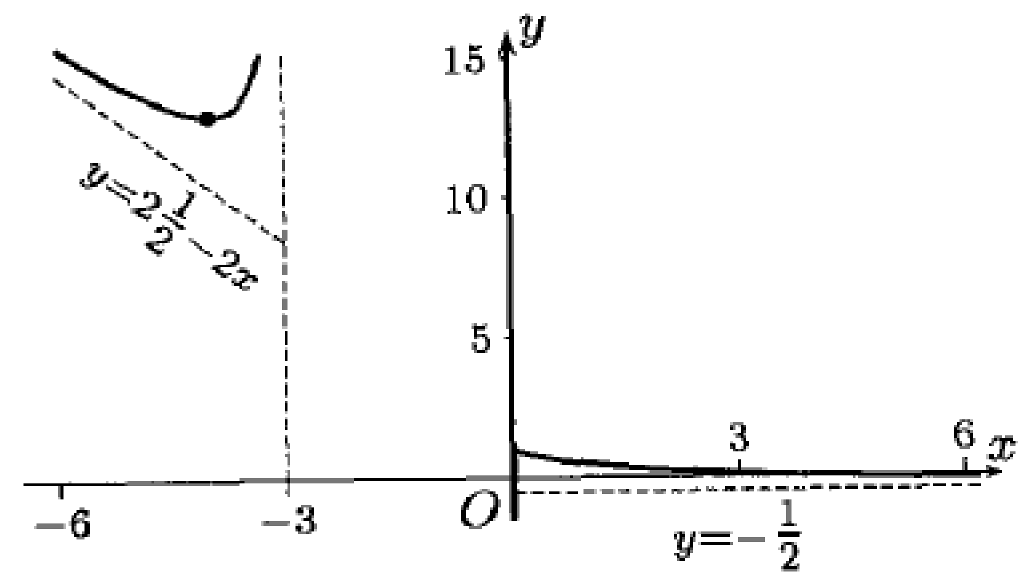


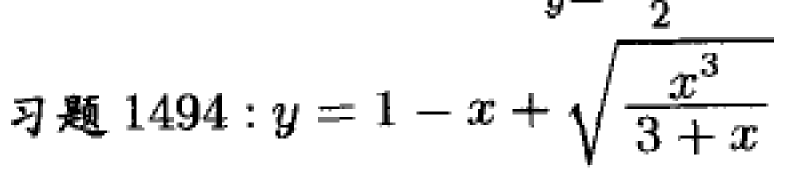
习题 1492 : $y=\dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$



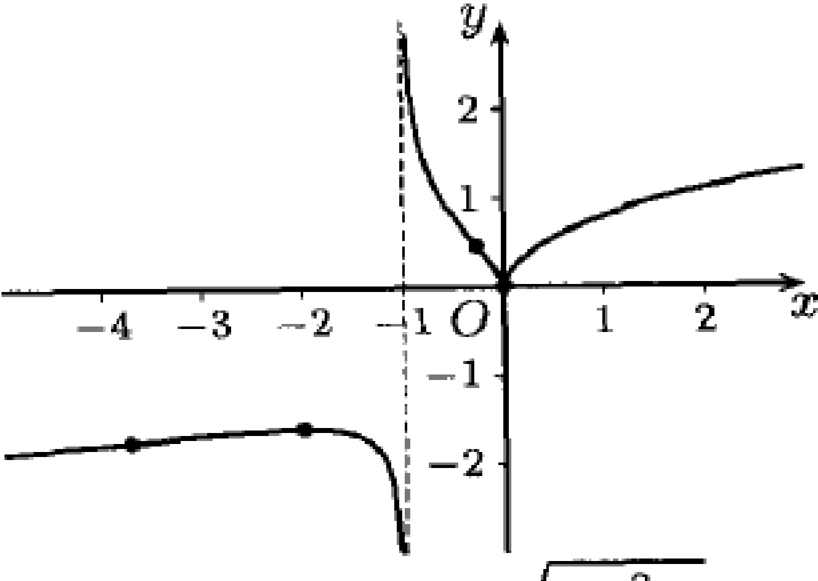


习题 1493 : $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$

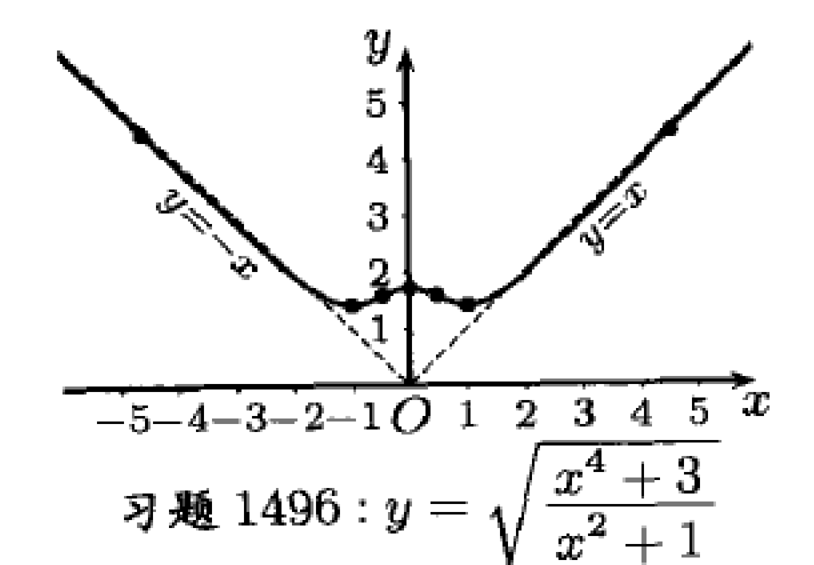




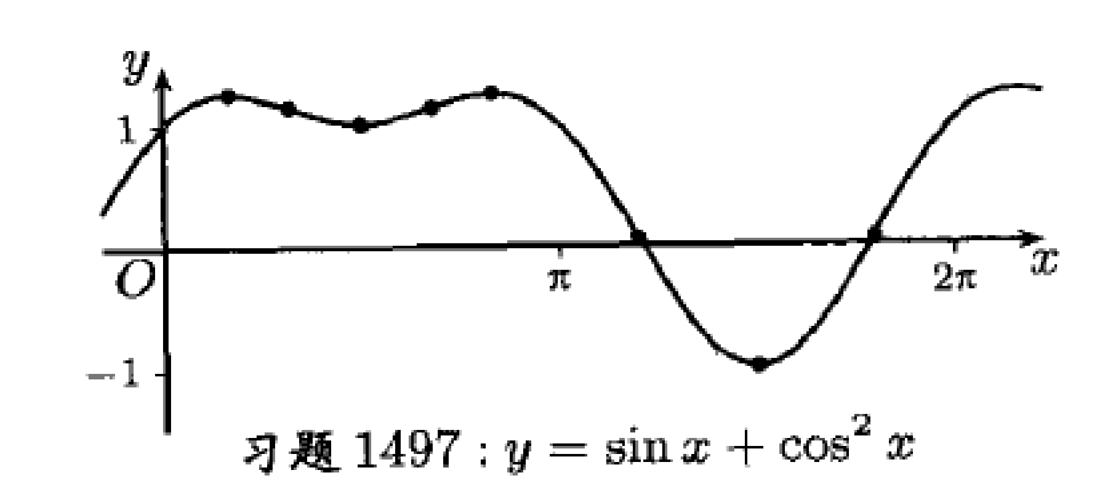
习题 1494 : $y=1-x+\sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$



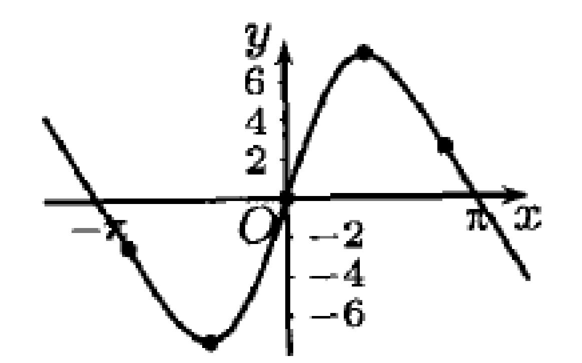
习题 1495 : $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$



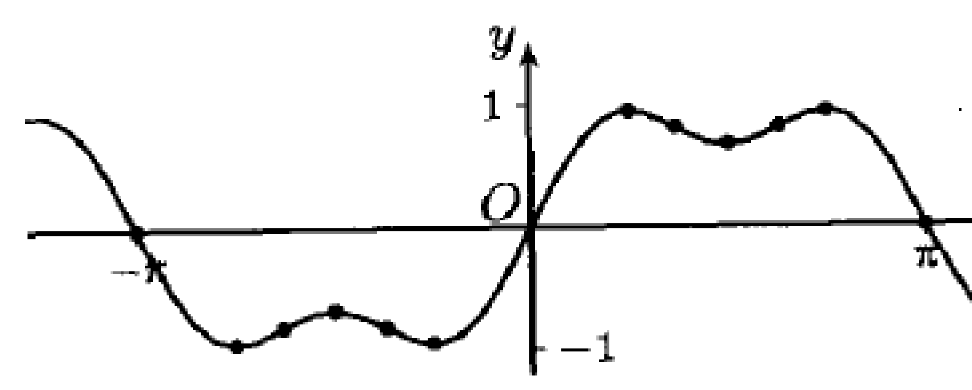
习题 1496 : $y=\sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$



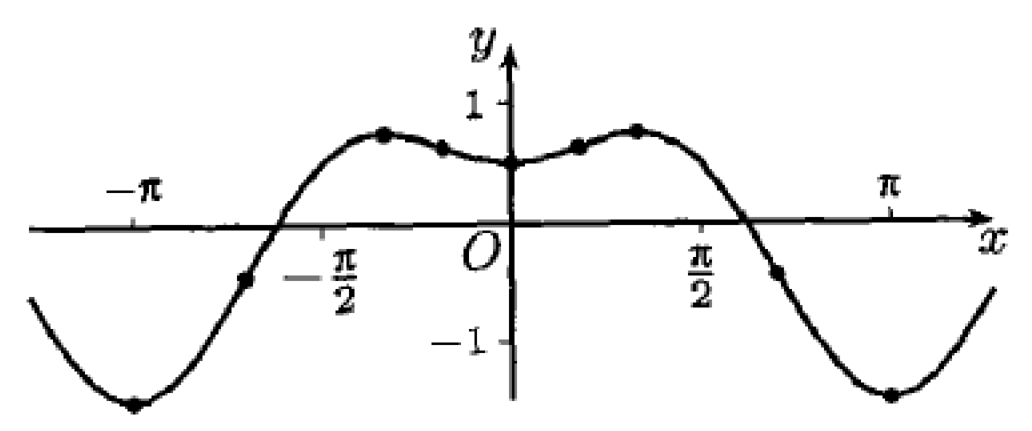
习题 1497 : $y=\sin x+\cos^2 x$



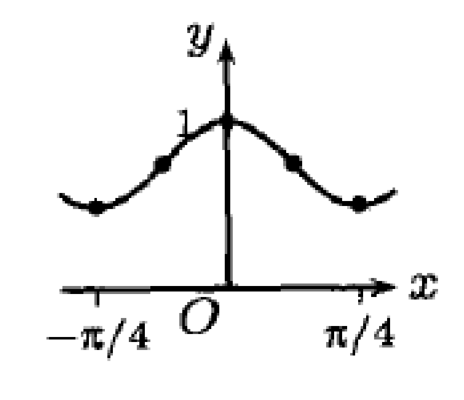
习题 1498: $y=(7+2\cos x)\sin x$



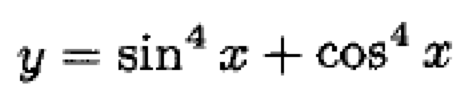
习题 1499: $y=\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$



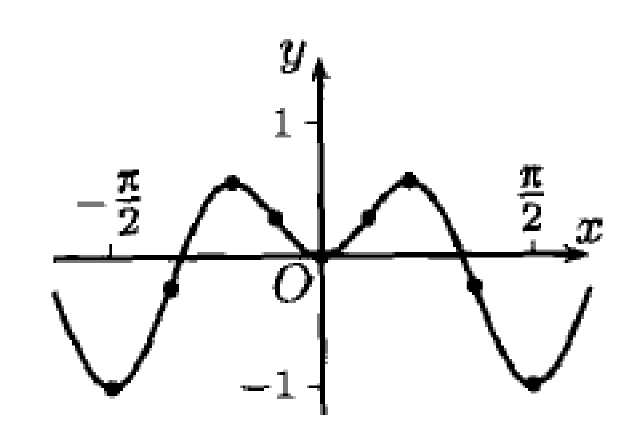
习题 1500 : $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$



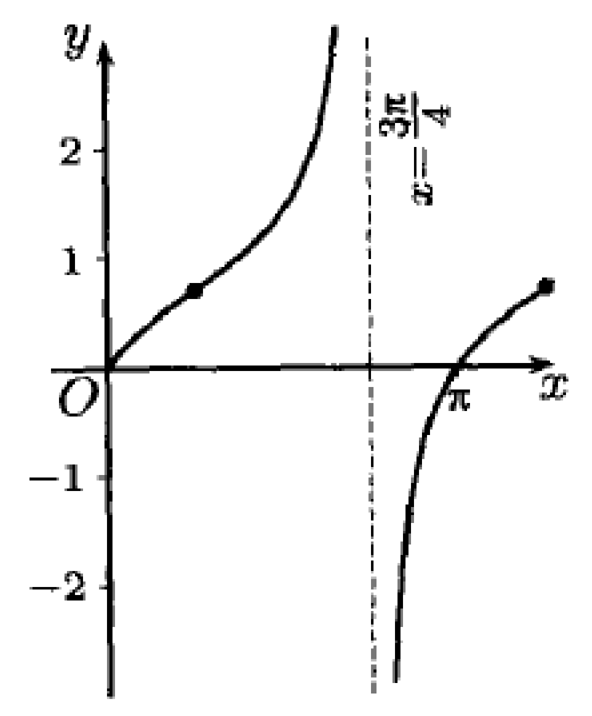
习题 1501 :



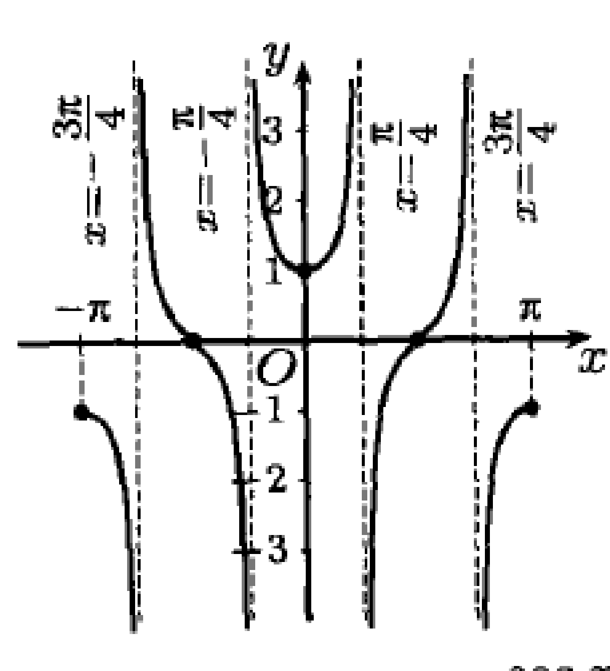
$y = \sin^4 x + \cos^4 x$



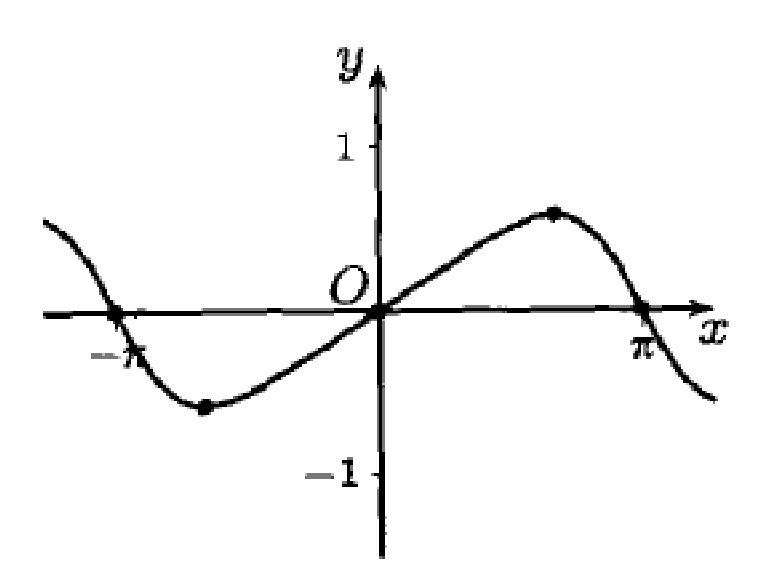
习题 1502 : $y = \sin x \cdot \sin 3x$



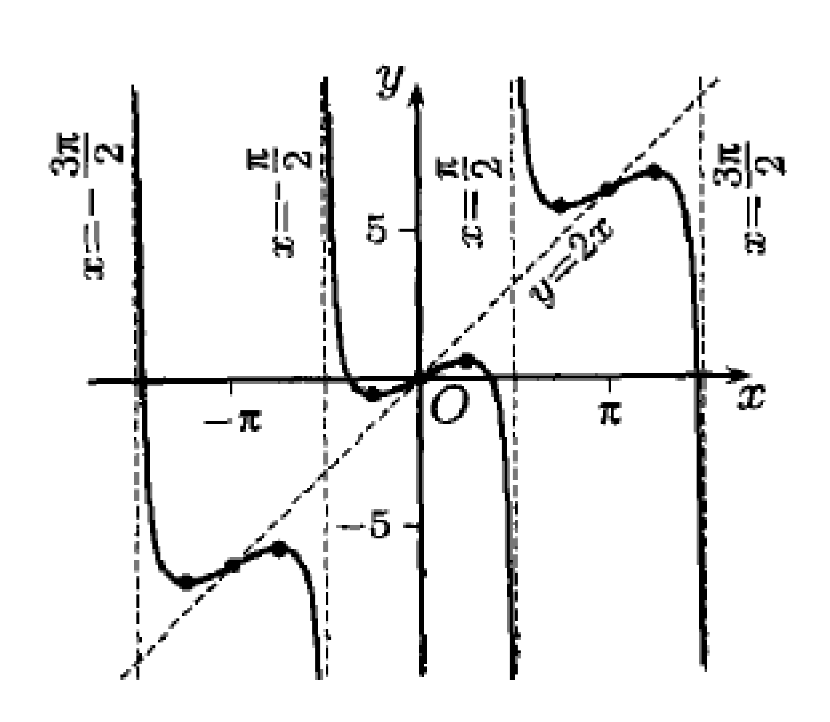
习题 1503 : $y = \frac{\sin x}{\sin(x + \pi/4)}$



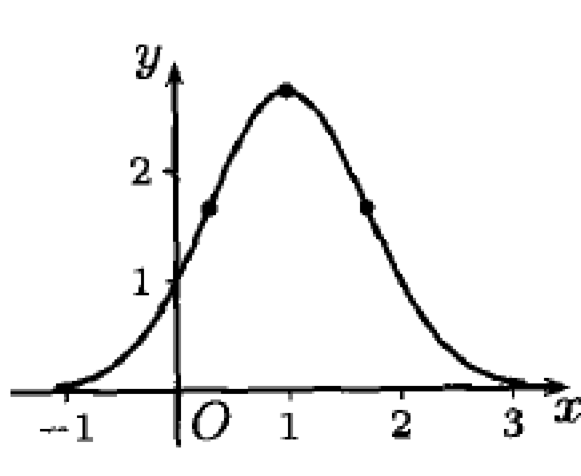
习题 1504(a) : $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$



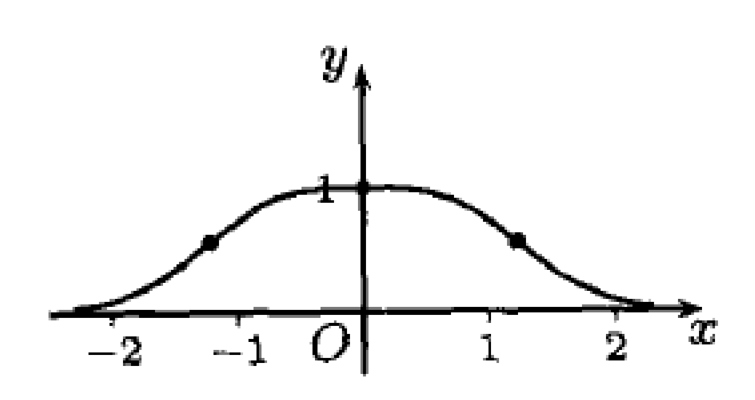
习题 1504(b) : $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$



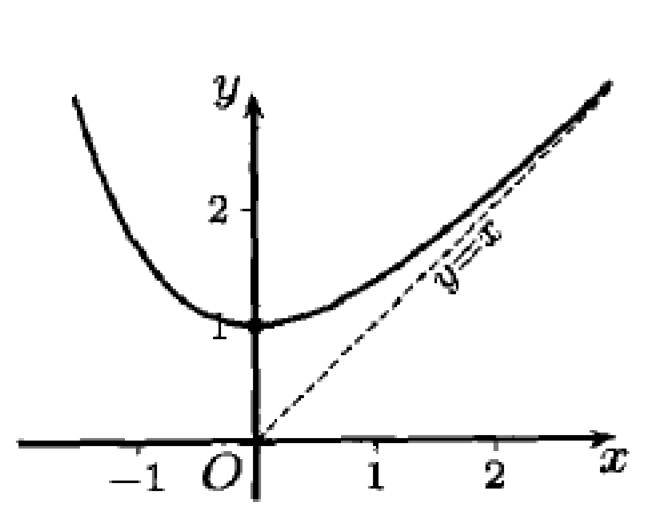
习题 1505 : $y = 2x - \tan x$



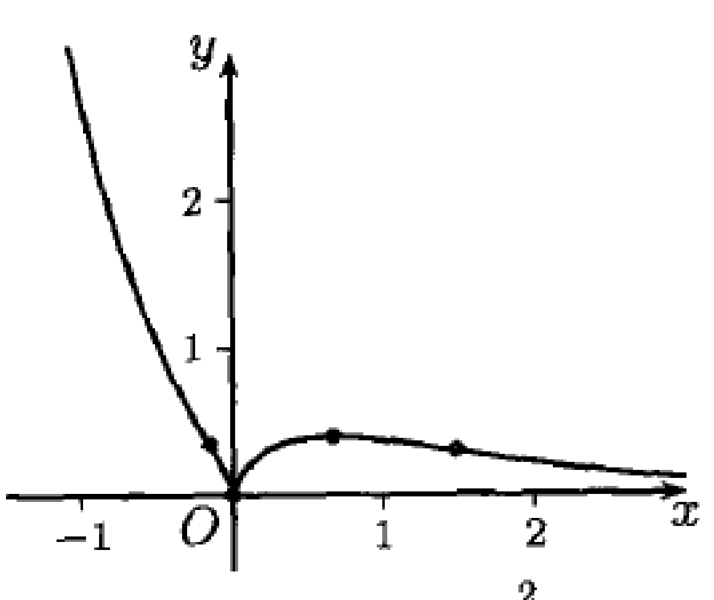
习题 1506 : $y = e^{2x - x^2}$



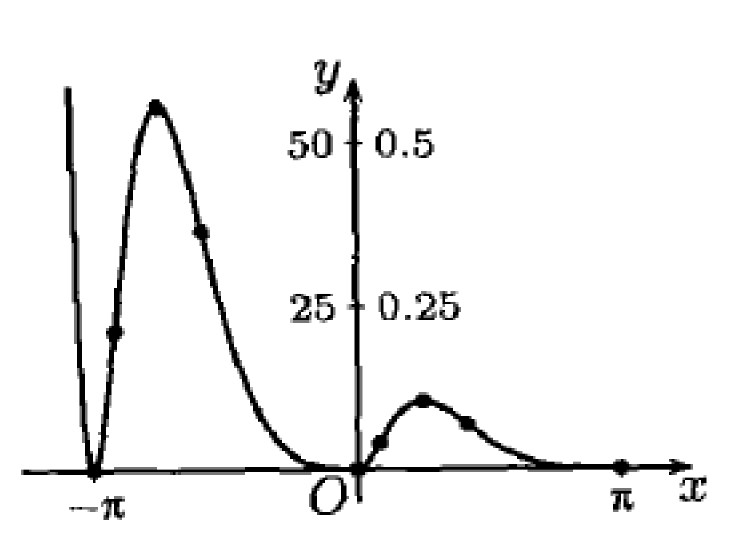
习题 1507 : $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$



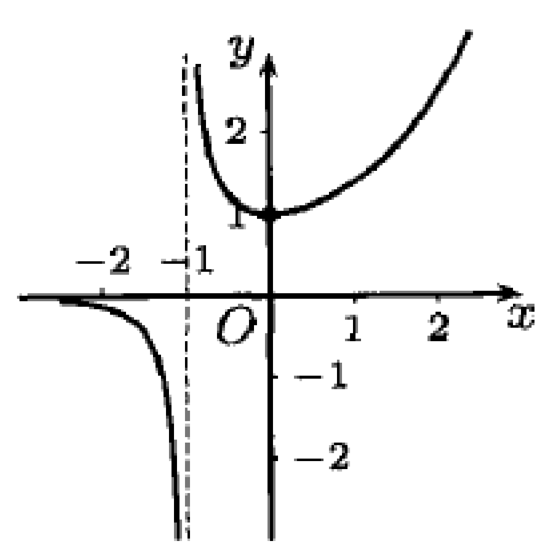
习题 1508 : $y = x + e^{-x}$

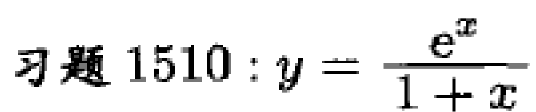


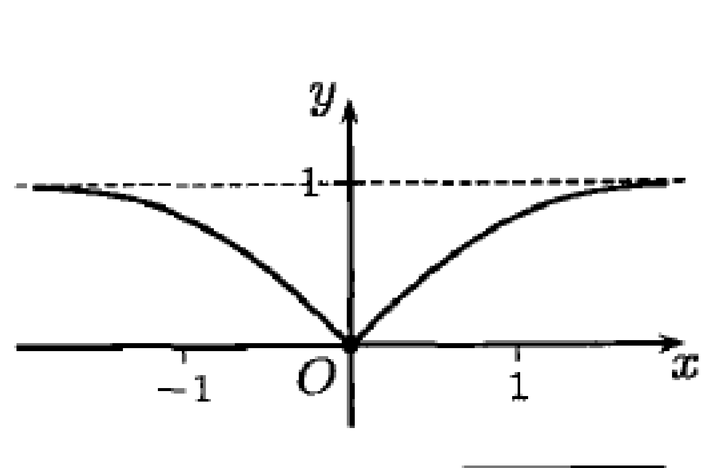
习题 1509(a) : $y = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x}$



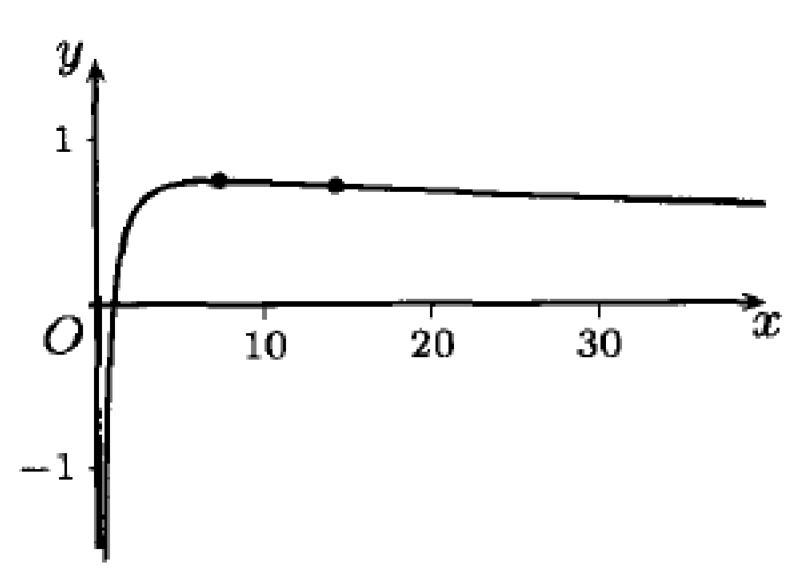
习题 1509(b) : $y = e^{-2x}\sin^2 x$



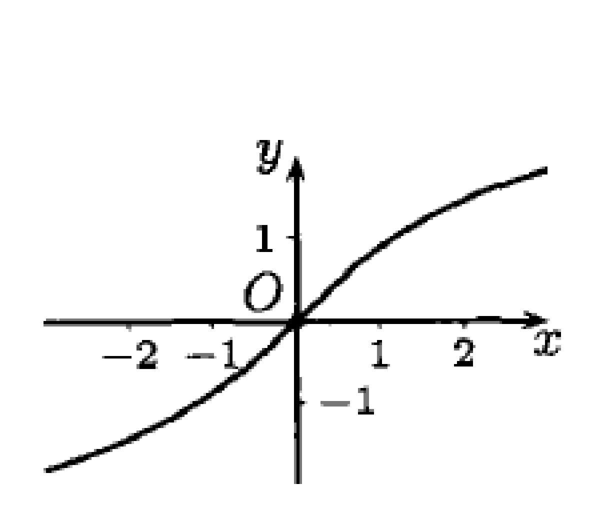

习题 1510 : $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$



习题 1511 : $y = \sqrt{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$

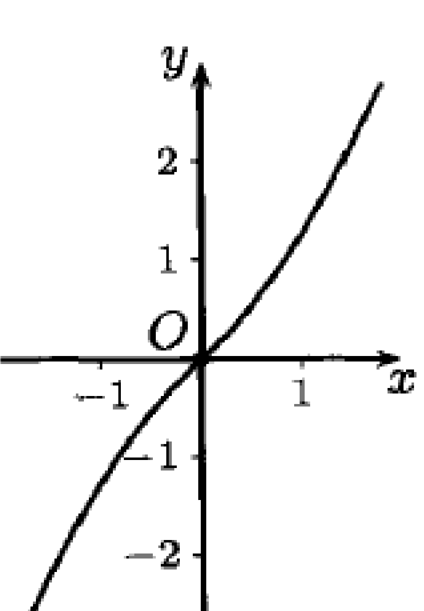


习题 1512 : $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$



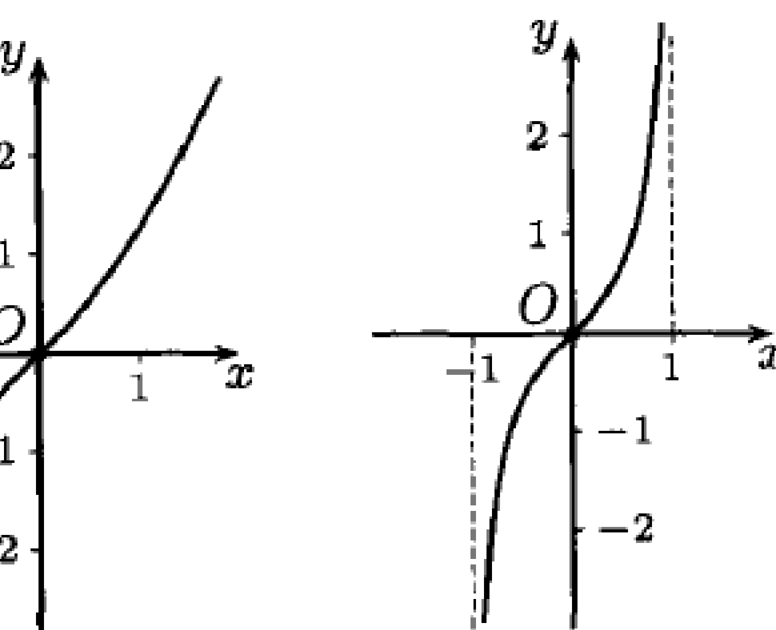
习题 1513 :

$y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

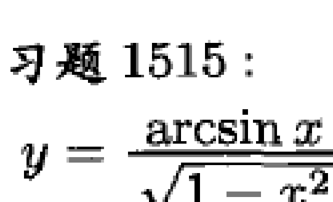


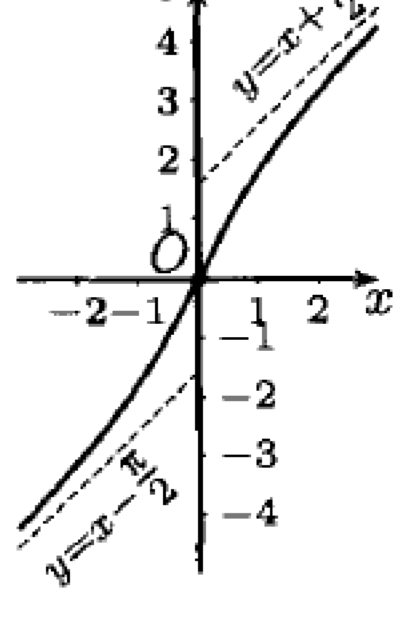
习题 1514 :

$y = \sqrt{x^2+1} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

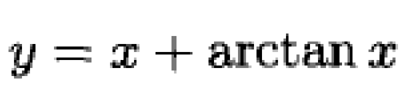


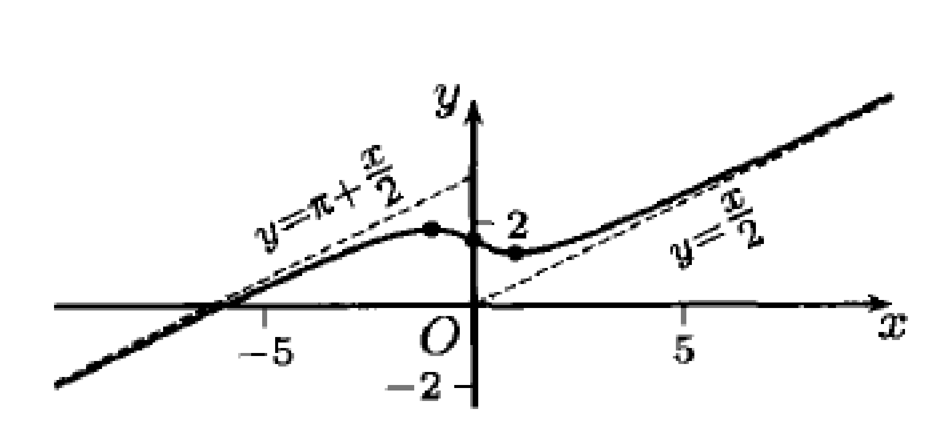
习题 1515 :


$y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

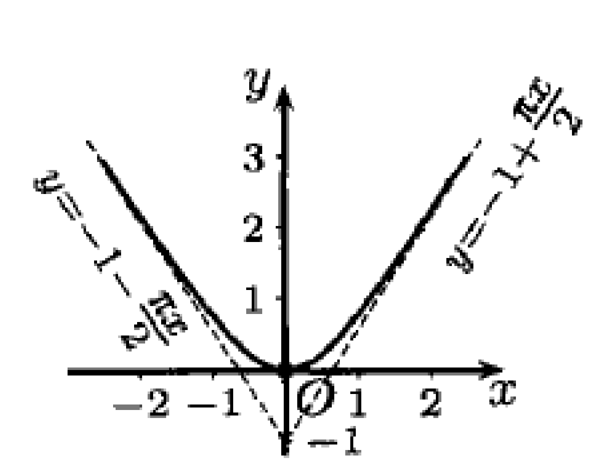


习题 1516 :

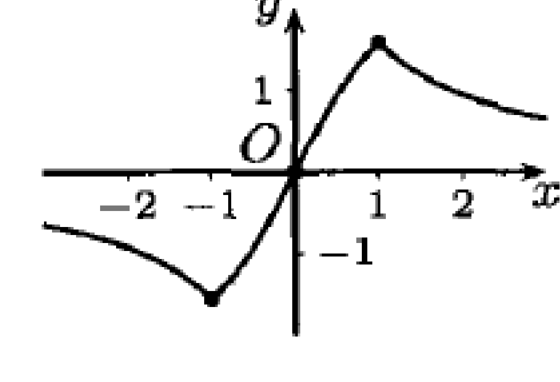

$y = x + \arctan x$



习题 1517 : $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arccot} x$

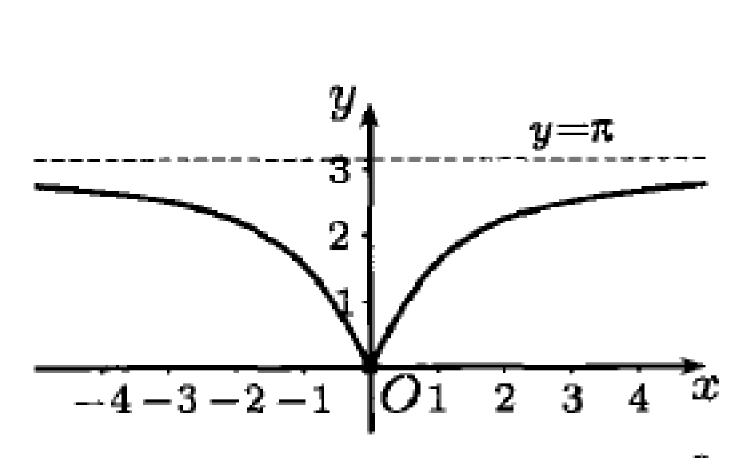


习题 1518 : $y = x \arctan x$

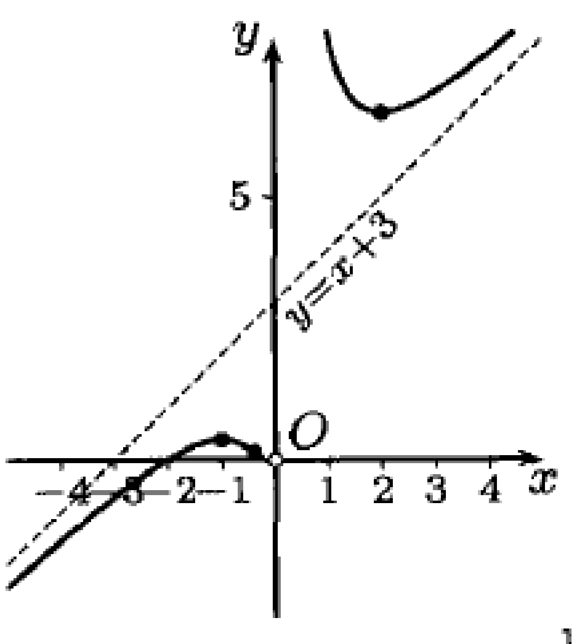


习题 1519 :

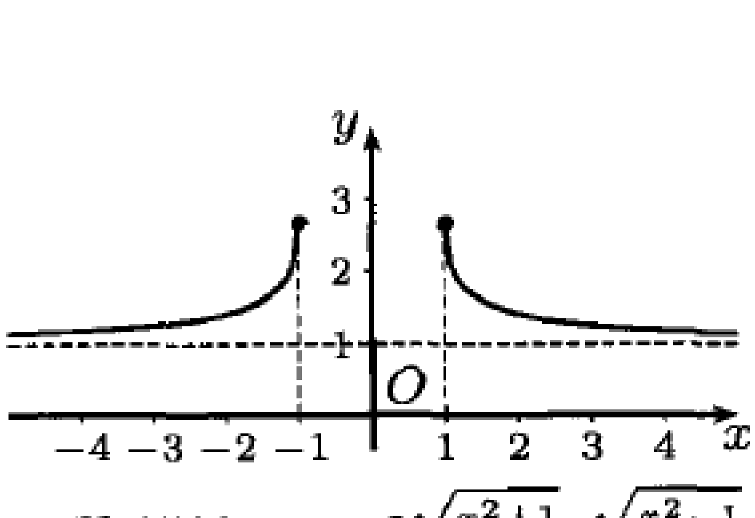
$y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$



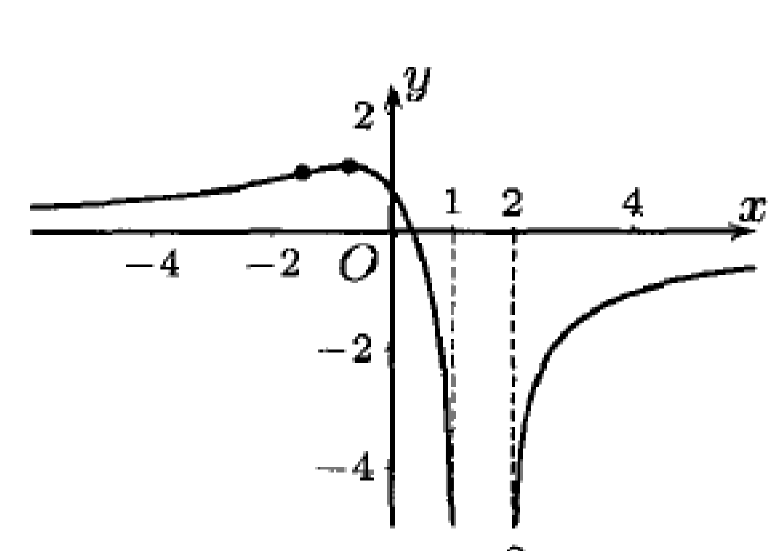
习题 1520 : $y = \arccos \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$



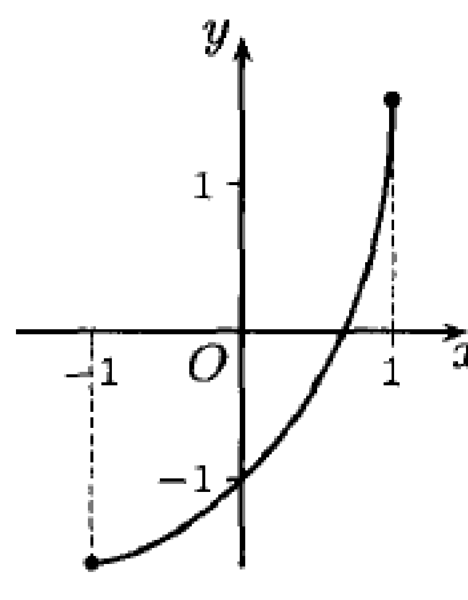
习题 1521 : $y = (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$



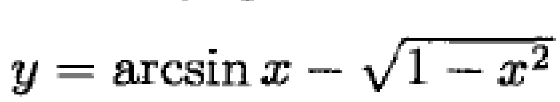
习题 1522 : $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$



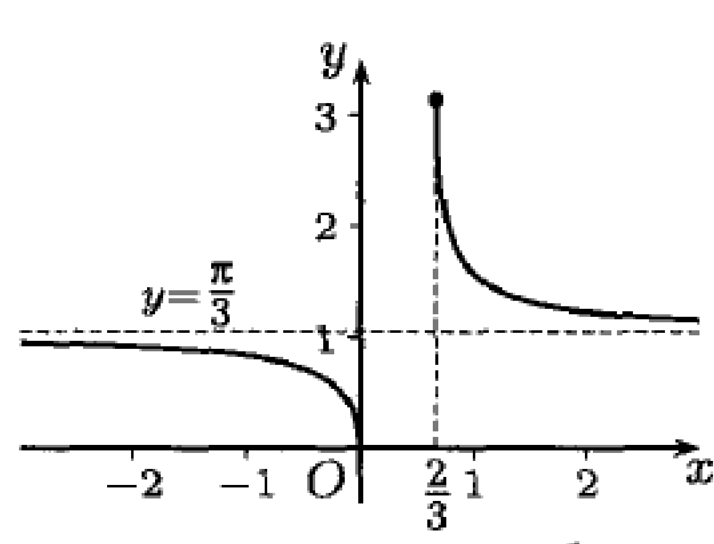
习题 1523 : $y=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$



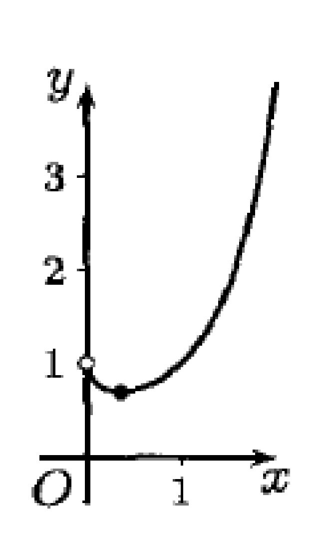
习题 1524 :



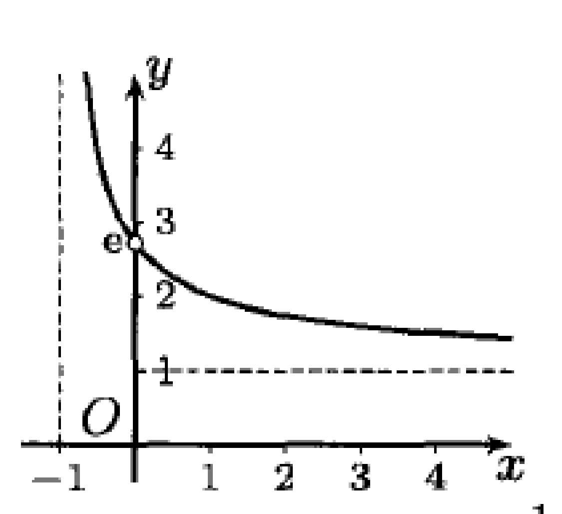
$y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$



习题 1525 : $y=\arccos\dfrac{1-x}{1-2x}$

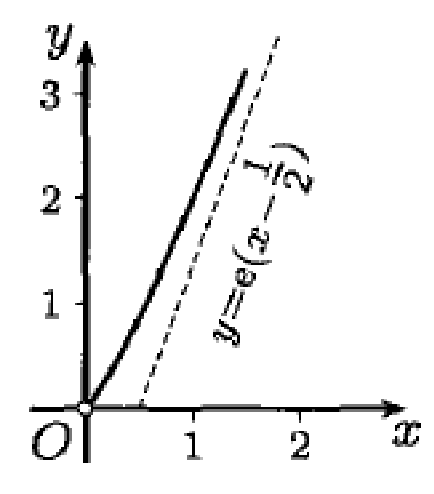


习题 1526 : $y=x^x$



习题 1527 : $y=x^{\frac{1}{x}}$

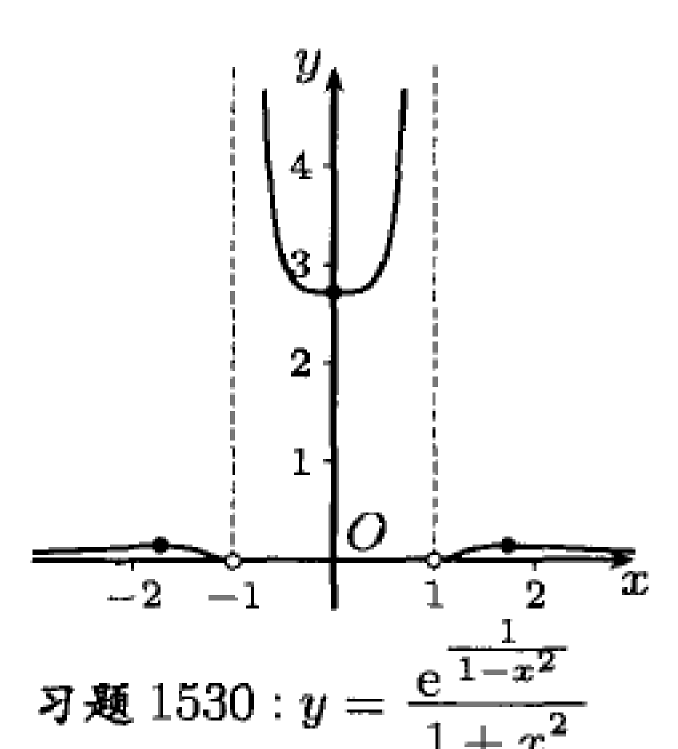
习题 1528 : $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$



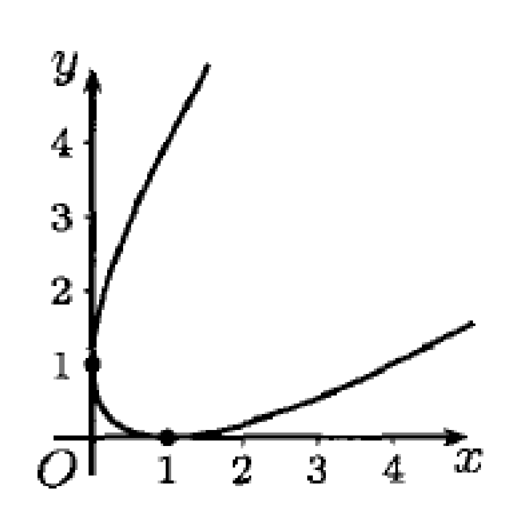
习题 1529 :

$y=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

$(x>0)$



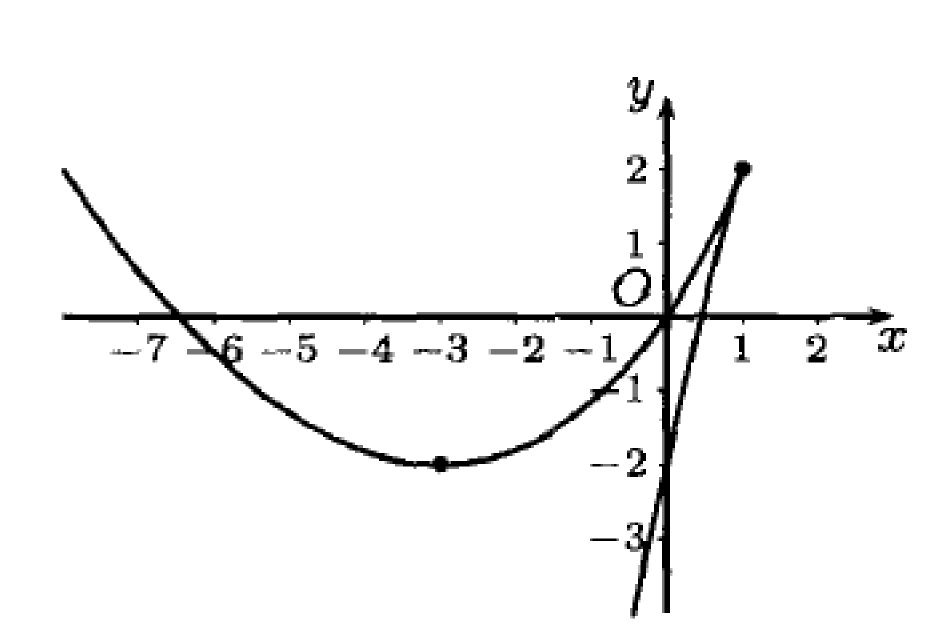
习题 1530 : $y=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$



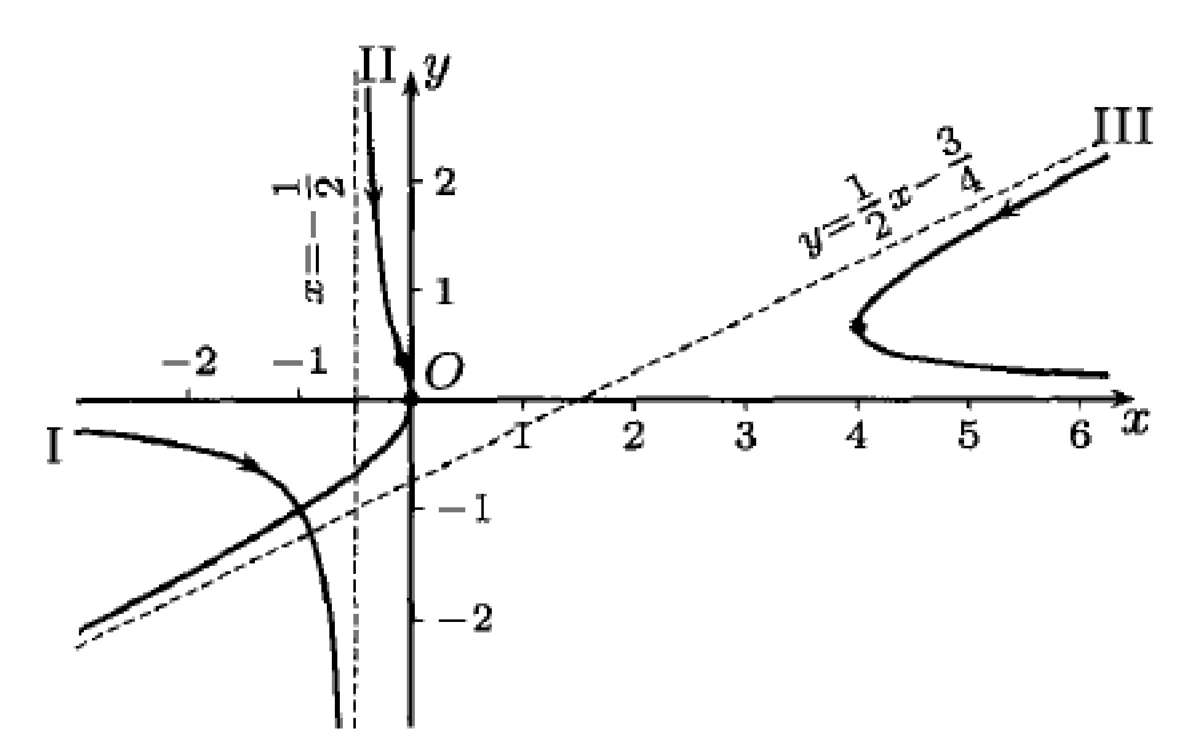
习题 1531 :

$x=\dfrac{(t+1)^2}{4}$,

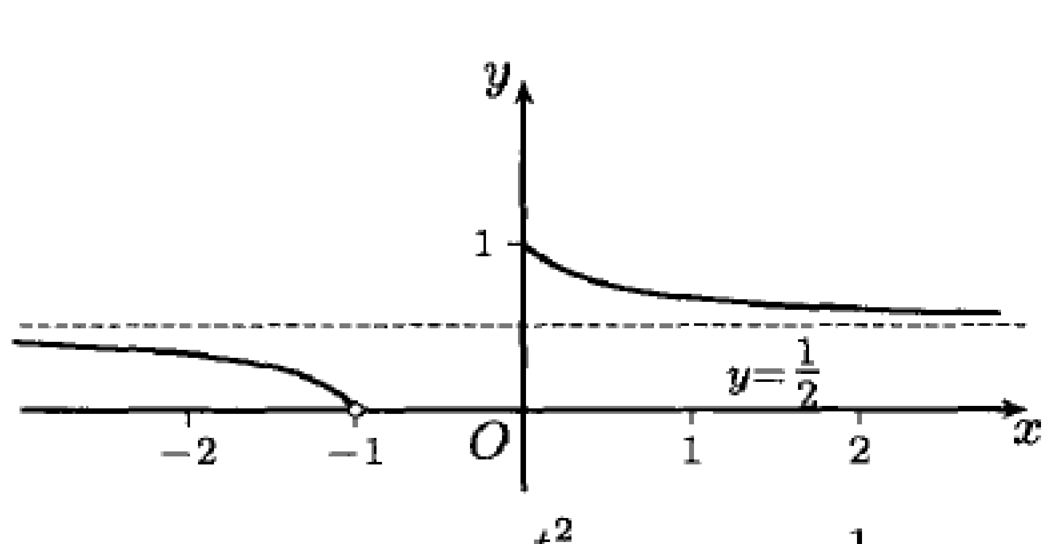
$y=\dfrac{(t-1)^2}{4}$



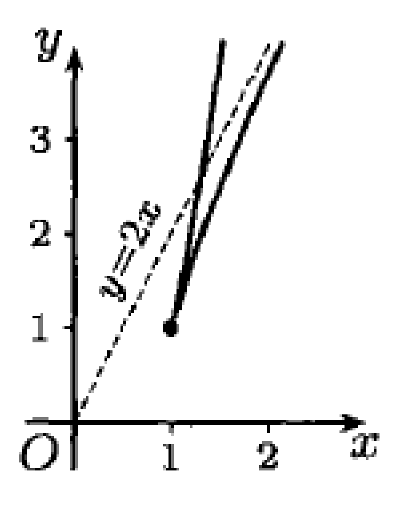
习题 1532 : $x=2t-t^2,\ y=3t-t^3$



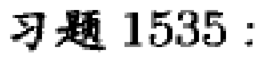
习题 1533 : $x=\dfrac{t^2}{t-1},\ y=\dfrac{t}{t^2-1}$



习题 1534 : $x=\dfrac{t^2}{1-t^2},\ y=\dfrac{1}{1+t^2}$

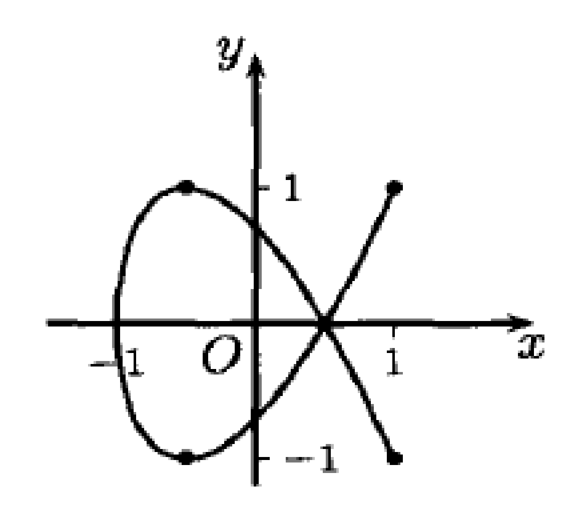


习题 1535 :



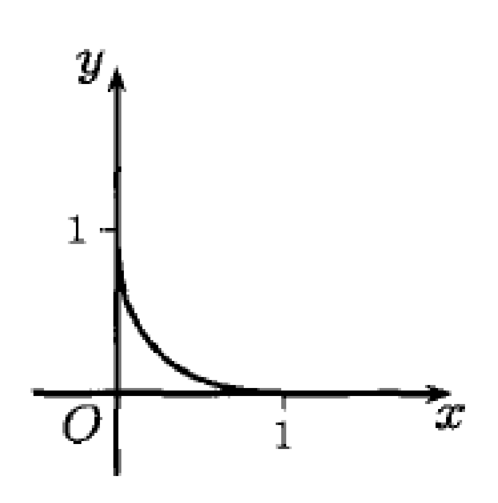
$x = t + \mathrm{e}^{-t}$,

$y = 2t + \mathrm{e}^{-2t}$



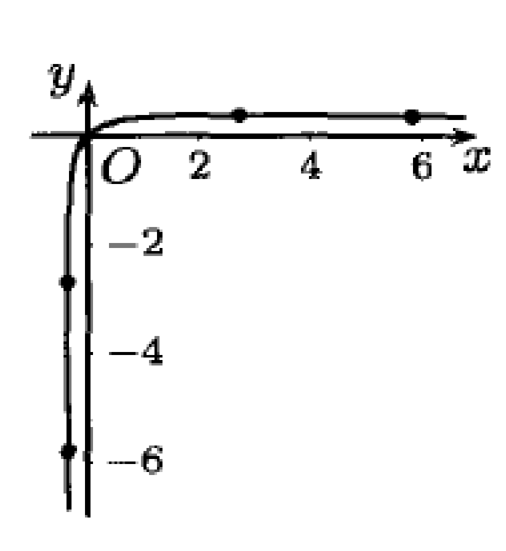
习题 1536 :

$x = \cos 2t,\ y = \cos 3t$



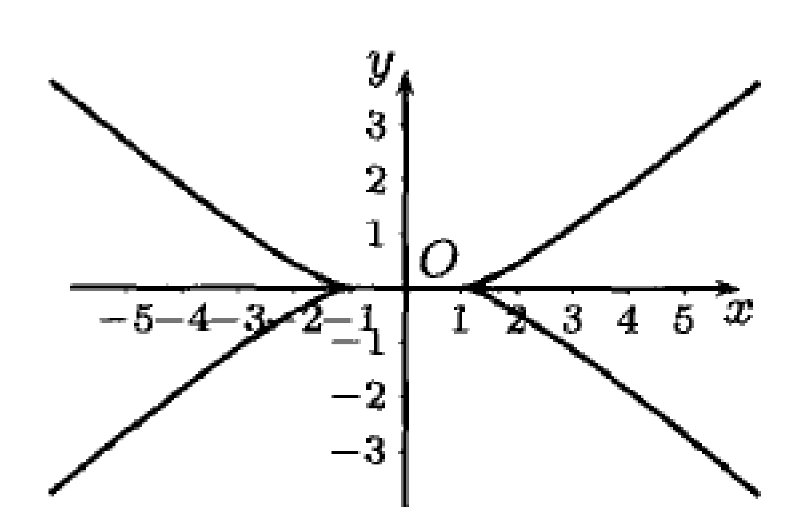
习题 1537 :

$x = \cos^4 t,\ y = \sin^4 t$

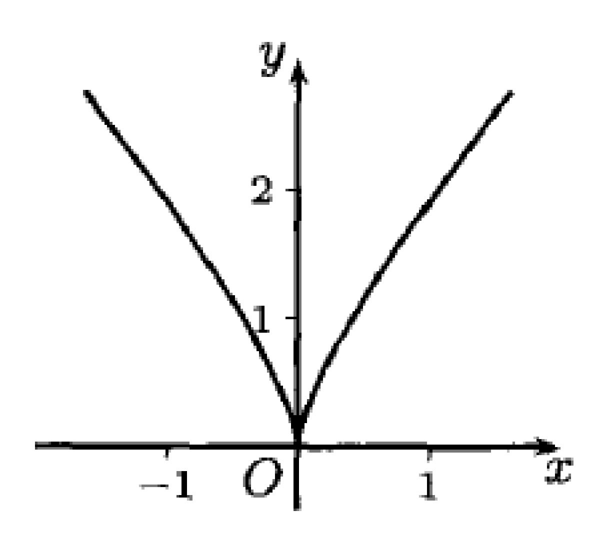


习题 1538 :

$x = t \ln t,\ y = \dfrac{\ln t}{t}$



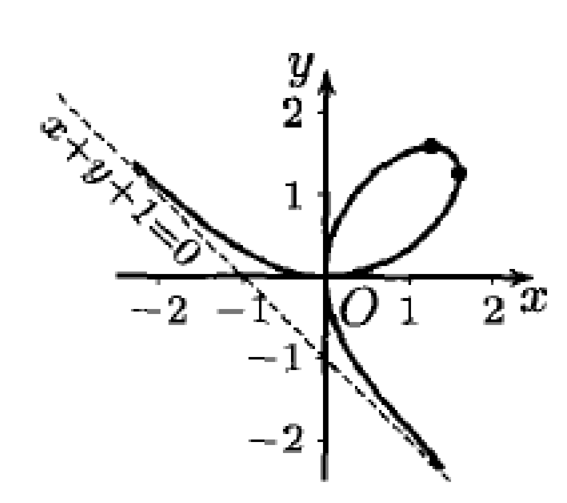
习题 1539 : $x = \dfrac{1}{\cos^3 t}$, $y = \tan^3 t$



习题 1540: $x = \sinh t - t$,

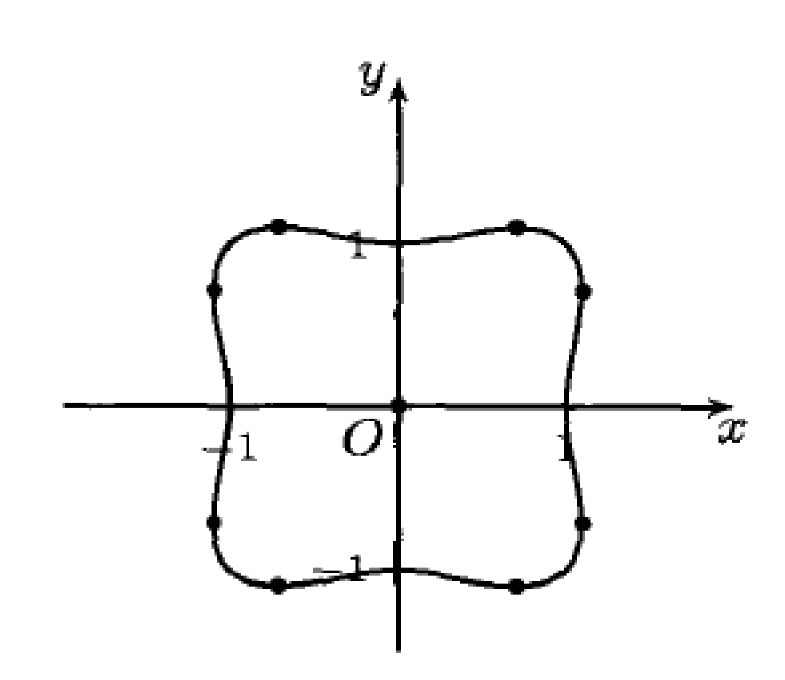


$y = \cosh t - 1$

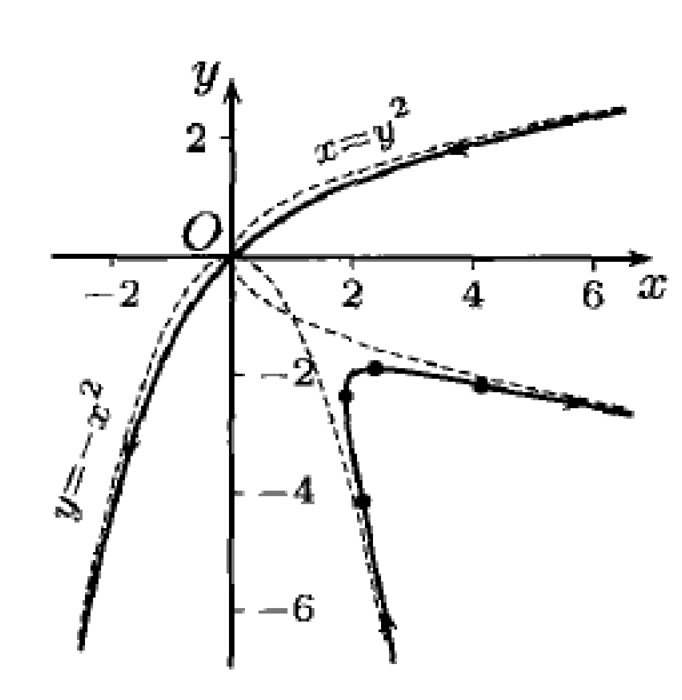


习题 1541 :

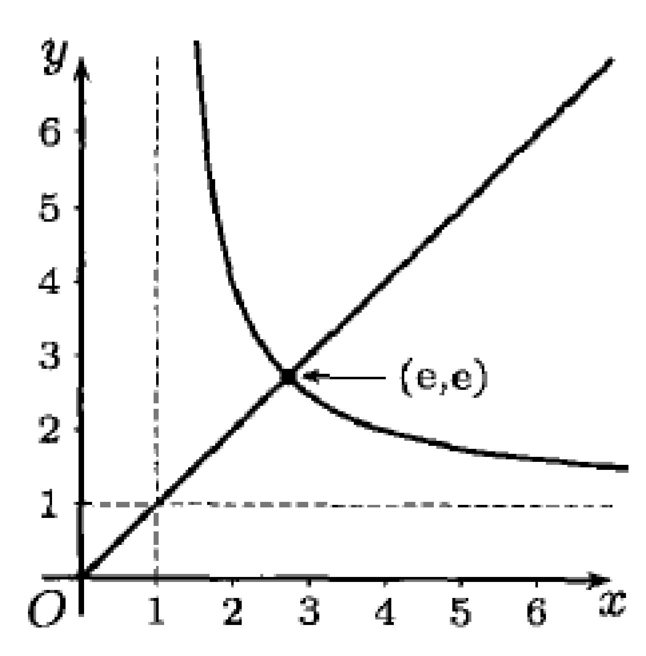
$x^3 + y^3 - 3xy = 0$



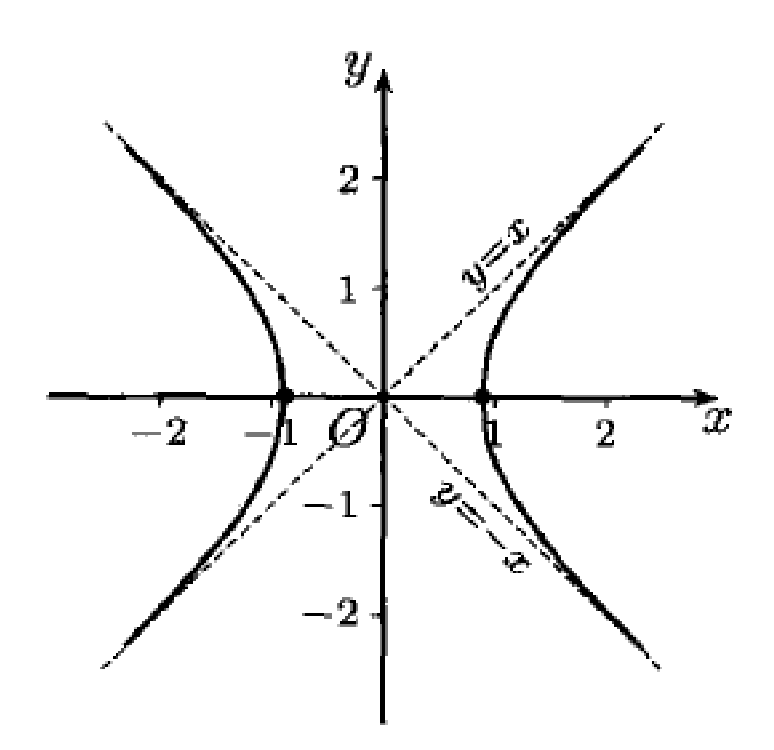
习题 1542 : $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$



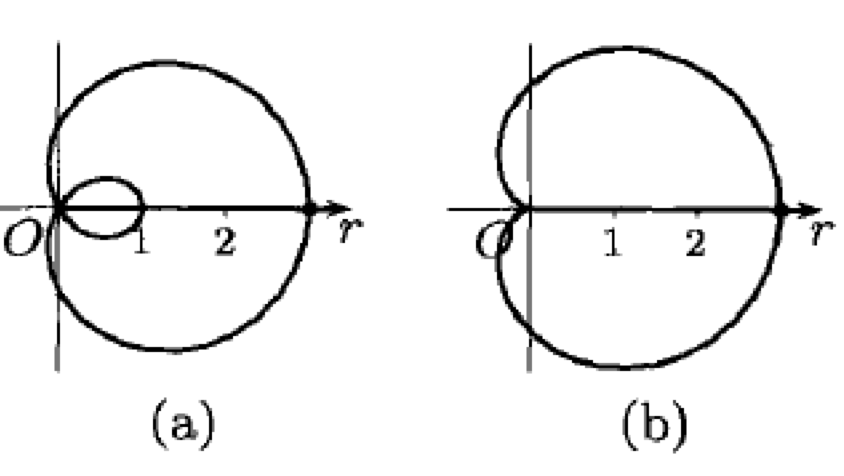
习题 1543 : $x^2y^2 = x^3 - y^3$



习题 1544: $x^y = y^x\ (x, y > 0)$



习题 1545 : $\cosh^2 x - \cosh^2 y = 1$

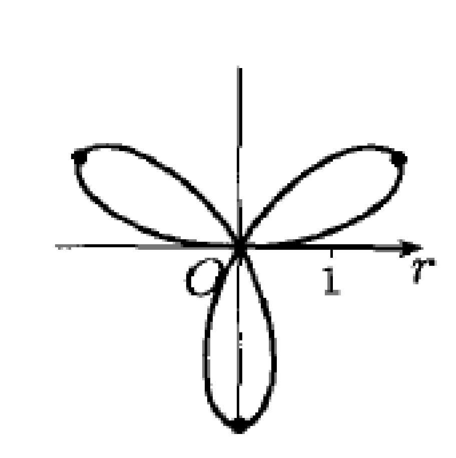


(a) (b)

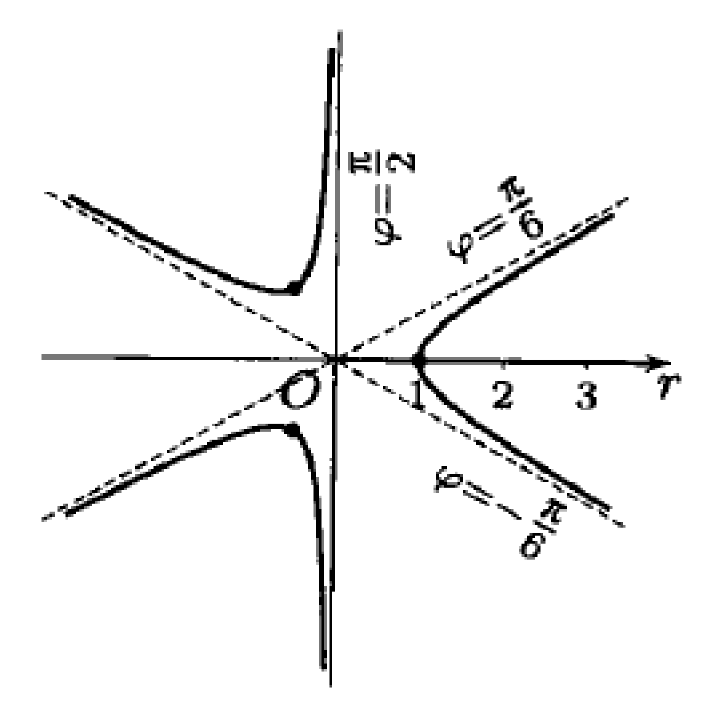
习题 1546 : $r = a + b\cos\varphi$,

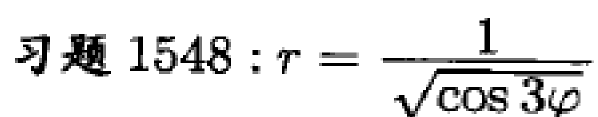
$(0 < a \leqslant b)$

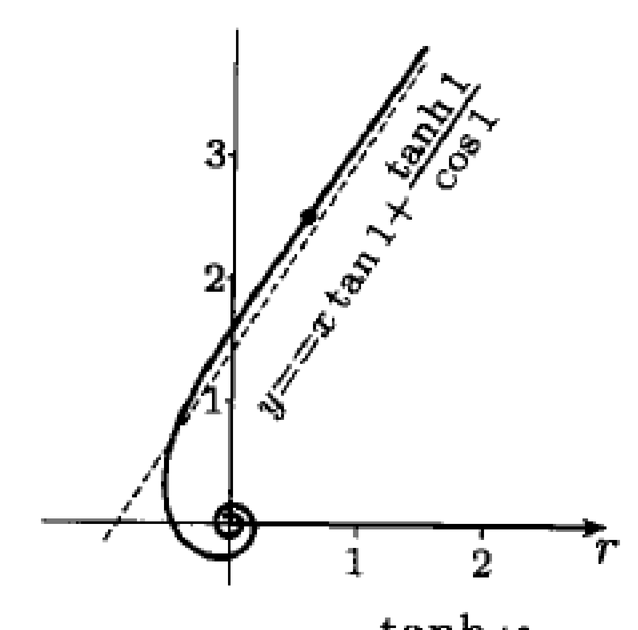
(a) $a = 1, b = 2$, (b) $a = b = 1.5$



习题 1547 : $r = \sin 3\varphi$

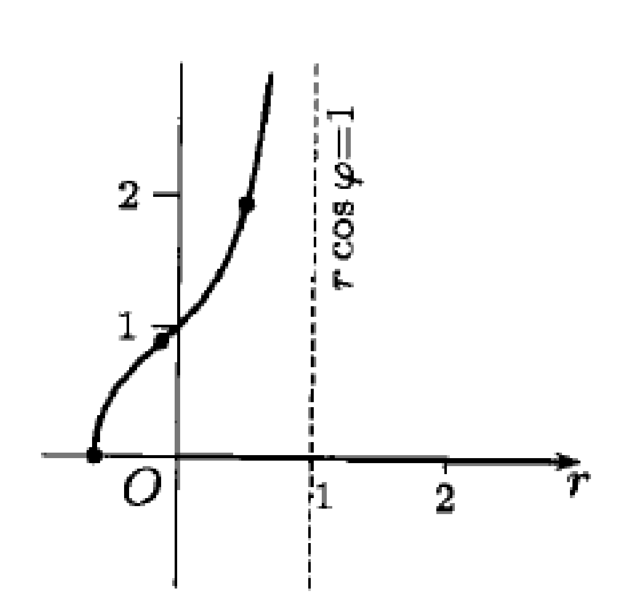



习题 1548 : $r=\dfrac{1}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$

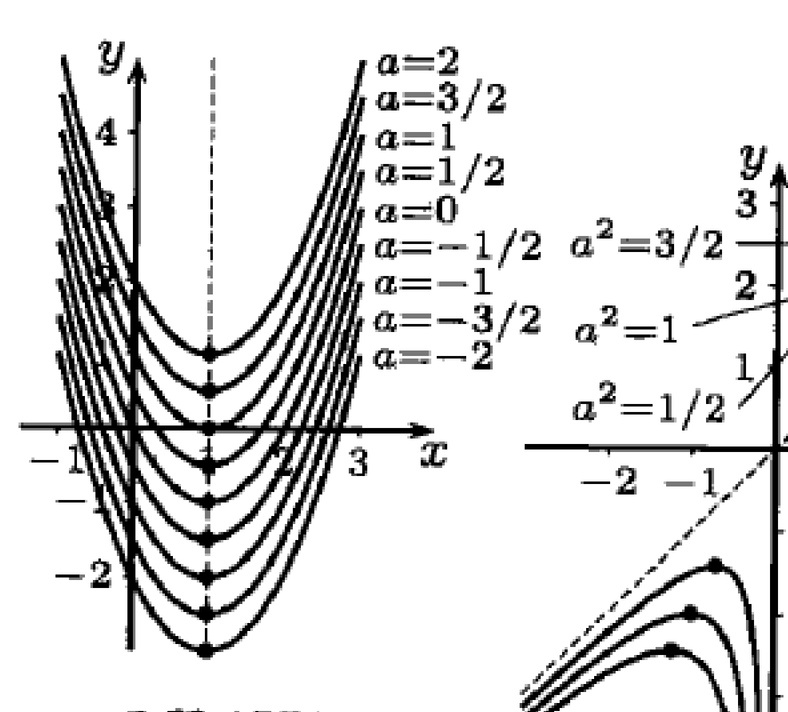


习题 1549 : $r=\dfrac{\tanh\varphi}{\varphi-1}$

$(\varphi>1)$



习题 1550 : $\varphi=\arccos\dfrac{r-1}{r^2}$

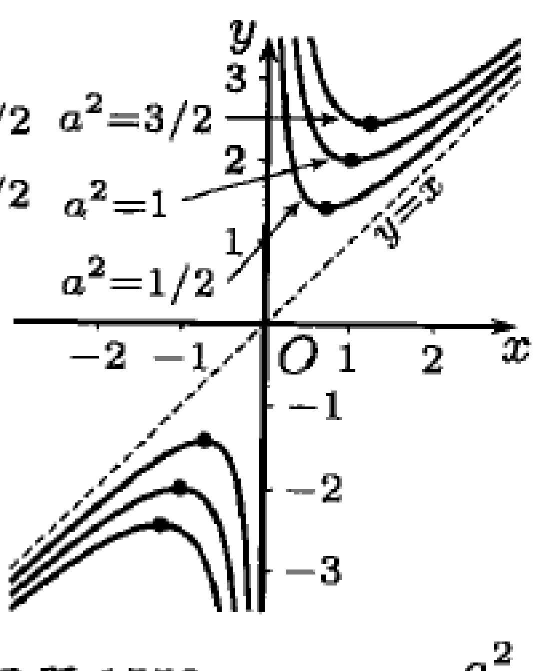


习题 1551 :

$y=x^2-2x+a,$

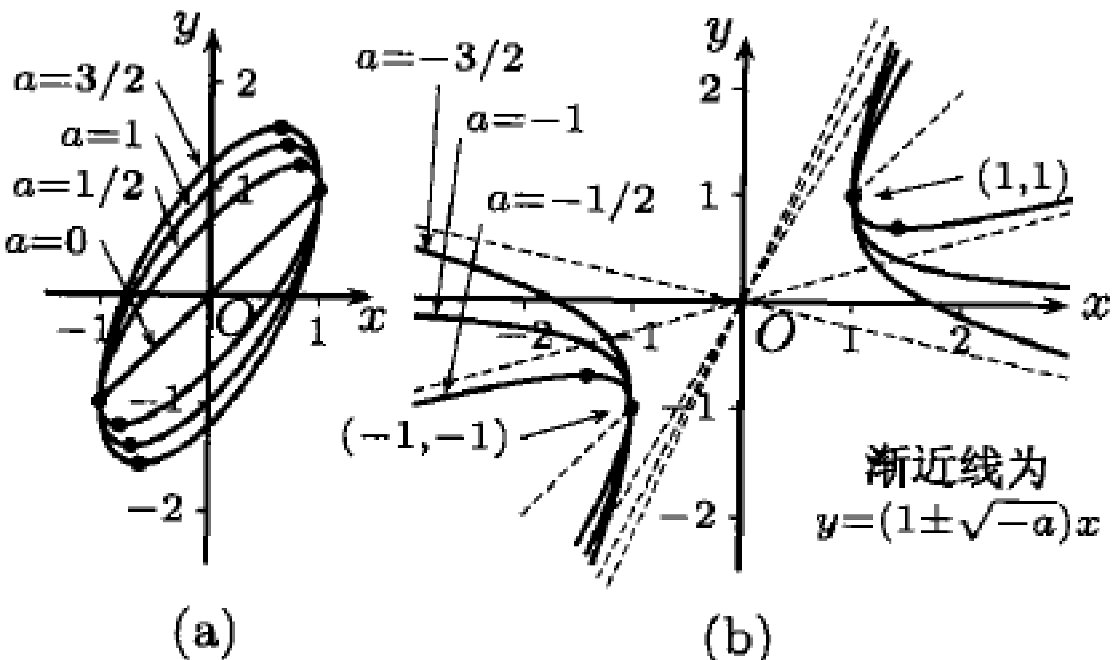
$a=-2,-\dfrac{3}{2},-1,$

$-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},2$



习题 1552 : $y=x+\dfrac{a^2}{x}$,

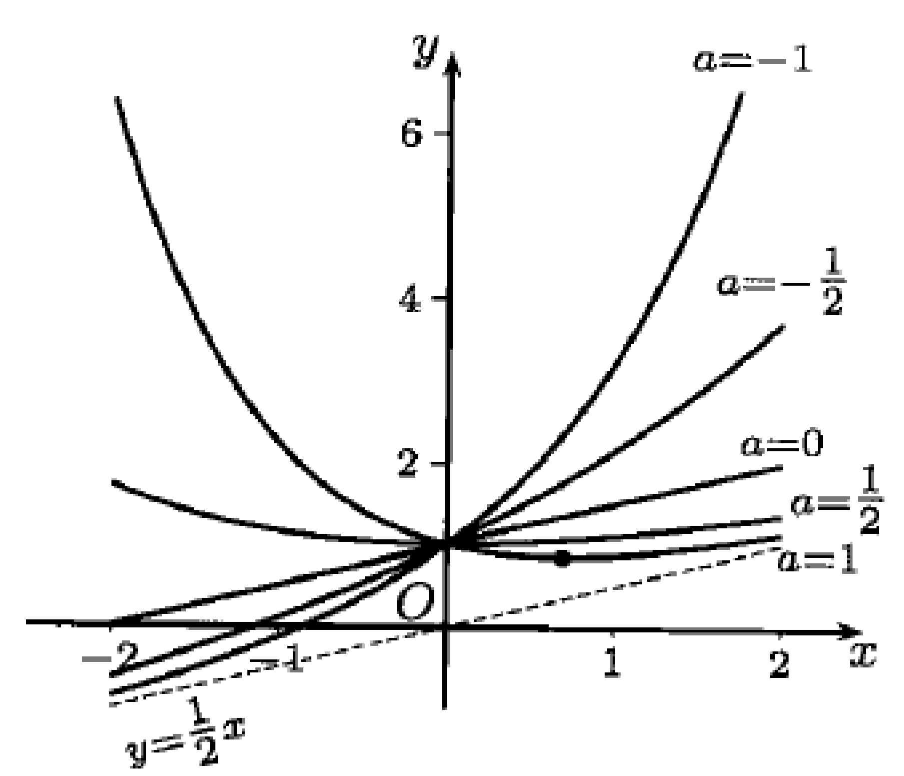
$a^2=\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}$



习题 1553 : $y=x\pm\sqrt{a(1-x^2)}$,

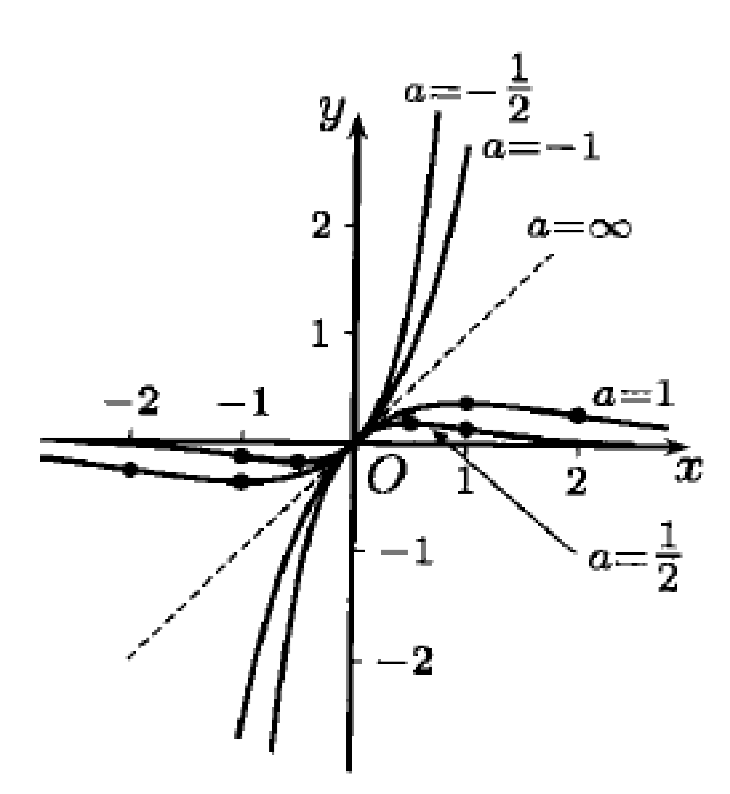
(a) $a=0,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}$,

(b) $a=-\dfrac{1}{2},-1,-\dfrac{3}{2}$



习题 1554 : $y=\dfrac{x}{2}+\mathrm{e}^{-ax}$

$a=-1,-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1$



习题 1555 : $y=x\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}$

$a=-\dfrac{1}{2},-1,\infty,1,\dfrac{1}{2}$

附录三　命题索引

本书在写作过程中发现, 除了对《习题集》中的部分习题作讲解之外, 还需要补充若干重要的命题, 并对其中的一部分给出证明. 为方便读者检索, 特编写此附录, 其中列出命题编号、内容与页码.

参 考 文 献

[说明] 以下文献按作者名 (编者名) 的 (拼音) 字母顺序排列, 对翻译著作未列出译者名.

[1] Bullen P S. Handbook of Means and Their Inequalities. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2003

[2] 曹敏谦. 数学分析习题集题解. 上海: 上海交通大学应用数学系, 1979

[3] Courant R, Robbins H. What is Mathematics. Oxford: Oxford University Press, 1996 (中译本: 柯朗, 罗宾. 什么是数学——对思想和方法的基本研究. 上海: 复旦大学出版社, 2006)

[4] 费定晖, 周学圣. 吉米多维奇数学分析习题集题解. 济南: 山东科学技术出版社, 2007

[5] Feller W. An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol.1). New Jersey: John Wiley, 1957 (中译本: 费勒. 概率论及其应用. 北京: 科学出版社, 1980)

[6] Фихтенгольц Г М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Moscow: Fizmatlit Publishers, 2003 (中译本: 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程 (第 8 版). 北京: 高等教育出版社, 2006)

[7] Gelbaum B R, Olmsted J M H. Counterexamples in Analysis. San Francisco: Holden-Day, Inc., 1964 (中译本: 盖尔鲍姆, 奥姆斯特德. 分析中的反例. 上海: 上海科学技术出版社, 1980)

[8] Gleick J. Chaos: Making a New Science. New York: Viking Penguin Inc., 1987 (中译本: 格雷克. 混沌——开创新科学. 北京: 高等教育出版社, 2004)

[9] 郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论. 上海: 上海科技教育出版社, 1993

[10] 华罗庚. 数学归纳法. // 华罗庚. 华罗庚科普著作选集. 上海: 上海教育出版社, 1984

[11] Katz V J. A History of Mathematics—An Introduction (Second Edition). New Jersey: Addison-Wesley, 1998 (中译本: 数学史通论 (第二版). 北京: 高等教育出版社, 2004)

[12] Knuth D E. The Art of Computer Programming, Vol. 1 Fundamental Algorithms (Third Edition). New Jersey: Addison-Wesley, 1997 (中译本: 克努特. 计算机程序设计艺术, 第一卷 基本算法 (第 3 版). 北京: 国防工业出版社, 2002)

[13] 匡继昌. 常用不等式 (第三版). 济南: 山东科学技术出版社, 2004

[14] 李文林主编. 数学珍宝——历史文献精选. 北京: 科学出版社, 1998

[15] 李岳生, 黄友谦. 数值逼近. 北京: 人民教育出版社, 1978

[16] 廖良文, 许宁. 吉米多维奇数学分析习题全解. 合肥: 安徽人民出版社, 2007

[17] Новоселов С И. Специальный курс тригонометрии, Государственное Издательство. Советская Наука, 1954 (中译本: 诺渥塞洛夫. 三角学专门教程. 北京: 高等教育出版社, 1956)

[18] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis (Third Edition). New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 1976 (中译本: 卢丁. 数学分析原理. 北京: 人民教育出版社, 1979)

[19] Соминскии И С. Метод Математической Индукции. Москва: ТЕХГИЗ, 1952 (中译本: 索明斯基. 数学归纳法. 北京: 中国青年出版社, 1953)

[20] Spivak M. Calculus. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1967 (中译本: 斯皮瓦克. 微积分. 北京: 人民教育出版社, 1980)

[21] 王向东, 李文荣, 马林茂. 函数方程 函数迭代与数学竞赛. 北京: 首都师范大学出版社, 1994

[22] 谢邦杰. 超穷数与超穷论法. 长春: 吉林人民出版社, 1979

[23] 谢惠民, 恽自求, 易法槐, 钱定边. 数学分析习题课讲义. 北京: 高等教育出版社, 2003

[24] 许绍溥, 姜东平, 宋国柱, 任福贤. 数学分析. 南京: 南京大学出版社, 2000

[25] 赵显曾. 数学分析拾遗. 南京: 东南大学出版社, 2006

[26] Зорич В А (Zorich V A). Mathematical Analysis (Fourth Edition). Berlin: Springer, 2002 (中译本: 卓里奇. 数学分析 (第四版). 北京: 高等教育出版社, 2006)